

Série Infinito

alusiva a I Semana do Infinito da FACMAT

Márcio Lima do Nascimento
(Organizador)



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA

Márcio Lima do Nascimento
(Organizador)

Série Infinito

alusiva a I Semana do Infinito da FACMAT

1ª Edição

Belém/PA



Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2018



Todo conteúdo deste trabalho, exceto quando houver ressalva, é publicado sob a licença **Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional**.

Copyright © 2018 Editora EditAedi Todos os direitos reservados.

REITOR

Dr. Emmanuel Zagury Tourinho

VICE-REITOR

Dr. Gilmar Pereira da Silva

COMITÊ EDITORIAL

Presidente:

Dr. José Miguel Martins Veloso

Diretora:

Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz

Membros do Conselho:

Dr. Aldrin Moura de Figueiredo

Dr. Iran Abreu Mendes

Dra. Maria Ataíde Malcher

ORGANIZADOR

Márcio Lima do Nascimento

CAPA

Andreza Jackson de Vasconcelos

IMAGEM

Alphacoders

EDITORA

EditAedi

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Nascimento, Márcio Lima do. (Org.)

Semana do Infinito: alusiva a I Semana do Infinito da FACMAT / Nascimento, Márcio Lima do. (Org.)

Belém: EditAedi/UFPA, 2018.

ISBN: 978-85-65054-62-1

1. Ensino

2. Ciências Exatas e Naturais

3. Matemática

Caminhos do Infinito

O infinito é um tema que aparece com a criança quando ela aprende a contar os dedos, os brinquedos e tudo ao seu redor. Porém o problema complica quando somos apresentados às estrelas e começamos a contá-las. Arquimedes, na antiguidade, teria perguntado quantos grãos de areia têm na superfície terrestre. Uma pergunta intrigante, por volta da pequena infância, é pensar porque que os números nunca acabam? Os números Naturais. Isso intrigou a Matemática, Física e a Filosofia durante milênios. Uma surpresa que teria aterrorizado os filósofos gregos foi a demonstração de que o conjunto dos números inteiros "têm a mesma quantidade de elementos" que os números naturais. Mais ainda, que as frações, chamadas números racionais, podem ser contadas como as pedras numeradas com os números naturais. E que, contrariando o senso comum, existe um infinito "muito mais infinito" que todos esses, o incontável conjunto dos números reais. Grande parte dessa maravilha de surpresas se deve ao grande gênio da matemática George Cantor, que desvendou vários mistérios da Teoria dos Conjuntos e deixou outros tantos para serem desvendados durante o século XX. Sobraram alguns problemas bem difíceis para o novo século XXI. Ainda temos muito a pesquisar sobre essas grandes questões matemáticas e filosóficas.

Quem estuda Sistemas Dinâmicos, como eu, se depara com conjuntos denominados Conjuntos de Cantor, em homenagem ao grande matemático russo-alemão que nasceu em 1845 e faleceu em 1918. Um dos maiores defensores do pensamento livre e polêmico de Cantor foi outro fenomenal matemático chamado David Hilbert (1862-1943). Hilbert liderou as grandes discussões da matemática do início do século XX e colocou em evidência vários problemas matemáticos candentes e destinados a serem resolvidos durante todo o século XX. Alguns problemas da lista de Hilbert ainda não foram resolvidos, dentre eles a Hipótese de Riemann, um problema fácil de anunciar e difícil de resolver, que também tem a ver com o tema infinito.

A idéia da Semana do Infinito em 2017 na Faculdade de Matemática da UFPA, para os alunos do PARFOR (Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica) surgiu para levar aos alunos várias áreas relacionadas a esse

tema que intriga muitas mentes, que levou Giordano Bruno (1548-1600) a ser queimado na fogueira, diante de sua coragem e pensamento livre a partir do seu clássico livro *Acerca do infinito do universo e dos mundos*. Tivemos um grande envolvimento de docentes e discentes com participações de professores de diversas universidades do Brasil. A Semana do Infinito foi um sucesso. E a promessa é que teremos outras edições dela. Esperamos todos na UFPA que o mundo não volte a ter esses tempos sombrios de queima abusiva do conhecimento e do pensamento livre. Que o pensamento e a criatividade sejam Infinitas!

Márcio Lima do Nascimento (org.)

SÉRIE INFINITO - VOLUME 1

FACMAT - ICEN - Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

Prefácio: Caminhos do Infinito	<i>II</i>
Capítulo 1: Os prisioneiros das caixas e os fujões para o infinito - Márcio Nascimento	1
Capítulo 2: Sobre a Infinitude da Dimensão de Espaços Vetoriais - Joelma Morbach e Mayara Brito	25
Capítulo 3: Relações de Recorrência e Convergência - Marcel Bertolini	42
Capítulo 4: Os diferentes usos do conceito de infinito e suas relações com o aprendizado da Matemática - Paulo Vilhena da Silva e Marisa Rosâni Abreu da Silveira	73
Capítulo 5	
Infinitamente Pequeno - João Cláudio Brandemberg	82

Capítulo 1

Os prisioneiros das caixas e os fujões para o infinito - Márcio Nascimento

Resumo 1.1. *Este trabalho relata algumas propriedades dinâmicas de aplicações do intervalo e do círculo, além de alguns exemplos no plano complexo. O objetivo central é estudar as órbitas dos pontos do domínio e identificar quais pontos tornam-se prisioneiros em conjuntos compactos quando iterados pelas aplicações e quais pontos fogem para o infinito.*

1.1 Introdução

Nos deparamos com a idéia de infinito muito cedo, desde da pequena infância, quando somos apresentados a contagem e formação dos números naturais. Minha filha, quando tinha uns cinco anos ganhou um jogo de perguntas e respostas onde uma das perguntas era: qual a coisa mais importante que você aprendeu hoje? E então ela respondeu: que os números nunca acabam! Sem ter conversado com ela sobre isso fiquei orgulhoso, mas ao comentarmos com o primo dela, ele soltou a seguinte pérola: eu tenho uma outra teoria, que os números não tem metade. Ora, a primeira percebe o infinito e acha incrível e o segundo percebe que se aquilo não tem fim então a "o meio daquilo" não existe. A imaginação da criança, em

grande parte, é podada ao longo dos tempos de escola, chegando muitas vezes na universidade querendo estudar engenharia com grandes dificuldades de entender progressões geométricas simples que envolvem o infinito. Isso mostra que algo errado acontece nesse processo das aulas de matemática, quanto a imaginação e a criatividade dos alunos. Porém, os números naturais, os inteiros, os racionais, são apenas um pequeno passo para desvendar os infinitos. Coloco no plural por sabermos hoje que existem diferentes infinitos: os contáveis, como o conjunto dos números naturais, e os infinitos não contáveis, como o conjunto dos números reais, que englobam os racionais e irracionais. O grande matemático George Cantor desvendou esses mistérios na passagem do século XIX para o século XX. Analisaremos neste trabalho algumas propriedades dos sistemas evolutivos de baixa dimensão.

Analisar um sistema evolutivo sob o ponto de vista dinâmico essencialmente é o estudo do comportamento a longo prazo desse sistema. Por analogia com a mecânica celeste, a evolução de um estado particular de um sistema dinâmico é definida como uma órbita, como veremos a seguir. Se lidarmos apenas com aplicações na reta, as funções envolvidas tem regras bem simples, lineares, quadráticas, senoides, porém quando aplicamos os pontos do domínio e suas imagens sucessivamente na mesma regra aparecem comportamentos matemáticos extremamente ricos. Veremos alguns exemplos neste artigo.

Um *sistema dinâmico discreto* consiste de um conjunto não vazio X e uma aplicação $f : X \rightarrow X$, para a qual iremos compô-la com ela mesma diversas vezes. Precisamente, para $n \in \mathbb{N}$, o n -ésimo iterado de f é a composição de f um número n de vezes, ou seja, $f^n = f \circ \dots \circ f$; definimos f^0 como a aplicação identidade. Vale observar que essas composições têm a seguinte propriedade: $f^{n+m} = f^n \circ f^m$. Então analisar um estado particular desse sistema é considerar $x \in X$ e calcular o que chamaremos de *órbita de x* :

$$\{f(x), f^2(x) = f(f(x)), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

A órbita dos pontos, além da terminologia se inspirar na astronomia, também tem significados físicos bem presentes no dia a dia para justificar os nomes de certos pontos especiais. O ponto fixo, por exemplo, que é a solução da equação $f(x) = x$, a interseção do gráfico da função com a reta identidade $y = x$, no modelo físico de uma partícula significa que "o ponto fica o tempo todo parado". Os pontos periódicos são bem parecidos com os fixos, só que ficam oscilando entre

dois, três pontos ou mais, dependendo da chamada ordem do ponto periódico. Em particular, o ponto fixo é um ponto periódico de ordem 1. Neste contexto X é uma variedade de dimensão 1 (podem ser intervalos da reta $\mathbb{R}$, o círculo ou $\mathbb{C}$).

1.2 A dinâmica e seus pontos bem comportados

Um ponto $p \in I$ é dito periódico de período n se $f^n(p) = p$. Um ponto fixo é um ponto periódico de período 1. Em torno desses pontos, na vizinhança desses pontos, a dinâmica tem uma certa estabilidade, ou seja, o comportamento de todos os pontos dessa vizinhança é similar quanto à sua órbita futura. Além disso, nesse contexto existem três tipos de pontos fixos e periódicos: atratores, repulsores ou neutros. Um ponto fixo *atrator* é também chamado de *poço* e esta palavra já explica um pouco do que acontece na vizinhança de um ponto deste tipo. A trajetória dos pontos próximos tendem a se aproximar cada vez mais do ponto fixo. O ponto fixo *repulsor* é também chamado de *fonte* e neste caso as órbitas dos pontos próximos tendem a se afastar cada vez mais do ponto fixo. O comprimento maximal dessa vizinhança de pontos que se afastam ou se aproximam de um ponto fixo é o que chamamos de *bacia* de atração ou repulsão do ponto fixo ou periódico.

Teorema 1.2.1. *Seja $f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}$ e p um ponto periódico de f de período n . Se $|(f^n)'(p)| < 1$ então p é um ponto periódico atrator. Se $|(f^n)'(p)| > 1$ então p é um ponto periódico repulsor. A bacia de atração ou repulsão de p , denotada $B(p)$ é um aberto de I .*

Em resumo, no caso do atrator $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$, para qualquer $x \in B(p)$. No caso do repulsor, todos os pontos próximos se afastam e temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = p$. No caso neutro nada podemos afirmar, pois podem aparecer situações bem distintas. Veja a demonstração do teorema acima em [4].

Exemplo 1.2.1. *Para a função $f(x) = x^3$ com $X = \mathbb{R}$, temos três pontos fixos, que são -1 , 0 e 1 . O ponto 0 é um atrator e os pontos -1 e 1 são repulsores.*

Neste caso a bacia de atração do ponto 0 é o intervalo $(-1, 1)$ e os outros pontos fora do intervalo $[0, 1]$ convergem para $-\infty$ e $+\infty$. Podemos visualizar os gráficos da funções $y = x^3$ e $y = x$ e traçar o retrato de fase simples desta dinâmica.

Porém, nem sempre tudo converge para pontos periódicos, pois existem exemplos com órbitas que não convergem para nenhuma órbita periódica e passam perto de todas as órbitas. São as chamadas órbitas caóticas.

Um exemplo clássico de inúmeros comportamentos é estudar a parábola, a função logística

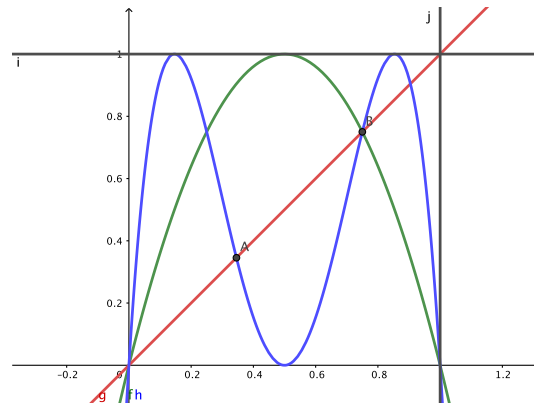
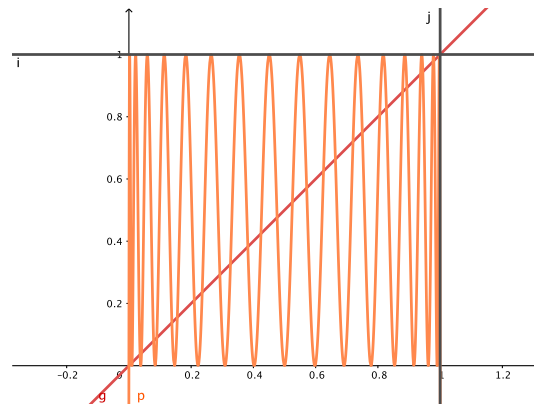
$$f(x) = ax(1 - x) = ax - ax^2, \text{ onde } a \in [2, 5]$$

e seus iterados. O parâmetro a é escolhido nesse intervalo porque ocorrem situações bem intrigantes e caóticas. Aqui ocorrem todos os ingredientes favoritos dos matemáticos que estudam a dinâmica unidimensional: estabilidade hiperbólica, um número infinito de órbitas periódicas, um número infinito de órbitas densas, sensibilidade às condições iniciais, funções topologicamente mixing, funções infinitamente renormalizáveis, além de propriedades de ergodicidade e entropia com formalismo termodinâmico. Basta variar o parâmetro a para escolher o cardápio que convém. Tudo isso foi desenvolvido nesses últimos 50 anos, ao se ampliar o estudo das chamadas aplicações do intervalo e do círculo. Veja [13] para um espectro bem amplo.

1.3 O computador e a análise gráfica

Com esse exemplo inicial acima já percebermos uma das questões principais em dinâmica: o que acontece a longo prazo com a sequência de iterados $f^n(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, podemos ter em certos sistemas um subconjunto “atraindo um conjunto grande” de pontos, que foi o caso do subconjunto formado pelo ponto $\{0\}$ atraindo o intervalo $(-1, 1)$.

Uma das ferramentas mais simples que temos para aperfeiçoar o estudo da dinâmica dessas aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é a análise gráfica via computador, usando diversos softwares, inclusive o Geogebra. Vale ressaltar que na maioria dos casos a análise gráfica não é suficiente para mostrar a existência de fenômenos mais complicados da dinâmica, mas ela é sem dúvida muito útil para uma melhor compreensão de certos comportamentos. Nos gráficos a seguir 1.1 e podemos observar a função $f = 4x(1 - x)$ na cor verde e a iterada f^2 na cor azul. O ponto $B = (0.75, 0.75)$ é fixo para ambas, mas A é fixo para f^2 e uma órbita de período 2 para f . Iterando

Figura 1.1: f e f^2 e seus pontos fixosFigura 1.2: A iterada f^n terá infinitos pontos fixos se n crescer

mais ainda f os pontos periódicos vão se proliferando por todo o intervalo $[0, 1]$. Podemos provar que os pontos pontos periódicos são densos em $[0, 1]$. A figura 1.2 dá uma idéia do aumento de pontos periódicos quando iteramos f .

1.4 Prisioneiros e fugões

Um conjunto bastante estudado na análise é o chamado Conjunto Triádico de Cantor, que é facilmente construído: tome o intervalo $[0, 1]$ e divida em três partes de igual comprimento e retire o intervalo aberto do meio $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sobram dois intervalos fechados de comprimento $1/3$. Em seguida, divida os dois intervalos que

restaram novamente em três partes de igual comprimento, retirando os intervalos abertos do meio. Sobram 4 intervalos de comprimento $1/9$. Depois faça a mesma coisa, em todas as etapas subsequentes, indefinidamente, cortando os intervalos dos meios. O conjunto que sobra é, por incrível que pareça, um conjunto de comprimento zero, porém com uma quantidade não enumerável de elementos. Ou seja, cortamos tanto e ainda temos tantos números quanto os números reais, em termos de cardinalidade. São os mistérios da teoria dos conjuntos descobertos em grande parte por George Cantor, um grande matemático. A seguir vamos gerar esse conjunto usando a dinâmica.

Consideremos a função $T_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x & \text{se } x \leq 1/2 \\ \mu(1-x) & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Essa função é chamada de tenda de inclinação μ . Ela tem diversos comportamentos dinâmicos, dependendo do valor de μ . Nesta seção vamos gerar o Conjunto Triádico de Cantor considerando o caso $\mu = 3$, ou seja, a função

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1/2 \\ -3x + 3 & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Fazendo a análise gráfica para a aplicação tenda T_3 , facilmente verifica-se que a órbita de qualquer $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ tende para $-\infty$. Portanto para todo ponto fora do intervalo $[0, 1]$ a órbita tende para $-\infty$. Mas não só esses pontos que vão para o infinito, muitos outros dentro de $[0, 1]$ tem esse itinerário. Iremos mostrar que um conjunto já bem conhecido “fica para sempre” no intervalo $[0, 1]$ quando iterado pela tenda T_3 .

Os pontos fixos de T_3 são 0 e $4/3$. Obviamente qualquer ponto cuja órbita recaia nesses dois pontos vai permanecer no intervalo $[0, 1]$. Esses pontos são chamados pré-fixos. O ponto 1 é pré-fixo, ou seja, 1 não é fixo mas $f(1) = 0$ é fixo. Por outro lado $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ são aplicados no ponto 1. Além disso, podemos observar pelo gráfico que o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, quando iterado um única vez, tem imagem fora do intervalo $[0, 1]$, precisamente à direita de $[0, 1]$. O próximo iterado cai à esquerda de $[0, 1]$, no eixo negativo. Prosseguindo as iterações, esses pontos irão convergir para $-\infty$.

Ou seja, os pontos que permanecem no intervalo $[0, 1]$ após uma iteração, que pertencem a $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, são exatamente os intervalos da primeira etapa de construção do Triádico de Cantor. Inclusive a imagem desses intervalos cobrem $[0, 1]$.

Chamaremos de Λ o conjunto dos pontos do intervalo $[0, 1]$ que quando iterados por T_3 indefinidamente não escapam para $-\infty$, permanecendo neste intervalo. Chamaremos esses pontos de *prisioneiros*. Observe que os pontos fixos e periódicos são trivialmente prisioneiros. Aos pontos que escapam para o infinito chamaremos de *fujões*.

Em cada um dos intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ existe um intervalo que é pré-imagem por T_3 do intervalo $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ que vai escapar de $[0, 1]$ no 2º iterado. Pela linearidade de T_3 , os extremos destes intervalos são facilmente calculados e assim obtemos o complementar dessas pré-imagens, que são os intervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$ que permanecem no intervalo $[0, 1]$ após duas iterações. São exatamente os intervalos da 2ª etapa de construção do Triádico de Cantor.

Continuando a análise das pré-imagens de $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (veja figura 1.3), na próxima etapa obtemos 8 intervalos que permanecem em $[0, 1]$ após 3 iterações. A simplicidade da expressão de T_3 permite calcular todas as pré-imagens. E todas elas são exatamente os intervalos das etapas de construção do Triádico de Cantor. Continuando o processo indefinidamente obtemos a construção do conjunto de Triádico de Cantor, ou seja, considerando o conjunto Λ dos pontos que não escapam de $[0, 1]$ após infinitas iterações de T_3 pode-se mostrar que este conjunto é exatamente o Conjunto Triádico de Cantor.

O conjunto dos fujões do intervalo $[0, 1]$ é portanto o complementar $[0, 1] \setminus \Lambda$. Ou seja, podemos dizer que as órbitas desses pontos são divergentes, ou melhor, diremos que elas convergem para o infinito (neste caso $-\infty$). Aqui o infinito atrai todos os pontos que não estão no Cantor Ternário, ou seja, estes pontos formam a bacia de atração do infinito. Apesar do infinito não ser um ponto ou um subconjunto de $\mathbb{R}$, de certa forma estamos dizendo que o símbolo ∞ é um atrator para este sistema. É como se considerássemos o espaço ambiente $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Uma observação interessante é que $T_3(\Lambda) \subset \Lambda$, ou seja, Λ é um conjunto invariante pela aplicação T . O Cantor Ternário é então um repulsor para T_3 .

Um subconjunto X de um espaço topológico é dito *totalmente desconexo* se as

componentes conexas são pontos isolados. Em $\mathbb{R}$ ser totalmente desconexo equivale a não conter intervalos.

Um conjunto X é dito *perfeito* se é fechado e todo ponto $x \in X$ é ponto de acumulação de pontos do próprio conjunto X , ou seja, todo $x \in X$ é o limite de pontos $y_n \in X$ com $y_n \neq x$.

Observação 1.4.1. Λ é um conjunto perfeito e totalmente desconexo.

Para demonstrar esta observação considere a etapa n do Cantor Triádico, que denotamos por Λ_n e o Cantor Triádico é $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$. Temos neste caso 2^n intervalos e cada um deles tem comprimento $\frac{1}{3^n}$.

Para qualquer ponto $p \in \Lambda$ existe um ponto q que dista $\frac{1}{3^n}$ de p e não está em Λ_n e portanto não está em Λ . Com isso concluímos que Λ não tem pontos interiores, ou seja, Λ tem interior vazio, portanto não contém intervalos, logo é totalmente desconexo.

Os conjuntos Λ_n são fechados e portanto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, é fechado. Seja $p \in \Lambda$ e k um inteiro positivo. Tome n tal que $\frac{1}{3^n} < 2^{-k}$ e seja K a componente de Λ_n que contém p . Então $K \cap \Lambda_{n+1}$ é constituído de dois intervalos. Seja q_k um dos extremos dos intervalos de $K \cap \Lambda_{n+1}$ que não contém p . Então $q_k \neq p$ e $|p - q_k| < \frac{1}{3^n} < 2^{-k}$. Logo $q_k \in \Lambda$ (já que todos os extremos dos Λ_i 's estão em Λ). Isto dá uma sequência de pontos $q_k \in \Lambda$, $q_k \neq p$ e q_k converge para p . Assim demonstramos a afirmação.

Pode-se mostrar que o conjunto dos prisioneiros de T_3 tem dimensão fractal fracionária, ou seja, é um conjunto que tem dimensão entre 0 e 1 (na verdade a dimensão fractal é igual a dimensão de Hausdorff neste caso).

Definição 1.4.1. Um subconjunto de $\mathbb{R}$ é chamado de conjunto de Cantor se é fechado e limitado, totalmente desconexo e perfeito.

Em $\mathbb{R}$ um subconjunto totalmente desconexo é um conjunto que não contém intervalos. Um subconjunto perfeito é um conjunto em que qualquer ponto do conjunto é ponto de acumulação. A topologia mostra o quanto esse conjunto de Cantor é esquisito, por isso é chamado também de *Poeira de Cantor*.

O conjunto Triádico de Cantor Λ é o primeiro exemplo que vimos de um conjunto de Cantor. Veremos outros exemplos a seguir.

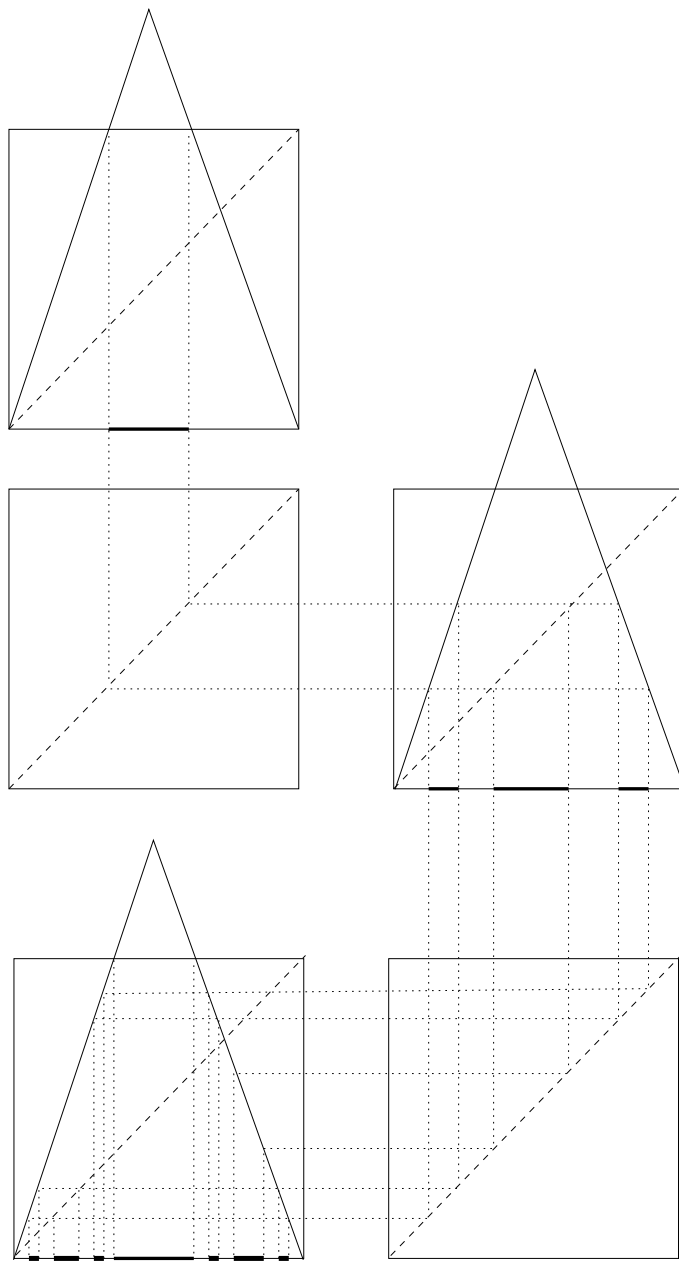


Figura 1.3: A órbita negativa do intervalo $(1/3, 2/3)$

Pode-se mostrar que qualquer conjunto de Cantor da reta $\mathbb{R}$ é homeomorfo ao Triádico de Cantor. Na realidade, um resultado da topologia é que quaisquer dois espaços métricos compactos, perfeitos e totalmente desconexos são homeomorfos (veja a demonstração deste fato em livros clássicos, por exemplo, *Willard, S., General Topology*). Ou seja, podemos dizer que o Cantor de Cantor é o único espaço métrico compacto perfeito, totalmente desconexo (a menos de homeomorfismos).

1.5 A Aplicação Quadrática

Vamos analisar a dinâmica da aplicação quadrática. Apesar da sua simplicidade (trata-se de uma parábola), a dinâmica dessa aplicação pode apresentar comportamentos não triviais. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

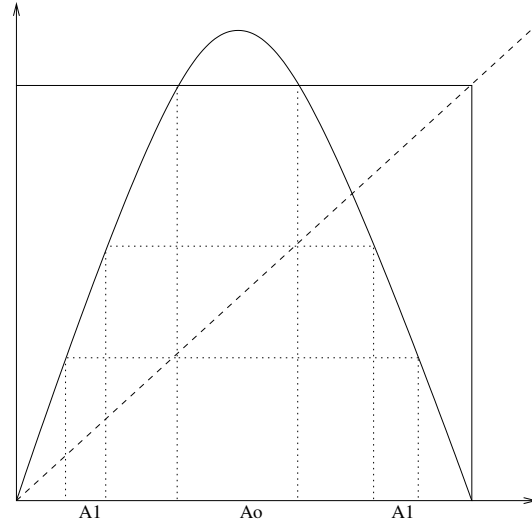
$$f_a(x) = ax(1 - x)$$

onde a é um número real positivo. Ou seja, é a família de parábolas com concavidade para baixo, que dependem do parâmetro a (veja figura 1.4).

Para a aplicação $f_a(x) = ax(1 - x)$ é fácil ver que $f_a(0) = f_a(1) = 0$, ou seja, 0 é ponto fixo, o ponto 1 é pré-fixo e $f_a(q_a) = q_a$, onde q_a é o outro ponto fixo, que depende do parâmetro a . Além disso, se $a > 1$ então $0 < q_a < 1$.

Da mesma forma que a tenda, com uma análise gráfica de f_a , podemos observar que a dinâmica interessante reside no intervalo $[0, 1]$, pois se $a > 1$ e $x < 0$ então $f_a^n(x) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Para $x > 1$ idem, pois no segundo iterado o valor da imagem é negativa e recai no caso anterior.

Para valores pequenos de a a dinâmica é trivial, ou seja, a órbita de quase todo ponto converge para o ponto fixo q_a . Nestes casos, por exemplo quando $1 < a < 3$, o único ponto periódico é o ponto fixo (todos os pontos do intervalo $]0, 1[$ convergem para ele). Podemos simular estes comportamentos no computador analisando os gráficos de f_a e as órbitas dos pontos. Agora quando $3 < a < 4$ a dinâmica é mais complicada e diversos comportamentos aparecem, tanto periódicos quanto caóticos, e nesse contexto residem inúmeros problemas matemáticos da área de dinâmica unidimensional (veja [4], [13] e [9]). Neste texto, não estudaremos parâmetros intermediários, veremos apenas o caso $a > 4$, que tem relação com o fractal famoso, o Triádico de Cantor.

Figura 1.4: Aplicação quadrática com $a > 4$

1.5.1 Os prisioneiros da Família Quadrática

Consideraremos a função f_a restrita ao intervalo $I = [0, 1]$, pois fora deste intervalo sabemos que as órbitas dos pontos convergem para $-\infty$. Além disso, considere o parâmetro $a > 4$. Com isso, o valor máximo $a/4$ é maior que 1, portanto existem pontos de $[0, 1]$ que deixam o intervalo I após uma iteração de f , veja figura 1.4. Denotemos por A_0 o conjunto desses pontos. A_0 é um intervalo aberto centrado em $1/2$ e tem a propriedade de que se $x \in A_0$, então $f(x) > 1$ e $f^2(x) < 0$ e portanto $f^n(x) \rightarrow \infty$. A_0 é o conjunto dos pontos que escapam imediatamente de I . Todos os outros pontos de I permanecem em I após uma iteração de f , que pertencem ao conjunto $C_0 = I \setminus A_0$.

Podemos encontrar os extremos do intervalo A_0 facilmente, bastando resolver a equação $f(x) = 1$, ou seja, $ax(1-x) = 1$, que resulta nos pontos $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a^2-4a}}{2a}$ e $\hat{x}_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4a}}{2a}$.

Observe que os pontos x_0 e $\hat{x}_0$ são pré-fixos do ponto fixo 0, pois $f(x_0) = f(\hat{x}_0) = 1$ e $f^2(x_0) = f^2(\hat{x}_0) = f(1) = 0$. Usando o teorema do valor intermediário podemos mostrar que existem infinitos pontos pré-fixos do ponto fixo 0 e também infinitos pré-fixos do outro ponto fixo q_a . Pelo gráfico, podemos traçar algumas órbitas negativas desses pontos fixos.

Como fizemos com a aplicação tenda iremos agora analisar as pré-imagens do intervalo A_0 pela aplicação f . Mas não sejamos precipitados em achar que a construção é a mesma. Observe que a aplicação f é não-linear e o posicionamento desses intervalos que são pré-imagens em cada etapa de construção irão diferir bastante da posição dos intervalos do Triádico de Cantor. Vejamos a construção neste caso.

Seja $A_1 = \{x \in I \mid f(x) \in A_0\}$. Se $x \in A_1$, então $f^2(x) > 1$, $f^3(x) < 0$ e portanto $f^n(x) \rightarrow \infty$. O conjunto A_1 é constituído de 2 intervalos, enquanto que o conjunto $C_1 = I \setminus (A_0 \cup A_1)$ consiste de 4 intervalos.

Por indução, seja $A_n = \{x \in I \mid f^n(x) \in A_0\}$. Ou seja, $A_n = \{x \in I \mid f^i(x) \in I \text{ para } i \leq n \text{ mas } f^{n+1}(x) \notin I\}$. Logo A_n consiste de todos os pontos que escapam de I na iterada $n + 1$. Então podemos considerar o complementar desse conjunto

$$C_n = I \setminus \bigcup_{i=0}^n A_i$$

Esse conjunto consiste de 2^n intervalos fechados disjuntos. Pontos de C_n não escapam de $I = [0, 1]$ mesmo que iterados por f_a um número n de vezes. Uma outra observação sobre C_n é que em cada intervalo J dos 2^n intervalos de C_n , a função $f^n : J \rightarrow [0, 1]$ é injetora e sobrejetora. Como um exercício de cálculo podemos mostrar isso facilmente, mas também podemos gerar os gráficos no computador de f , f^2 , f^3 e assim sucessivamente e observar que em cada etapa esses intervalos cobrem $I = [0, 1]$.

O Conjunto dos prisioneiros de f , que nunca escapam de I , é a interseção infinita desses conjuntos, ou seja,

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$$

O nosso objetivo aqui é mostrar que o conjunto $\mathcal{C}$ é um conjunto de Cantor, assim como Λ o é. Mas quando a tem valor bem próximo de 4 temos mais dificuldades em mostrar essa propriedade, pois neste caso o intervalo A_0 é muito pequeno e nos pontos de $I \setminus A_0$ próximos dos extremos de A_0 a derivada fica muito baixa, com valores menores que 1. Isso resulta em dificuldades técnicas. A demonstração fica mais simples ao considerarmos que a derivada em todo o conjunto $I \setminus A_0$ é

estritamente maior que 1. Isto pode ser conseguido se considerarmos $a > 2 + \sqrt{5}$, ou seja, com um valor um pouco maior que 4. Para estes valores de a , existe $\delta > 1$ tal que $|f'(x)| > \delta$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Pela regra da cadeia, segue que $|(f^n)'(x)| > \delta^n$.

Teorema 1.5.1. *Para $a > 2 + \sqrt{5}$ temos que $\mathcal{C}$ é um conjunto de Cantor.*

Já vimos que $\mathcal{C}$ é uma interseção enumerável de intervalos fechados, logo é fechado. Além disso está contido em $[0, 1]$, logo é limitado. Suponha agora que $\mathcal{C}$ contenha um intervalo, ou seja, podemos tomar $x, y \in \mathcal{C}$, com $x \neq y$, tal que $[x, y] \subset \mathcal{C}$. Então $|(f^n)'(z)| > \delta^n$ para todo $z \in [x, y]$. Tomemos n tal que $\delta^n|y - x| > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, segue que $|f^n(y) - f^n(x)| \geq \delta^n|y - x| > 1$, o que implica que $f^n(y)$ ou $f^n(x)$ estão fora do intervalo $[0, 1]$. Com esta contradição provamos que $\mathcal{C}$ é totalmente desconexo.

Vamos mostrar que $\mathcal{C}$ é perfeito. Lembremos inicialmente que qualquer ponto do bordo de um conjunto A_k está em $\mathcal{C}$, pois tais pontos são pré-fixos e são aplicados no ponto fixo 0, portanto permanecem em $[0, 1]$. Agora suponhamos que $p \in \mathcal{C}$ é isolado. Então todo ponto numa vizinhança de p deve sair de $[0, 1]$ por algum iterado de f . Esses pontos devem pertencer a algum A_k . Sabemos que os pontos do bordo de A_k estão em $\mathcal{C}$, pois convergem para zero. Então temos duas possibilidades: o ponto p ou é um extremo de um conjunto A_k ou não.

Se não for extremo de A_k então existe uma sequência de pontos extremos de conjuntos A_k convergindo para p . Então temos uma sequência de pontos de $\mathcal{C}$ convergindo para p . Contradição, pois a suposição era que p fosse isolado.

Se p for extremo de algum A_k então ele converge para o zero. Podemos supor que f^n aplica p em 0 e todos os outros pontos na vizinhança de p são aplicados no eixo real negativo. Isso implica que f^n tem um máximo em p . Portanto $(f^n)'(p) = 0$. Pela regra da cadeia $f'(f^i(p)) = 0$ para algum $i < n$. Como $1/2$ é o ponto crítico de f então $f^i(p) = \frac{1}{2}$. Mas isso implica que $f^{i+1}(p) \notin [0, 1]$, portanto $f^n(p) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas isso contradiz o fato de que $f^n(p) = 0$. Com isso concluímos a demonstração do teorema.

Observação 1.5.1. *O conjunto $\mathcal{C}$ é bem parecido com fractal Cantor Ternário. De fato ele é homeomorfo ao Cantor Ternário. Se existe um homeomorfismo h entre duas dinâmicas f e g sobre o mesmo espaço, tais que*

$$h \circ f = g \circ h,$$

dizemos que f e g são topologicamente conjugadas. Esse diagrama que comuta preserva muita coisa de uma e de outra dinâmica. Por exemplo, o comportamento dinâmico da f acima restrita a $\mathcal{C}$ é o mesmo da aplicação shift dos dois símbolos $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, com sua métrica usual. Também é topologicamente conjugada a tenda para $\mu = 2$ (que não vimos aqui), que é uma aplicação fortemente expansora. Todos esse conjuntos são homeomorfos a tenda restrita ao prisioneiros.

Uma outra aplicação que podemos mencionar, que tem a mesma dinâmica de σ no espaço métrico Σ_2 é a chamada *Aplicação do Padeiro*. Ela tem dois ramos e é igual a tenda T_2 para $0 \leq x \leq 1/2$, que é a reta $2x$, porém o segundo ramo para $1/2 < x < 1$ a função vale $2x - 1$. Podemos resumi-la na fórmula

$$P(x) = 2x \bmod 1,$$

que além de ser vista como uma aplicação por partes do intervalo $[0, 1]$ em $[0, 1]$, pode ser vista como uma aplicação do círculo S^1 , se identificarmos $0 = 1$, virando uma função contínua do círculo. Uma excelente função para se começar a estudar dinâmica, devido a sua forte expansividade. As propriedades mencionadas nos parágrafos acima podem ser vistas com mais detalhes no excelente livro de James Yorke [1], cujo título é *Chaos: an introduction to dynamical systems*.

1.6 Dinâmica da Aplicação Quadrática no plano complexo

Muito antes dos computadores e das belas figuras chamadas hoje de fractais complexos, há por trás uma teoria matemática extremamente rica, que tem origem nos trabalhos de Gaston Julia e Pierre Fatou no início do século XX, que vale a pena ser investigada. Aqui iremos considerar funções no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, ou seja, o conjunto dos números da forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Na forma polar considere $z = re^{i\theta}$, com raio r e argumento θ .

Como falamos em conjugação topológica, voltando rapidamente às funções da seção anterior, considerar o estudo das aplicações quadráticas $f_a(x) = ax(1-x)$ é o mesmo que considerar o estudo da família $q_c(x) = x^2 + c$, que depende do parâmetro c real, pois basta fazer uma mudança de variável conveniente que transformamos f_a

em q_c (mostra-se que essa função mudança de variável é inclusive do tipo linear, por exemplo $h(x) = px + q$). Esse fato é interessante pois veremos a seguir uma generalização no plano complexo da aplicação q_c , ou de f_a , que é o polinômio quadrático $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$q_c(z) = z^2 + c,$$

onde c é um número complexo.

Seja w um ponto periódico de q_c de período n e considere a derivada complexa de ordem n de q_c . O ponto w é chamado de:

1. Superatrator se $(q_c^n)'(w) = 0$;
2. Atrator se $0 \leq |(q_c^n)'(w)| < 1$;
3. Indiferente se $|(q_c^n)'(w)| = 1$;
4. Repulsor se $|(q_c^n)'(w)| > 1$.

Lembre-se que neste contexto temos também que considerar a bacia de atração de w , denotada por $B(w)$, ou seja, o conjunto dos pontos cujas órbitas convergem para w . O caso em que w é o infinito teremos a bacia de atração do infinito $B(\infty)$.

O conjunto de Julia $\mathcal{J}(q_c)$ pode ser definido como o fecho dos conjuntos dos pontos periódicos repulsores de q_c . O complementar de $\mathcal{J}(q_c)$ é chamado de conjunto de Fatou ou conjunto estável $\mathcal{F}(q_c)$. Mais a frente veremos uma outra definição do conjunto de Julia que é equivalente a esta.

Vamos considerar inicialmente a aplicação mais simples desta família, quando $c = 0$, ou seja, $q_0(z) = z^2$. Já vimos essa aplicação restrita apenas a S^1 , ou seja, quando $|z| = 1$. Neste caso, como $r = 1$, o número complexo z pode ser visto na $z = e^{i\theta}$ e assim $z^2 = e^{2i\theta}$. Então a aplicação quadrática restrita a S^1 é a aplicação $\theta \mapsto 2\theta$, vista anteriormente, que tem infinitos pontos periódicos repulsores e eles são densos em S^1 .

Observe que se z é tal que $|z| > 1$, então $|q_0(z)| = |z^2| = |r^2 e^{2i\theta}| > |z| = |r e^{i\theta}|$. Se continuarmos iterando indefinidamente obtemos que $q_0^n(z) \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $|z| < 1$ então $|z^2| < |z|$, e continuando as iterações obtemos que $q_0^n(z) \rightarrow 0$. Ou seja, todos pontos do disco aberto de raio 1 convergem para o ponto fixo 0.

Vimos no caso acima que tivemos dois tipos de comportamento das órbitas: ou as órbitas são limitadas ou então convergem para o infinito. Órbita limitada significa que existe um número real positivo tal que o módulo de todo ponto na órbita é menor do que este número. Esse comportamento se repete no caso geral q_c com $c \neq 0$, ou ainda para qualquer polinômio quadrático complexo.

Proposição 1.6.1. *A órbita de um número complexo z_0 , sob iteração da aplicação $q_c(z) = z^2 + c$, ou é limitada ou converge para o infinito.*

A princípio a proposição acima parece óbvia, pois se as órbitas não são limitadas em $\mathbb{C}$, é natural pensar que elas irão convergir para o infinito. Porém no caso real podemos ter as órbitas densas no espaço todo (a própria aplicação acima $q(z) = z^2$ restrita ao círculo S^1 , que é a aplicação $f(\theta) = 2\theta$, é um exemplo desse comportamento). Então dependendo da aplicação poderíamos ter a possibilidade de a órbita de um ponto não convergir pra lugar nenhum e percorrer $\mathbb{C}$ de forma densa. O objetivo da proposição acima é dizer que não temos coisas deste tipo com a aplicação quadrática em $\mathbb{C}$. A seguir demonstraremos a proposição.

Já vimos que a proposição é válida para o caso $c = 0$. Agora suponhamos $c \neq 0$ complexo. Afirmamos que se u é um número complexo tal que $|u| > |c| + 1$ então a órbita de u vai convergir para o infinito. De fato,

$$|q(u)| = |u^2 + c| \geq |u^2| - |c| \geq (|c| + 1)^2 - |c| = |c|^2 + |c| + 1$$

e portanto

$$\begin{aligned} |q^2(u)| &= |q(q(u))| = |(q(u))^2 + c| \geq |q(u)|^2 - |c| \\ |q^2(u)| &\geq (|c|^2 + |c| + 1)^2 - |c| = |c|^4 + 2|c|^3 + 3|c|^2 + |c| + 1 \\ |q^2(u)| &\geq 3|c|^2 + |c| + 1 \end{aligned}$$

Continuando o processo, por indução podemos mostrar que

$$|q^n(u)| \geq (2^n - 1)|c|^2 + |c| + 1$$

e como o lado direito da desigualdade tende para $+\infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então a órbita de u tende para o infinito sempre que $|u| > |c| + 1$. Ou seja, mostramos que

qualquer órbita de um número complexo sob iteração de $q(z) = z^2 + c$ é limitada por $|c| + 1$ ou a órbita do ponto converge para o infinito.

Observe que o conjunto das órbitas limitadas, neste caso complexo, é o que chamamos de prisioneiros no caso real. Para a dinâmica em $\mathbb{C}$, o conjunto dos prisioneiros (pontos com órbita limitada em $\mathbb{C}$) é chamado de *Conjunto de Julia Cheio* da aplicação q_c .

Definição 1.6.1. *A fronteira do conjunto de Julia Cheio é chamado de Conjunto de Julia da aplicação q_c .*

Um bom exercício é mostrar que a definição de Conjunto de Julia acima é equivalente àquela dada do início da seção. Um outra propriedade importante é dada pela proposição seguinte.

Proposição 1.6.2. *Se w é um ponto fixo atrator de q_c ou $w = \infty$, então o conjunto de Julia de q_c é igual ao bordo da bacia de atração de w , isto é, $\mathcal{J}(q) = \partial B(w)$*

A demonstração desta propriedade não será vista, pois é um resultado que depende de assuntos mais avançados que não veremos aqui, tais como o estudo de famílias normais e o Teorema de Montel (veja a demonstração em [7], cap. 14, em [2], cap.7 ou em [5]). Teremos que usar esta propriedade mais a frente.

Voltando a definição dada, então o Julia cheio (o conjunto dos prisioneiros) da aplicação z^2 é o disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e o conjunto dos fujões, que convergem para o infinito, é $\mathbb{C} \setminus D$. O conjunto de Julia é exatamente a curva que separa os prisioneiros dos fujões, ou seja, S^1 , que é a fronteira do Julia cheio. Neste caso, $\mathcal{J}(q_0)$ é uma curva fechada de dimensão topológica e Hausdorff igual a 1 em $\mathbb{C}$, logo não é um fractal na definição de Mandelbrot.

Vale ressaltar que este caso de q_0 , em que o conjunto de Julia é uma curva diferenciável, não é representativo. Em geral, $\mathcal{J}(q_c)$ torna-se uma curva que é não diferenciável em um conjunto denso de pontos, e a geometria desse conjunto é bem mais complicada. Queremos dizer que variando o parâmetro c em $q_c(z) = z^2 + c$, a geometria do conjunto de Julia pode mudar drasticamente.

Então vamos considerar a aplicação quadrática $q_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $q_c(z) = z^2 + c$. A derivada $q'_c(z) = 2z$ se anula apenas no zero, portanto 0 é o único

ponto crítico da aplicação e o valor crítico é c . Para este caso geral vejamos alguns comportamentos bastante significativos:

Exemplo 1.6.1. $q_0(z) = z^2$. *Este é o caso visto acima, em que 0 é um superatrator e o conjunto de Julia é o círculo S^1 . Obviamente, o conjunto de Julia cheio é o disco unitário e a aplicação q_0 atua sobre S^1 como a aplicação $\theta \rightarrow 2\theta \bmod 2\pi$ (onde θ é a coordenada angular de um ponto $z \in S^1$).*

Exemplo 1.6.2. $q_\epsilon(z) = z^2 - \epsilon$, com ϵ real e $0 < \epsilon \ll 1$. *Neste caso existe um ponto fixo atrator próximo do zero (mas deixa de ser superatrator como no caso $c = 0$) e o outro ponto fixo é repulsor e é bem próximo de 1. Quanto aos outros pontos periódicos, são todos repulsores, e da mesma forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos 2^n pontos periódicos repulsores próximos de S^1 .*

As órbitas do ponto crítico e do valor crítico convergem para o ponto fixo atrator. Em termos de localização dos pontos periódicos há muita proximidade com o caso anterior. Mas não podemos dizer o mesmo do conjunto de Julia. O conjunto de Julia é uma curva invariante por q_ϵ , contínua e fechada, que é C^0 próxima a S^1 , mas ela não é diferenciável em um conjunto denso de pontos. Sua dimensão de Hausdorff é maior do que 1. Observe a figura 1.5, que retrata o que acabamos de descrever. O conjunto de Julia cheio, nesta figura, seria a "curva fechada quebrada" traçada em preto e mais o que tem no interior.

Podemos usar geradores desses conjuntos disponíveis na web de diversas maneiras. No caso das figuras deste texto fizemos no Matlab. Geramos as figuras (1.6, 1.7 e 1.8) nas quais ϵ é um número complexo próximo da origem, mas com parte imaginária não nula. O conjunto de Julia se distancia de S^1 , mas continua uma curva "totalmente quebrada". Além disso, em todos esses casos o conjunto de Julia Cheio ainda é um conjunto conexo. Observe que as figuras dos conjuntos de Julia estão descrevendo de certa forma o espaço de parâmetros onde varia o fator c na função quadrática. Todos os valores de c

Exemplo 1.6.3. $q_{-1}(z) = z^2 - 1$. *Neste caso $q_{-1}(0) = -1$ e $q_{-1}(-1) = 0$. Portanto 0 e -1 são pontos periódicos de período 2 superatratores. Sobre a reta real o ponto fixo repulsor $(1 - \sqrt{5})/2$ separa as bacias de atração de 0 e -1 . Veja o conjunto de Julia de $q_{-1}(z) = z^2 - 1$ na figura 1.9. Diferentemente dos casos anteriores, em que se tinha apenas uma curva fechada simples, aqui o Julia contém um número infinito de diferentes curvas fechadas simples.*

Para se ter uma idéia de como é gerada esta figura é gerada, pode-se mostrar que o conjunto de Julia de q_{-1} contém duas curvas fechadas simples γ_0 e γ_{-1} que envolvem o ponto 0 e o ponto -1 , respectivamente, e que limitam suas bacias imediatas de atração. A única pré-imagem de -1 é 0. Com isso, mostra-se que a única pré-imagem da curva γ_{-1} é γ_0 . Contudo, 0 tem duas pré-imagens, $+1$ e -1 . Com isso, mostra-se que γ_0 tem duas pré-imagens, γ_{-1} e uma outra curva fechada γ_1 que envolve o ponto 1. Continuando o processo, usando o fato de que o conjunto de Julia é completamente invariante pela aplicação $q_{-1}(z)$ pode-se concluir que $\mathcal{J}(q_{-1})$ contém infinitas curvas fechadas. Pode-se mostrar que $\mathcal{J}(q_{-1})$ é um conjunto conexo.

Exemplo 1.6.4. $q_i(z) = z^2 + i$. Diferente dos exemplos anteriores, em que o ponto crítico convergia para uma órbita atratora, aqui o ponto crítico 0 é pré-periódico, pois $q_i^2(0) = i - 1$ e $i - 1$ e i são pontos periódico repulsores de período 2. Não existem pontos periódicos atratores. Veja este conjunto de Julia na figura ??.

Qualquer que seja o método para gerar essa imagem, ela não fica com uma representação excelente. É que neste caso o conjunto de Julia de q_i é um conjunto estranho, que podemos chamar de "figura dentada" (o termo em inglês é dendrite). É um subconjunto de $\mathbb{C}$ com as seguintes propriedades: é compacto, conexo por caminhos, localmente conexo, o interior do fecho de $\mathcal{J}(q_i)$ é o conjunto vazio.

Um outro fato curioso é que quando $c = -2$, ou seja, $q(z) = z^2 - 2$, pode-se mostrar que o conjunto de Julia é o intervalo fechado $[-2, 2]$ (veja em *Devaney*). Neste caso do intervalo, que é um segmento de reta em $\mathbb{C}$, que é fácil de traçar, e o caso anterior temos a propriedade de que o conjunto de Julia cheio não tem ponto interior, apesar de em ambos os casos eles são ainda serem conexos. O segmento de reta é conexo em $\mathbb{C}$ e não tem nenhum ponto interior, apesar de não ser totalmente desconexo. Aliás, vale comentar que em $\mathbb{R}$, um compacto ter fecho com interior vazio implica ser totalmente desconexo, mas uma curva em $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^2$, tem fecho com interior vazio e não é totalmente desconexo. Então neste sentido este é um caso similar ao do dentrite. Existem muitos outros valores de parâmetros com Julia do mesmo tipo que o caso $c = i$.

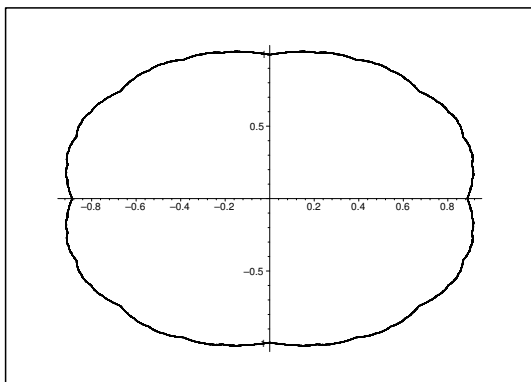


Figura 1.5: Julia de $Q(z) = z^2 + 0.1$

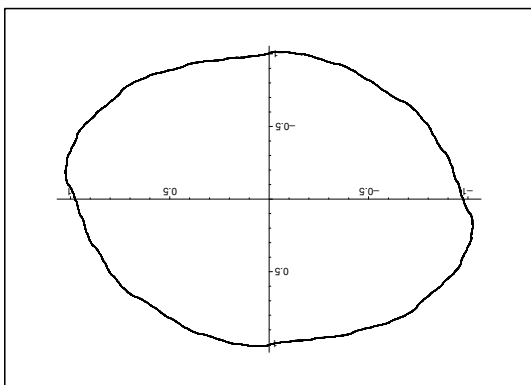


Figura 1.6: Julia de $Q(z) = z^2 + 0.1i$

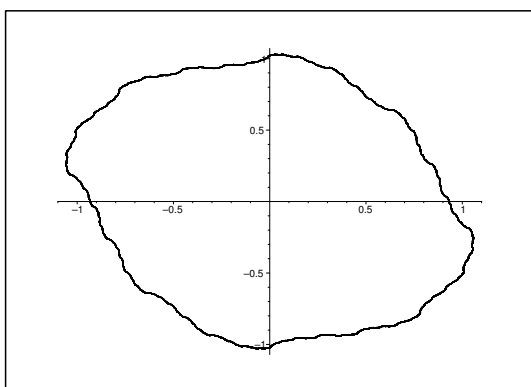


Figura 1.7: Iteração de $Q(z) = z^2 + 0.2i$

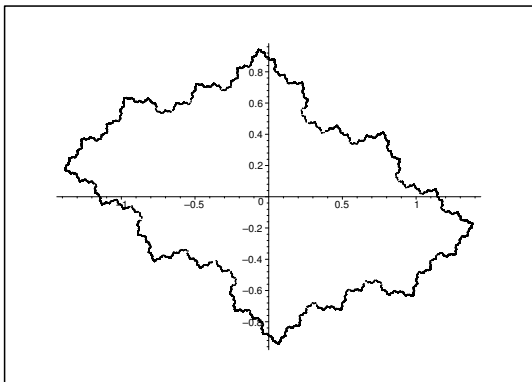


Figura 1.8: Iteração de $Q(z) = z^2 - 0.5 + 0.3i$

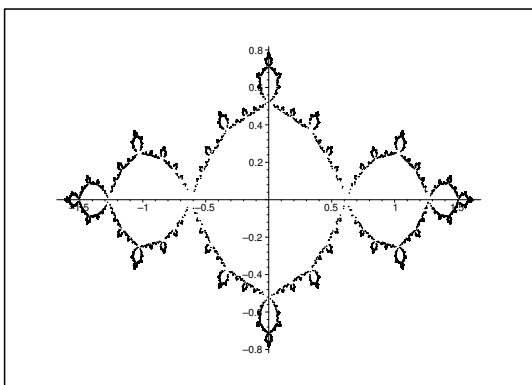


Figura 1.9: Iteração de $Q(z) = z^2 - 1$

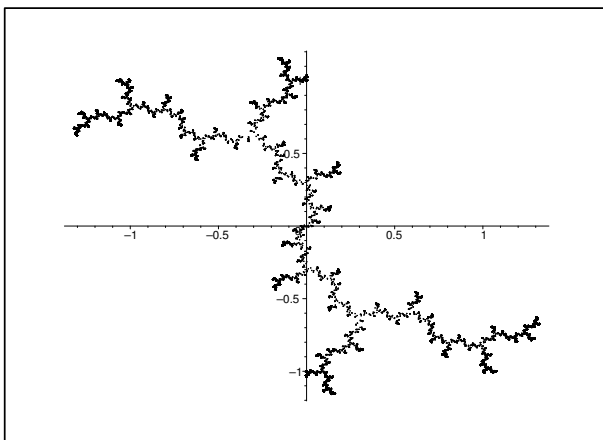


Figura 1.10: Julia Dendrite

1.7 Considerações finais

Nas seções referentes à dinâmica real em $\mathbb{R}$ ficou muito claro que a dinâmica apresentava vários tipos de prisioneiros e fujões: pontos periódicos, intervalos, poeiras de Cantor ou ainda o intervalo todo do domínio. Na tenda com parâmetro alto podemos ter a poeira de Cantor prisioneira e o resto foje para o infinito. Na tenda com parâmetro 2 podemos ter o intervalo inteiro $[0, 1]$ com comportamento caótico, assim como a aplicação do padeiro e a aplicação quadrática $f_a(x) = ax(1 - x)$ com $a = 4$, bastando exibir a bem conhecida conjugação topológica entre essas aplicações.

No caso complexo os prisioneiros tem fronteiras bem esquisitas, que são os conjuntos de Julia, formados por curvas que não são deriváveis em nenhum ponto, nada suaves. O computador esboça as aproximações desses conjuntos formando figuras que relacionam fujões para o infinito e prisioneiros nos conjuntos de Julia cheio. O interessante do problema mais simples que é a aplicação com parâmetro nulo $c = 0$, que é a aplicação z^2 no plano complexo, apresenta como conjunto de Julia o círculo S_1 , onde a dinâmica restrita a esse conjunto é caótica e exatamente a mesma vista no caso real $2x \bmod 1$.

O infinito continua sendo uma grande mistério e objeto de estudo profundo dos matemáticos.

Referências Bibliográficas

- [1] Alligoog,K., Sauer, T. e Yorke, J. *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. Second Edition. Springer Verlag, 2000.
- [2] Barnsley, Michael. *Fractals Everywhere*, Academic Press, 2003.
- [3] Brin, M. e Stuck,G. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] Devaney, Robert. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems - Theory and Experiment*, The Advanced Book Program, 1992.
- [5] Devaney, Robert. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley P.C. Inc., 2000.
- [6] Edgar, G.A., *Mesure, Topology and Fractal Geometry*, Springer - Verlag, 1992.
- [7] Falconer, K., *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*, Jonh Wiley and Sons, Chichester, 2003.
- [8] Falconer, K., *The Geometry of Fractal sets*, Cambridge-University Press, 1985.
- [9] Holmgren, Richard. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, 2000.
- [10] Mandelbrot, B. *Objetos Fractais*, Gravita, 1989.
- [11] Peitgen, Jugens and Saupe, *Fractal for the Classroom*, Springer - Verlag. 1992.
- [12] Peitgen, Jürgens e Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Second Edition. Springer Verlag, 2004.

- [13] Robinson, C. *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. CRC Press, 2000.
- [14] Stewart, Ian. *Será que Deus Joga Dados?: a nova matemática do caos*. Jorge Zahar Editor, 1991.

Capítulo 2

Sobre a Infinitude da Dimensão de Espaços Vetoriais - Joelma Morbach e Mayara Brito

Resumo 2.1. Nosso principal objetivo com este trabalho é ampliar um pouco o conhecimento do professor de matemática, no que diz respeito ao estudo sobre alguns espaços vetoriais, especialmente espaços vetoriais de dimensão infinita. O problema motivador deste texto consiste na seguinte pergunta: sabemos que todo espaço vetorial possui uma base de Hamel, mas nem sempre é possível exibir uma base para tal espaço, então como saber se o mesmo possui dimensão finita ou infinita? Uma das ferramentas utilizadas para responder a esta questão, decorre de um corolário do famoso Teorema de Hahn-Banach, um dos principais teoremas estudado em Análise Funcional. Mostraremos, como aplicação, que dentre outros os espaços ℓ_1 e C_0 tem dimensão infinita.

Palavras Chave: Dimensão. Infinito. Teorema de Hahn-Banach.

2.1 Introdução

A definição de espaços vetoriais, subespaços, bem como os conceitos e propriedades básicas sobre a teoria dos espaços vetoriais, são vistos pelos alunos de

licenciatura em Matemática no curso de Álgebra Linear Elementar. No entanto é importante que o professor de Matemática do Ensino Básico saiba um pouco mais sobre a classe dos espaços vetoriais e um pouco mais sobre espaços vetoriais de dimensão infinita, isto é algo que, em geral ficamos "devendo" no curso de Licenciatura, especialmente no PARFOR, devido ao ritmo alucinante em que temos que ministrar as disciplinas. Levando em consideração que, muito provavelmente, esses professores da educação básica jamais tenham outra oportunidade de serem apresentados a algum conhecimento de Análise funcional, pensamos que um evento como a semana do Infinito, se constitui numa excelente forma de mostrarmos um resultado interessante e uma aplicação. No entanto é importante introduzir com certo cuidado os conceitos necessários ao entendimento do que nos propomos a apresentar. A análise funcional faz uso de muitos conceitos de álgebra linear, e pode ser considerada até certo ponto como o estudo de espaços normados de dimensão infinita. Devido a importância desta e sua vasta aplicação em diversos campos da ciência, nosso objetivo consiste em apresentar alguns conceitos e fundamentos básicos da Análise Funcional, visando a demonstração de um dos principais e mais utilizados teoremas da Análise Funcional: o Teorema de Hahn-Banach forma analítica real e aplica-lo na decisão sobre a infinitude da dimensão de certos espaços vetoriais. Neste texto iremos trabalhar com os seguintes espaços vetoriais:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[t] &= \text{conjunto dos polinômios na variável } t \text{ com coeficientes no corpo } \mathbb{R} \\ \ell &= \{(x_n); x_n \in \mathbb{R}\} \\ \ell_0 &= \{(x_n) \in \ell; x_i = 0 \text{ exceto para um número finito de índices.}\} \\ \ell_1 &= \left\{ (x_n) \in \ell; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\} \\ \ell_{\infty} &= \{(x_n) \in \ell; (x_n) \text{ é limitada.}\} \\ C_0 &= \{(x_n) \in \ell; x_n \rightarrow 0\}\end{aligned}$$

2.2 Preliminares

Nesta seção faremos uma introdução aos espaços normados com ênfase aos espaços de Banach. Ou seja espaços vetoriais nos quais existe a noção de norma de um vetor, igual a estudada no curso de Álgebra Linear Elementar. Nosso objetivo

nessa seção não é apresentar estudo aprofundado das propriedades de tais espaços, mas sim oferecer os conceitos básicos sobre essa classe de espaços. Também falaremos um pouco sobre os Espaços de Banach e algumas de suas propriedades fundamentais. E para finalizar a seção falaremos um pouco sobre Aplicações Lineares e Contínuas, em especial os isomorfismos, definindo, apresentando exemplos e demonstrando os principais resultados envolvidos no assunto.

Definição 2.1. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma norma em X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in X$ (desigualdade triangular).

Um espaço normado é um espaço vetorial X considerado com uma norma $\|\cdot\|$, denotado por $(X, \|\cdot\|)$.

No espaço $\mathbb{K}^n$, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, podemos considerar as normas:

1. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
2. $\|x\|_s = |x_1| + \dots + |x_n|$.
3. $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Definição 2.2. *Sejam X um espaço normado e (x_n) uma sequência em X , dizemos que a sequência (x_n) converge a $x \in X$ ($x_n \rightarrow x$), ou que x é o limite da sequência $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\right)$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ implicar $\|x_n - x\| < \varepsilon$.*

Assim, a convergência em um espaço normado é o mesmo que a convergência da sequência numérica $(\|x_n - x\|)$.

Definição 2.3. *Uma sequência $(x_n) \subset (X, \|\cdot\|)$ é dita de Cauchy se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, para todos $m, n \geq n_0$.*

Definição 2.4. *Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dito de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge em X .*

Exemplo 2.1. $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é espaço de Banach. Temos que $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é espaço vetorial normado, resta ver que é Banach.

De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em l_∞ . Assim,

$$x_1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_k^1, \dots) \quad \text{e} \quad |(\xi_i^1)_{i \in \mathbb{N}}| < C_1$$

$$\vdots$$

$$x_N = (\xi_1^N, \xi_2^N, \dots, \xi_k^N, \dots) \quad \text{e} \quad |(\xi_i^N)_{i \in \mathbb{N}}| < C_N,$$

e já que (x_n) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$, para todos $n, m \geq N_0$. Logo, $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k^n - \xi_k^m| < \epsilon$, para todos $n, m \geq N_0$ o que implica $|\xi_k^n - \xi_k^m| < \epsilon$, para todos $n, m \geq N_0$ e $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, $(\xi_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ (que é Banach) e portanto converge para $a_k \in \mathbb{R}$, isto é: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_k^n = a_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Consideremos $a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$, vamos mostrar que $a \in l_\infty$ e $x_n \rightarrow a$. Fixando $n \in \mathbb{N}$ e fazendo $m \rightarrow +\infty$ em $(*)$ temos que $|\xi_k^n - a_k| < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq N_0$. Desde que $\xi_k^n \rightarrow a_k$ temos $(\xi_k^n) \in l_\infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, $|\xi_k^n| \leq M$ para algum $M > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, $|a_k| \leq |\xi_k^n| + |a_k - \xi_k^n| \leq M + \epsilon$, para todos $n \geq N_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Assim, $a \in l_\infty$, e já que $|\xi_k^n - a_k| < \epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k^n - a_k| < \epsilon$, para todo $n > N_0$. Portanto, $\|x_n - a\|_\infty < \epsilon$, para todo $n > N_0$ o que implica $x_n \rightarrow a$.

O resultado a seguir é importante para concluirmos que certos espaços do nosso estudo são Banach e sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 1. *Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é Banach se, e somente se, toda série em X absolutamente convergente é convergente.*

Seja $(x_n) \in \ell_1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, como $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, segue do teorema 1 que ℓ_1 é Banach.

Para toda $(x_n) \in C_0$ temos que x_n converge para zero, como toda sequência convergente é de Cauchy, então x_n é de Cauchy, assim C_0 é Banach.

Definição 2.5. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação*

$T : X \rightarrow Y$ é linear se $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T_x + \beta T_y$, para todos $x, y \in X$ e para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Teorema 2. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados e $T : X \rightarrow Y$ linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

I- T é limitada;

II- T é lipschitziana: existe $M > 0$ tal que $\|T_x - T_y\| \leq M\|x - y\|$, para todos $x, y \in X$;

III- T é contínua;

IV- T é contínua na origem.

Demonstração: Supondo T limitada, então existe $M > 0$ tal que

$$\|T_x - T_y\|_X = \|T(x - y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Logo, $I \Rightarrow II$. Se T é lipschitziana com constante M , então dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ e teremos

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|T_x - T_y\| \leq M\|x - y\| < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Logo, $II \Rightarrow III$. Agora é claro que $III \Rightarrow IV$. Resta ver que $IV \Rightarrow I$. De fato, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta$ implica $\|T_x\| < 1$. Assim, dado $x \in X$ com $\|x\| \neq 0$. Fazendo $y = \frac{\delta x}{2\|x\|}$ temos que:

$$\|y\| = \left\| \frac{\delta x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta \|x\|}{2\|x\|} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Logo, $\|y\| < \delta$ implica $\|T_y\| < 1$. Portanto,

$$\left\| T \left(\frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \right\| < 1 \Rightarrow \frac{\delta \|T(x)\|}{2\|x\|} < 1,$$

assim $\|x\| > \frac{\delta}{2}\|T_x\|$, para todo $x \in X$. Se $x \equiv 0$ então $\|x\| = M\|T_x\| = 0$, para todo $M \in \mathbb{K}$. Logo, T é limitada.

Denotaremos por $L(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y; T \text{ é linear}\}$ e por $\mathfrak{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y; T \text{ é linear e contínua}\}$. Quando $L(X, \mathbb{R}) = X^*$ é o chamado de dual algébrico de X e $\mathfrak{L}(X, \mathbb{R}) = X'$ representa o espaço dual topológico de X . E para $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$, definimos: $\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|T_x\|}{\|x\|}$.

Observação 2.1. $\mathfrak{L}(X, Y) \subset L(X, Y)$, mas nem toda aplicação linear é contínua.

Proposição 2.1. *Se f é um funcional linear limitado em um espaço normado X , então:*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in S_x\}$$

onde $S_x = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Demonstração: Ver [4], página 27.

Definição 2.6. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados e $T \in L(X, Y)$. Dizemos que T é limitada se existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|T_x\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Teorema 3. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Se $\dim(X) < \infty$ então $\mathfrak{L}(X, Y) = L(X, Y)$.*

Demonstração: Já sabemos que $\mathfrak{L}(X, Y) \subset L(X, Y)$. Agora se $\dim(X) < \infty$, tomando $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base de X , temos $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in X$. Então, dada $T \in L(X, Y)$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \|T_x\|_Y &= \left\| T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|T_{e_i}\|_Y \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|T_{e_i}\| \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \right) \\ &\leq c \|x\|_s. \end{aligned}$$

Como X tem dimensão finita então todas as normas em X são equivalentes. Logo, $\|T_x\| \leq c\|x\|_s \leq k\|x\|$, para todo $x \in X$. Portanto, $L(X, Y) \subset \mathfrak{L}(X, Y)$, como queríamos.

Em particular, se $\dim X < \infty$ tem-se $X' = X^*$.

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que $T \in L(X, Y)$ é um isomorfismo se T é bijetivo, diz-se que X e Y são isomorfos e denota-se $X \cong Y$. E dizemos que T é um isomorfismo topológico (ou homeomorfismo) se T é contínua, bijetiva e tem inversa contínua.*

Definição 2.8. Dizemos que $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ é um mergulho topológico se $X \simeq T(X)$.

Definição 2.9. Dizemos que $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ é um isomorfismo isométrico (isometria) se T é um isomorfismo topológico e $\|T_x\|_Y = \|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Teorema 4. Seja $T \in L(X, Y)$ sobrejetora. Então T é um mergulho topológico se, e somente se, existem constantes $b \geq a > 0$ tais que $a\|x\| \leq \|T_x\| \leq b\|x\|$, para todo $x \in X$.

Demonstração: $\Rightarrow$) Se T é um mergulho topológico, então $T(X) \simeq X$. Assim, T é contínua e T^{-1} é contínua, logo, existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|T_x\| &\leq b\|x\|, \forall x \in X \\ \|T_y^{-1}\| &\leq a\|y\|, \forall y \in Y = T(X), \text{ pois } T \text{ é sobrejetiva.} \end{aligned}$$

Assim,

$$\|T_y^{-1}\| = \|T^{-1}T_x\| = \|x\| \leq c\|T_x\|$$

portanto

$$\frac{1}{c}\|x\| \leq \|T_x\| \leq b\|x\|, \forall x \in X.$$

$\Leftarrow$) Por outro lado, a desigualdade $\|T_x\| \leq b\|x\|$ garante que T é contínua (pelo teorema 2). A desigualdade $a\|x\| \leq \|T_x\|$ nos diz que se $T_x = T_y$ então $a\|x - y\| \leq \|T_x - T_y\| = 0$ o que implica $\|x - y\| = 0$ e assim $x = y$, portanto T é injetiva. E por hipótese T é sobrejetora, então existe $T^{-1} : Y \rightarrow X$ e já que $a\|x\| \leq \|T_x\| \Leftrightarrow \|T_y^{-1}\| \leq a^{-1}\|y\|$, portanto T^{-1} é contínua.

Corolário 2.1. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial normado X são equivalentes se e somente se $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ é um isomorfismo topológico.

Teorema 5. Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ um isomorfismo topológico. Então X é Banach se, e somente se, Y o é.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha X Banach e tome $(y_n) \subset Y$ de Cauchy. Como $Y = T(X)$ então existe $x_n \in X$ tal que $y_n = T_{x_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_m - y_n\| < \epsilon$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$ e $T_{y_n}^{-1} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como T^{-1} é contínua temos que $\|x_m - x_n\| = \|T^{-1}(y_m - y_n)\| \leq \|T^{-1}\| \|y_m - y_n\| \leq M\epsilon$ para todos $m, n \geq n_0$, portanto, (x_n) é de Cauchy em X ,

logo, $x_n \rightarrow x \in X$. Como T é contínua, $T_{x_n} \rightarrow T_x \in Y$ o que implicada Y Banach. ($\Leftarrow$) analogamente.

Na última seção iremos mostrar que o espaço dual de ℓ_1 é isométrico ao espaço ℓ_∞ , visando isto definimos.

Definição 2.10. *Uma base de Schauder de um espaço normado X é um conjunto de vetores $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ satisfazendo para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares (α_n) tal que*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Na demonstração do Teorema de Hahn-Banach utilizaremos o seguinte lema que pode ser encontrado em [5].

Lema 2.1. Lema de Zorn: *Se $X \neq \emptyset$ é um conjunto parcialmente ordenado em que toda cadeia possui cota superior então X possui elemento maximal.*

2.3 O Teorema de Hahn-Banach

Para um espaço normado arbitrário X , não se pode, a partir das informações que dispomos até aqui, nem se quer afirmar se no dual topológico X' existe algum funcional não nulo. Se X tiver dimensão infinita a existência de um funcional $f \in X'$, $f \neq 0$ apenas pode ser garantida usando o conceito de base de Hamel. Este conceito também nos permitiu demonstrar que se $X' = X^*$, então $\dim(X) < \infty$, mas para termos informações sobre a existência de elementos não nulos em X^* , a ferramenta a ser usada será o Teorema de Hahn-Banach, esse problema está estreitamente relacionado ao problema da extensão de funcionais lineares.

Definição 2.11. *Seja X um espaço vetorial real. Um funcional sublinear sobre X é uma aplicação $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$;
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.

É fácil ver que se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, então f é sublinear. A aplicação $p(x) = \|x\|$ é também sublinear num espaço vetorial normado X . Outros outros exemplos podem ser encontrados em [1].

Teorema 6. *(Teorema de Hahn-Banach, forma analítica real) Seja X um espaço vetorial real, com um funcional sublinear p definido em X . Suponha que $S \subseteq X$ e $g \in S^*$ satisfaz $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in S$. Então g tem uma extensão f em X tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Considere o conjunto

$$\tau = \left\{ \begin{array}{l} (W, h); W \subseteq X \text{ com } S \subset W \\ h \in W^*, \text{ com } h|_S \equiv g \text{ e } h(x) \leq p(x), \forall x \in W \end{array} \right\}$$

Assim, $\tau \neq \emptyset$ pois $(S, g) \in \tau$. Definimos em τ a seguinte relação de ordem parcial

$$(W_1, h_1) \leq (W_2, h_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_1 \subset W_2 \\ h_2|_{W_1} \equiv h_1 \end{array} \right. .$$

Seja $\mathfrak{C}$ uma cadeia em τ , tal que $\mathfrak{C} = \{(W_\alpha, h_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ (totalmente ordenado). Vamos mostrar que $\mathfrak{C}$ possui cota superior em X . De fato, seja $W = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha$ e

$$\begin{aligned} h : W &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = h_\alpha(x) \text{ se } x \in W_\alpha. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{C}$ é totalmente ordenado e cada W_α contém S temos que $(W, h) \in \tau$. Além disso, $(W_\alpha, h_\alpha) \leq (W, h)$, para todo $\alpha \in \Lambda$, e assim, (W, h) é cota superior de $\mathfrak{C}$ em τ . Portanto, pelo Lema de Zorn (ver lema 2.2) o conjunto τ possui um elemento maximal (F, f) . Afirmamos que $F = X$, pois caso contrário existiria $x_0 \in X \setminus F$ e tomando $\tilde{F} = F \oplus [x_0]$. Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \tilde{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = z + tx_0 &\mapsto \tilde{f}(z + tx_0) = f(z) + t\beta, \end{aligned}$$

onde β será escolhido de modo que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in \tilde{F}$. Se tal valor de β existe então:

$$\left. \begin{array}{l} F \subset \tilde{F} \\ \tilde{f}|_F = f \end{array} \right\} \Rightarrow (F, f) \leq (\tilde{F}, \tilde{f})$$

Absurdo, pois (F, f) é maximal de τ .

Note que a existência do β está garantida pois:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &\leq p(x), \quad \forall x \in \tilde{F} \\ \Leftrightarrow \tilde{f}(z + tx_0) &\leq p(z + tx_0), \quad \forall z \in F, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow f(z) + t\beta &\leq p(z + tx_0)\end{aligned}$$

Assim, para $t > 0$, $t[f(\frac{z}{t}) + \beta] \leq tp(\frac{z}{t} + x_0)$ temos $f(w) + \beta \leq p(w + x_0)$, para todo $w \in F$ e para $t < 0$, $-t[f(\frac{z}{-t}) - \beta] \leq -tp(\frac{z}{-t} - x_0)$ teremos $f(y) - \beta \leq p(y - x_0)$, para todo $y \in F$. Logo, isolando β das desigualdades a cima, obtemos $-p(y - x_0) + f(y) \leq \beta \leq p(w + x_0) - f(w)$, para todos $w, y \in F$, o que equivale a $\sup_{y \in F} \{-p(y - x_0) + f(y)\} \leq \beta \leq \inf_{w \in F} \{p(w + x_0) - f(w)\}$.

Resta garantir que $\sup_{y \in F} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{w \in F} \{p(w + x_0) - f(w)\}$. De fato, $f(w + y) \leq p(w + y) = p(w + y + x_0 - x_0) \leq p(w + x_0) + p(y - x_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}f(w) + f(y) &\leq p(w + x_0) + p(y - x_0) \\ f(y) - p(y - x_0) &\leq p(w + x_0) - f(w), \quad \forall y, w \in F.\end{aligned}$$

E assim, existe $\beta \in [\sup_{y \in F} \{f(y) - p(y - x_0)\}, \inf_{w \in F} \{p(w + x_0) - f(w)\}]$. O que conclui a demonstração do teorema.

A extensão não é única, veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2. *Seja o espaço vetorial real $X = \mathbb{R}^3$, com um funcional sub-linear dado por $p(x, y, z) = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tomando o subespaço $S = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ e $g \in S^*$, definido como $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada como $g(x, y, 0) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, então:*

$$\begin{aligned}g(x, y, 0) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) (x, y, 0) \\ &\leq \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right\| \|(x, y, 0)\| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2}.\end{aligned}$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha^2 < \frac{1}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}f_\alpha : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \alpha z.\end{aligned}$$

Assim, $f_\alpha|_S \equiv g$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(x, y, z) \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \alpha^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = p(x, y, z).$$

Os três próximos corolários são importantes na demonstração do principal corolário do trabalho e suas demonstrações podem ser encontradas em [4].

Corolário 2.2. *Seja S um subespaço de um espaço normado X . Suponhamos que $g \in S'$. Então, existe um funcional $f \in X'$ tal que $f|_S \equiv g$ e $\|f\|_{X'} = \|g\|_{S'}$.*

Corolário 2.3. *Sejam X um espaço vetorial normado e $x_0 \in X$. Então, existe $f_0 \in X'$ tal que $\|f_0\| = \|x_0\|$ e $f_0(x_0) = \|x_0\|^2$.*

Corolário 2.4. *Seja X um espaço vetorial normado, então para todo $x \in X$ tem-se*

$$\|x\| = \max_{f \in X', \|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

Segue do corolário 2.4 que para todo $x \in X \setminus \{0\}$, existe $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$ e $\|f(x)\| = \|x\|$.

Corolário 2.5. *Se X é um espaço de Banach infinito dimensional então X' é infinito dimensional.*

Demonstração: Suponha o contrário, que X' é finito-dimensional, digamos $\dim(X') = n$. Sejam $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ uma base para X' , e defina $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ pondo $\phi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Claramente tem-se que ϕ é linear. Afirmamos que ϕ é injetiva. De fato, suponha que $\phi(x) = 0$. Então, $x \in \bigcap \text{Ker}(f_i)$. Como todo funcional em X' é combinação linear dos f_i 's, segue-se que $f(x) = 0$ para todo $f \in X'$. Se fosse $x \neq 0$, então pelo corolário anterior concluímos que $f(x) = \|x\| \neq 0$ para algum $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$. Contradição.

2.4 Decisão Sobre a Infinitude da Dimensão de Espaços Vetoriais

Nesta seção voltaremos nossa atenção a decidir sobre a dimensão de espaços vetoriais. Então, como saber se os espaços $\mathbb{R}[t]$, ℓ , ℓ_0 , ℓ_1 , ℓ_∞ e C_0 possuem dimensão

finita ou infinita? Como sabemos do curso de Álgebra Linear Elementar, o conjunto $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ é uma base (de Hamel) para o espaço vetorial $\mathbb{R}[t]$. E quanto aos demais?

Mostremos que $\ell_0 \cong \mathbb{R}[t]$. Com efeito, seja $T : \mathbb{R}[t] \rightarrow \ell_0$ uma transformação dada por

$$T(p(t)) = T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = (x_n).$$

Assim, T é linear, pois dados os polinômios $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m$, e seja α um escalar, logo se $m > n$:

$$p(t) + \alpha q(t) = (a_0 + \alpha b_0) + (a_1 + \alpha b_1)t + (a_2 + \alpha b_2)t^2 + \dots + (a_n + \alpha b_n)t^n + \alpha b_{n+1}t^{n+1} + \dots + \alpha b_mt^m$$

onde

$$\begin{aligned} T(p(t) + \alpha q(t)) &= (a_0 + \alpha b_0, a_1 + \alpha b_1, a_2 + \alpha b_2, \dots, a_n + \alpha b_n, \alpha b_{n+1}, \dots, \alpha b_m, 0, 0, \dots) \\ &= (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) + \alpha(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_m, 0, 0, \dots) \\ &= T(p(t)) + \alpha T(q(t)). \end{aligned}$$

T é injetiva, pois para quaisquer $p(t) \neq q(t) \in \mathbb{R}[t]$, temos que $a_n, b_m \neq 0$, logo, se $n = m$, como $p(t) \neq q(t)$ então para algum $i = 1, \dots, n$ tem-se $a_i \neq b_i$, assim

$$T(p(t)) = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \neq (b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_n, 0, 0, \dots) = T(q(t)).$$

Se $n < m$, então para todo $i > n$ implica $a_i = 0$, assim,

$$T(p(t)) = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \neq (b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_n, \dots, b_m, 0, 0, \dots) = T(q(t)).$$

Logo, T é injetiva. T é sobrejetiva, pois se $(x_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma sequência de ℓ_0 , então existem apenas finitos $a_i \neq 0$, digamos que seja m esse número de índices, assim, a cada $a_i \neq 0$ conseguimos associar um polinômio do tipo $a_it^i \in \mathbb{R}[t]$ tal que $T(a_it^i) = (0, \dots, a_i, 0, \dots)$, ou seja o polinômio $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$, com $n \geq m$ terá como imagem a sequência (x_n) , assim, toda sequência $(x_n) \in \ell_0$ é imagem pela T de algum polinômio em $\mathbb{R}[t]$.

Dessa forma concluímos que $\dim(\ell_0) = \infty$, já que $\ell_0 \cong \mathbb{R}[t]$ e $\dim(\mathbb{R}[t]) = \infty$.

Agora usando o conceito de Base de Schauder dado na definição 2.10, mostremos que $(\ell_1)' \cong \ell_\infty$. De fato, sabemos que o conjunto $\ell_1 = \{x = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in$

$\ell; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty$ }, definimos em ℓ_1 a seguinte norma $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ e o conjunto $\ell_{\infty} = \{y = (y_n) = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell_{\infty}; |y_j| < c_y, c_y \in \mathbb{R}\}$, a norma definida nesse espaço é dada por $\|y\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j|$. Uma base de Schauder para ℓ_1 é dada por $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ e assim sucessivamente. Cada $x \in \ell_1$ pode ser representado de forma única como combinação linear dos vetores da base, ou seja, $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Seja $f \in (\ell_1)'$, ou seja, f é linear e limitada. E mais, para todo funcional f e $x \in \ell_1$ tem-se

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \gamma_j, \quad (2.1)$$

onde $\gamma_j = f(e_j)$. Definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T : (\ell_1)' &\rightarrow \ell_{\infty} \\ f &\mapsto \gamma_j = f(e_j), j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Observemos que T está bem definida, $T(f)$ é única pois o funcional f é unicamente determinado pelos vetores da base, além disso, como f é linear e limitado e $\|e_j\| = 1$, então $|\gamma_j| = |f(e_j)| \leq \|f\| \|e_j\| = \|f\|$, assim considerando o supremo desta desigualdade, obtemos:

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\gamma_j| = \sup |f(e_1), f(e_2), \dots| \leq \|f\|,$$

ou seja,

$$\|T(f)\| \leq \|f\|. \quad (2.2)$$

Logo, $\gamma_j \in \ell_{\infty}$, isto é $T(f) \in \ell_{\infty}$. T é linear, pois para quaisquer $f, g \in (\ell_1)'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g) &= ((\alpha f + g)(e_1), (\alpha f + g)(e_2), \dots, (\alpha f + g)(e_n), \dots) \\ &= ((\alpha f(e_1) + g(e_1), \alpha f(e_2) + g(e_2), \dots, \alpha f(e_n) + g(e_n), \dots) \\ &= \alpha(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n), \dots) + (g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n), \dots) \\ &= \alpha T(f) + T(g). \end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $y = (y_j) \in \ell_{\infty}$ pode-se obter um funcional linear limitado $g \in \ell_1$ tal que $T(g) = y$. De fato, definindo $g \in \ell_1$ por $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$, onde

$x = (x_j) \in \ell_1$, então g é linear, pois

$$\begin{aligned} g(\alpha x + z) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha x_j + z_j) y_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha x_j y_j + z_j y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha x_j y_j + \sum_{j=1}^{\infty} z_j y_j \\ &= \alpha g(x) + g(z) \end{aligned}$$

onde, $z = (z_j) \in \ell_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, e sua limitação segue do fato de que

$$|g(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j| \|x\| = \|y\| \|x\|.$$

Portanto, $g \in (\ell_1)'$ ou seja, T é sobrejetora. Agora, resta mostrar que T preserva norma. De 2.1, obtem-se

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \gamma_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| |\gamma_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\gamma_j| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|T(f)\| \|x\|.$$

Considerando o supremo sobre todo x de norma 1, a desigualdade acima resulta em

$$\|f\| \leq \|T(f)\|. \quad (2.3)$$

Portanto, de 2.2 e 2.3 segue que

$$\|T(f)\| = \|f\|.$$

Agora, $\|T(f)\| = \|f\| = 0$ implica $f = 0$, ou seja, T é injetora. Por fim, como T é bijetora e preserva a norma, segue que $T : (\ell_1)' \rightarrow \ell_{\infty}$ é um isomorfismo isométrico e $(\ell_1)' \cong \ell_{\infty}$, de onde conclui-se que estes tem mesma dimensão.

Por outro lado, podemos mostrar que $(C_0)'$ é isométrico a ℓ_1 . De fato, definimos a aplicação $T : C_0' \rightarrow \ell_1$ como sendo $T(f) = (f(e_i))$, onde $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$. T é linear pois as $f \in C_0'$ são lineares. Vamos mostrar que T é limitada, pois assim pelo

teorema 2, T será contínua. Com efeito, se $f \in C'_0$ definimos uma sequência $\{x^n\}$ em C_0 dada por:

$$x^n = (\text{sign}(a_1), \text{sign}(a_2), \dots, \text{sign}(a_n), 0, 0, \dots) = \sum_{i=1}^n \text{sign}(a_i) e_i$$

onde $a_i = f(e_i)$ e $\text{sign}(a_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_i \geq 0 \\ -1, & \text{se } a_i < 0 \end{cases}$. Observe que:

$$f(x^n) = f\left(\sum_{i=1}^n \text{sign}(a_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{sign}(a_i) f(e_i) = \sum_{i=1}^n |a_i|$$

e a norma que vamos utilizar em C_0 é a norma do máximo, portanto $\|x^n\|_{C_0} = 1$ para todo n . Logo:

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = f(x^n) \leq \|f\|_{C'_0} \|x^n\|_{C_0} = \|f\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

e por outro lado, $\|T(f)\|_{\ell_1} = \|f(e_i)\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^n |a_i|$ ou seja, $\|T(f)\|_{\ell_1} \leq \|f\|_{C'_0}$ (I), assim T é contínua. Agora, como f é linear e limitada no espaço normado C_0 , então pela proposição 2.1 e pela definição de supremo, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in C_0$ com $\|x_\epsilon\| = 1$ tal que

$$\|f\|_{C'_0} - \epsilon \leq |f(x_\epsilon)|.$$

Construindo agora uma nova sequência como sendo $u_\epsilon^n = \sum x_\epsilon^i e_i$, temos que

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon - u_\epsilon^n\|_{C_0} &= \|(x_\epsilon^1, x_\epsilon^2, \dots, x_\epsilon^n, x_\epsilon^{n+1}, \dots) - (x_\epsilon^1, x_\epsilon^2, \dots, x_\epsilon^n, 0, \dots)\|_{C_0} \\ &= \|(0, 0, \dots, 0, x_\epsilon^{n+1}, x_\epsilon^{n+2}, \dots)\|_{C_0} \\ &= \sup_{i \geq n+1} |x_\epsilon^i| \end{aligned}$$

como $x_\epsilon \in C_0$ então $x_\epsilon \rightarrow 0$, logo $\sup_{i \geq n+1} |x_\epsilon^i| \rightarrow 0$. Assim, $|f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| \rightarrow 0$, portanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{C'_0} - \epsilon &\leq |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + |f(u_\epsilon^n)| \\ &\leq |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + \sum_{i=1}^n |x_\epsilon^i| |a_i| \\ &\leq |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + \sum_{i=1}^n |a_i| \\ &= |f(x_\epsilon) - f(u_\epsilon^n)| + \|T(f)\|_{\ell_1}. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e depois $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos $\|f\|_{C_0} \leq \|T(f)\|_{\ell_1}$ (II), logo, de (I) e (II) concluímos que a T preserva a norma. Resta agora mostrar que T é sobrejetora. Seja $y = (\alpha_n) \in \ell_1$ qualquer. Defina $f : C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \alpha_n$, f está bem definida, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \alpha_n$ converge pelo critério de Dirichlet para séries, logo esse somatório é finito e portanto f é limitada ou seja, $f \in C'_0$. Agora, note que $f(e_i) = \alpha_i$, Portanto, $T(f) = (f(e_i)) = (\alpha_i) = y$. Isso conclui a demonstração.

Desde que, $\ell_0 \subseteq \ell$ logo $\dim(\ell) = \infty$, assim como, $\ell_0 \subset \ell_\infty$ então $\dim(\ell_\infty) = \infty$. Agora o que podemos concluir sobre a dimensão dos espaços ℓ_1 e C_0 ? Pelo que vimos acima que $(\ell_1)' \cong \ell_\infty$ (ℓ_∞ é o dual topológico do ℓ_1) e $(C_0)' \cong \ell_1$ (ℓ_1 é o dual topológico do C_0). Logo, como ℓ_1 e C_0 são Banach segue do Corolário 2.5 que como $(\ell_1)' \cong \ell_\infty$ e já que $\dim(\ell_\infty) = \infty$ então $\dim(\ell_1) = \infty$. E desde que, $(C_0)' \cong \ell_1$, como $\dim(\ell_1) = \infty$ também concluímos que $\dim(C_0) = \infty$.

Através do Corolário 2.5 do Teorema de Hahn-Banach conseguimos verificar que os espaços ℓ_1 e C_0 tem dimensão infinita, sem ser necessário exibir bases para os mesmos. Logo, tal teorema torna-se uma ferramenta importante quando o assunto é discutir a dimensão de um espaço. Mas é importante ressaltar que esta é apenas uma das aplicações deste importante Teorema.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Brezis: Analyse fonctionnelle - théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [2] Moura, Carlos A.: Análise Funcional e aplicações, Rio de Janeiro, Brasil, 1978.
- [3] R.G Bartle. The Elements of Integrantion. John Wiley Sons, 1966.
- [4] Barroso, Cleon S.: Análise Funcional: Uma introdução, Universidade Federal do Ceará, EMALCA DA AMAZÔNIA, Brasil, 2009.
- [5] Santos, José Carlos de S. O.: Introdução à Análise Funcional, Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Portugal, 2000.
- [6] <http://www.mat.ufmg.br/~hamilton/Ver%E3o/Cap1.pDef>, visto em: 08/04/2017, 11:30.
- [7] <https://www.ime.usp.br/~leonardo/notas.pDef>, visto em: 08/04/2017, 11:33.
- [8] Hoffman, K., e Kunze, R. Álgebra Linear. 2ª ed. Livros Técnicos e Científicos, 1971.

Capítulo 3

Relações de Recorrência e Convergência - Marcel Bertolini

Resumo 3.1. *Em uma abordagem informal, exploramos relações de recorrência, as sequências por elas produzidas, e algumas maneiras de visualizá-las e de estabelecer suas convergências. Utilizando o método babilônico de extração de raízes como exemplo-guia, falamos do completamento do conjunto de números racionais, de análise gráfica de sistemas dinâmicos iterados, do método de Newton, de maneiras de acrescentar pontos no infinito na reta e no plano, e de sistemas dinâmicos na esfera de Riemann. O texto inclui comentários críticos a respeito daquilo que está sendo feito, pontuados com notas históricas a respeito do desenvolvimento dos conceitos.*

Palavras-chave: relações de recorrência, sistemas dinâmicos, projeção estereográfica.

3.1 Introdução

Infinito, infinidade, infinitamente... Noções como essas fascinam a muitos, se não a todos, que as encontram. Desafios de “quem consegue falar o maior número?”, reflexões a respeito da imensidão do universo e a natureza de seus componentes menores, contemplações sobre a eternidade, o passado remoto, o futuro longínquo, e a continuidade do passar do tempo. São esses alguns dos (infindáveis?)

caminhos que se cruzam naquilo que chamamos de o infinito. A própria maneira de se falar já é instigante: é “o” infinito mesmo? Ou seriam “um” infinito, entendendo-se que há um “outro”? Colocamos essas perguntas apenas como provocações iniciais. Tentativas de se conciliar diferentes percepções do infinito parecem logo de cara esbarrar em seu caráter auto-referente – basta ver as palavras que acabamos usando ao falar dele.

Nos concentraremos em traçar relações entre diversas manifestações do infinito na matemática, que com ele mantém relação de longa data. Investigações dos pioneiros gregos revelam características “infinitárias” de objetos básicos de sua matemática, exibindo e nos ensinando a domar seus aspectos paradoxais. Suas considerações, traduzidas e retraduzidas a milênios, inspiram os mais diversos desenvolvimentos da matemática até o presente. Arriscamos afirmar: a matemática muito se ocupa em manter seus infinitos sob controle.

Nosso ponto de partida é o chamado método babilônico de extração de raízes quadradas. Veremos também como ele não é um acidente, pertecendo na verdade a todo um mundo de máquinas semelhantes. Exploraremos também aproximações de π . Uma vez que tivermos falado daquilo que está “tão próximo quanto se quiser”, falaremos do que está “tão longe quanto se deseja”, e da semelhança entre essas duas noções. Apresentaremos, por exemplo, a projeção estereográfica. Veremos então o que se torna possível a partir daí, como um convite ao estudo de certos sistemas dinâmicos.

O fio condutor de nossa exposição é o conceito de relação de recursão e muito do que faremos trata de se passar ao limite as sequências por elas produzidas. Aos leitores mais adiantados, que não se assustarem com essas palavras, já antecipamos que o conteúdo a seguir se resume a: completamento e compactificação. Uma série de afirmações serão deixadas como exercício, ainda que isso não seja mencionado explicitamente – encorajamos o preenchimento das lacunas deixadas nos argumentos. Mas alertamos que os pré-requisitos para tanto são variados, sendo natural que nem tudo saia logo de primeira.

Naturalmente, o material aqui exposto não é novo, sendo este um trabalho de divulgação no qual se fez a opção de fornecer uma quantidade moderada de detalhamento matemático. As Seções não são auto-contidas, e um estudo aprofundado dos tópicos deverá se aproveitar de outras referências. Procuramos sugerir algu-

mas. O que esperamos é que a maneira como os tópicos estão aqui costurados estimule a curiosidade e o interesse dos leitores, servindo como apenas um ponto de partida para outras investigações.

3.2 Infinitamente próximo

Veremos exemplos concretos que ilustram o que significa uma sequência de números poder ser feita tão próxima quanto se quiser de “alguma coisa”. Nos ocuparemos de sequências produzidas por métodos recursivos, que são dados através de relações de recorrência. Basicamente, uma relação de recorrência é uma máquina de processamento cuja saída está ligada diretamente na entrada, de modo que uma entrada inicial é processada, e reprocessada, e rereprocessada, e assim por diante.

Após repassarmos na Seção 3.2.1 a questão da incomensurabilidade entre segmentos na geometria plana, veremos na Seção 3.2.2 a máquina babilônica que fornece sequências de números racionais que aproximam $\sqrt{2}$ tão bem quanto se quiser. Nas Seções 3.2.3 e 3.2.4 mostramos que esse método não é um mero acidente, exibindo-o como um caso particular de categorias bastante mais amplas de máquinas. Encerramos então com a Seção 3.2.5, onde descrevemos a máquina de Arquimedes empregada para se produzir π .

3.2.1 O lado e a diagonal de um quadrado

É de amplo conhecimento que a diagonal de um quadrado não é comensurável com o seu lado. Em termos concretos, para cada número natural q , subdivida o lado em q subsegmentos de uma mesma magnitude ℓ_q , e observe que não há um número natural p tal que $\alpha = p\ell_q$, onde α é a magnitude da diagonal. Sempre falta ou sobra. Tal construção pode ser realizada com régua e compasso e, na medida em que se aumenta o número q , reduzindo portanto ℓ_q , fica-se com a sensação de que diminui o tanto que falta ou sobra. Quaisquer que sejam os instrumentos utilizados para desenhar a figura, e o capricho de seu realizador, para algum q e p não seremos mais capazes de enxergar se há ou não diferença entre α e $p\ell_q$. Mas, sim, há: um argumento geométrico clássico demonstra que não existem números naturais q e p tais que $\alpha = p\ell_q$. Ainda que $p\ell_q$ e α possam ser feitos tão próximos

quanto se quiser, sempre $\alpha \neq p\ell_q$.

O reconhecimento desta distinção entre “aproximadamente igual” e “igual” é de importância fundamental. Note que, em particular, imaginar que o lado do quadrado e a diagonal são constituídos por quantidades finitas de “átomos” resulta em uma contradição e, em respeito ao princípio lógico da não-contradição, somos obrigados a imaginar que eles são constituídos por alguma outra coisa, ou então a não especular a respeito de sua constituição, nos contentando com saber quais regras eles obedecem.

Mas voltemos ao problema de se medir a diagonal de um quadrado com seu lado. Algebricamente, assumindo que o lado é unitário, o Teorema de Pitágoras implica que $\alpha^2 = 2$ e, uma vez que $\ell_q = 1/q$, conclui-se que não existem números naturais q e p tais que $\alpha = p/q$, ainda que existam naturais q e p tais que q/p é tão próximo quanto se quiser de α . Veremos a seguir como calcular tais q e p . Para dar mais precisão à discussão, falaremos em sequências de números naturais, que serão denotadas aqui como q_k e p_k , com k variando nos números naturais. Denotaremos a sequência de quocientes por $a_k = p_k/q_k$ e, estudaremos sequências a_k de número racionais, deixando implícitas as sequências q_k e p_k de seus denominadores e numeradores.

3.2.2 Método babilônico de extração de raízes quadradas

O *método babilônico de extração de raízes quadradas* é um método recursivo, de aproximações sucessivas, dado por uma relação de recorrência cuja motivação é a seguinte: para qualquer $a > 0$,

$$a^2 < 2 \iff \left(\frac{2}{a}\right)^2 \quad \text{e} \quad 2 < a^2 \iff \left(\frac{2}{a}\right)^2 < 2. \quad (3.1)$$

Assim, para qualquer $a > 0$ tal que $a^2 \neq 2$, espera-se que o quadrado da média aritmética de a e $2/a$ esteja mais próximo de 2 do que os quadrados de a e $2/a$. Partindo dessa heurística, definimos, para cada *chute inicial* $a_0 \neq 0$, a sequência a_k , $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{2}{a_k} \right). \quad (3.2)$$

Por exemplo, considere o chute inicial $a_0 = 1$, e $2/a_0 = 2$. Temos que $a_0^2 =$

1, enquanto que $(2/a_0)^2 = 4$, em conformidade com (3.1). Tomando a média aritmética de a_0 e $2/a_0$, obtemos $a_1 = 3/2$ e $2/a_1 = 4/3$, ou seja, $a_1^2 = 9/4$, enquanto que $(2/a_1)^2 = 16/9$. Daí, calculamos $a_2 = 17/12$ e $2/a_2 = 24/17$, cujos quadrados são $a_2^2 = 289/144$ e $(2/a_2)^2 = 576/289$. E assim por diante. Reunimos na Tabela 3.1 os primeiros valores de a_k e $2/a_k$, bem como os valores absolutos de suas diferenças, das diferenças de seus quadrados, e dos quadrados de a_k . Escrevemos as quantidades como expressões decimais, mas enfatizamos que a equação (3.2) e seus resultados nada tem que ver com a maneira particular que elegemos para escrever nossos números.

Tabela 3.1: Método babilônico de aproximação da raiz quadrada de 2 com chute inicial igual a 1.

k	a_k	$2/a_k$	$ a_k - 2/a_k $	$ a_k^2 - (2/a_k)^2 $	a_k^2
1	1	2	1	3	1
2	1,5	1,33333333333333	0,16666666666666	0,47222222222222	2,25
3	1,41666666666666	1,4117647058823	0,0049019607843	0,0138648596693	2,00694444444444
4	1,4142156862745	1,4142114384748	0,0000004247799	0,0000012014591	2,0000060073048
5	1,4142135623746	1,4142135623715	0,0000000000031	0,0000000000902	2,0000000000045
6	1,4142135623731	1,4142135623731	0	0	2,0000000000000

Nossos valores foram truncados na 13ª casa decimal. Note que, se a_0 é um número racional, então a_k e $2/a_k$ são números racionais para todo $k \geq 0$ e, portanto, os valores finais da tabela definitivamente não são exatos. Fica claro que, enquanto a_k^2 parece ficar arbitrariamente próximo de 2, os números racionais a_k e $2/a_k$ parecem ficar arbitrariamente próximos um do outro. Vejamos que não apenas parece, mas que realmente ficam. Verifique que, para qualquer $a > 0$:

$$\left| \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right) - \frac{2}{\frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| a - \frac{2}{a} \right| \quad (3.3)$$

Daí, por indução finita, para qualquer $a_0 > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| a_k - \frac{2}{a_k} \right| \leq \frac{1}{2^k} \left| a_0 - \frac{2}{a_0} \right| \quad (3.4)$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_k - \frac{2}{a_k} \right| = 0. \quad (3.5)$$

Na terminologia da Análise Real, os intervalos com extremidades a_k e $2/a_k$ constituem uma sequência de *intervalos encaixantes*. Essas sequências de números racionais parecem estar cercado “alguma coisa”, conforme fica claro na motivação geométrica do problema descrita na Seção 3.2.1. Entretanto, essa coisa não é um número racional pois, chamando-a de α , temos:

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{a_k} \quad (3.6)$$

E, conseqüentemente,

$$\alpha^2 = \alpha \alpha = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{a_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \frac{2}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 = 2. \quad (3.7)$$

Concluimos então que o método babilônico fornece sequências a_k e $2/a_k$ de números racionais cujos limites, ambos iguais a α , não é um número racional. O processo de acrescentar ao conjunto dos números racionais esses “limites ideais” é conhecido como *completamento*, e desse processo resulta o conjunto dos números reais. Ao se imaginar os números racionais sobre uma reta da geometria clássica, os pontos da reta que os separam são assim identificados, como números *irracionais*. Uma vez que sabemos “calcular” alguns desses números irracionais, é interessante colocar em questão a *computabilidade* dos demais. Mas isso é uma outra história.

Destacamos que o fator $1/2^k$ na inequação (3.4) é o que explica a velocidade de convergência do método babilônico, chamada de *quadrática*. Além disso, não há nada de especial com o número 2, que pode ser trocado nas fórmulas por qualquer outro número. Estimulamos o leitor a construir tabelas semelhantes à Tabela 1 para aproximar as raízes quadradas de outros números. O que acontece se 2 é trocado por um número negativo? E por um número complexo?

3.2.3 Sistemas Dinâmicos

A relação de recursão definida por (3.2) é um caso particular de relações da forma:

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (3.8)$$

onde f é uma função cujo domínio e contra-domínio são um mesmo conjunto X , e a sequência $x_k \in X$ fica definida para todo $k \in \mathbb{N}$ uma vez que seja escolhido um $x_0 \in X$ qualquer (o “chute inicial”).

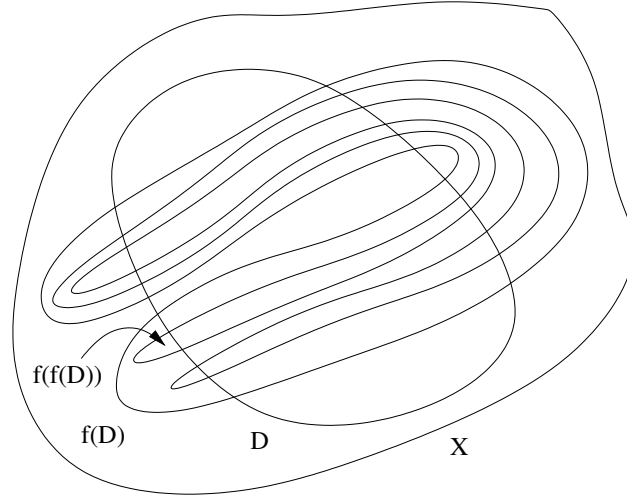


Figura 3.1: Um conjunto X que é o domínio e contra-domínio de uma função f . Destacamos um subconjunto $D \subset X$, e suas primeira e segunda imagens por f , isto é, $f(D)$ e $f(f(D))$. Precisamente esse comportamento é exibido pelo sistema dinâmico conhecido como *ferradura de Smale*.

Para cada x_0 , a equação (3.8) define $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0)) = f \circ f(x_0)$, $x_3 = f(f(f(x_0))) = f \circ f \circ f(x_0)$ e, em geral, denotamos $x_k = f^k(x_0)$, entendendo que f^k é a composição de f consigo mesma k vezes. Existe aqui uma analogia com a potenciação, entretanto $f^k(x_0)$ não deve ser confundido com $(f(x_0))^k$ – as definições acima se aplicam não exigem que X possua uma estrutura algébrica, de modo que “elevar um elemento de X a k -ésima potência” pode até mesmo nem estar definido. Indicamos na Figura 3.1 um exemplo nesse grau de abstração.

O processo de se aplicar f repetidamente é chamado de *iteração de f* , sendo f^k sua k -ésima *iterada*. Esse tipo de construção é chamada de *sistema dinâmico iterado*. Em certos contextos, os elementos de X são *estados* de um sistema e f é sua lei de evolução, isto é, a *transformação* que, a cada estado x , associa o estado $f(x)$ que dele resultará após a passagem de uma unidade de tempo. Por isso, também se fala em *sistema dinâmico com tempo discreto* para se referir a relações de recorrência como (3.8). Por exemplo, X pode ser o conjunto de números de membros de uma população biológica, sujeita aos seus nascimentos e mortes; ou o montante de dinheiro que evolui de acordo com algum regime de capitalização (nesse caso as forma particulares de (3.8) são estudadas em Matemática Finan-

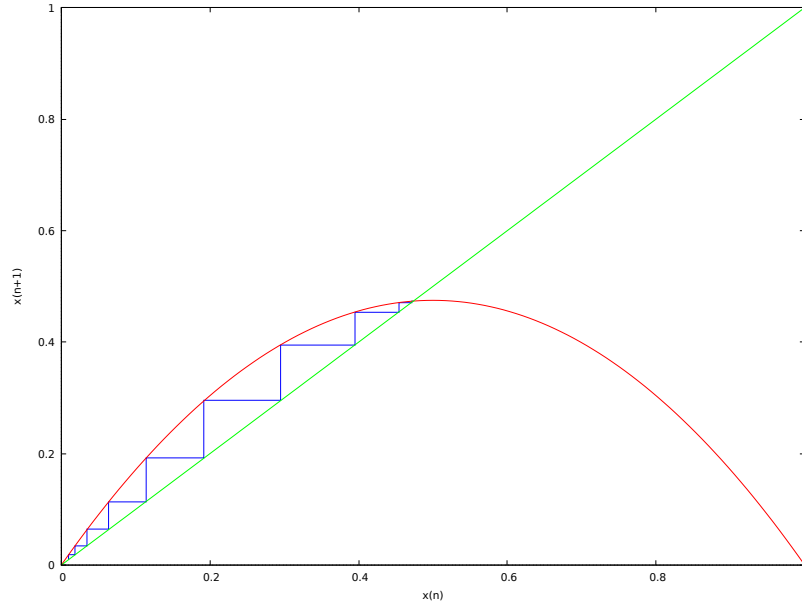


Figura 3.2: Análise gráfica da iteração da função quadrática $f(x) = 2.9x(1 - x)$, com $x_0 = 0.01$.

ceira). Com um pouco de criatividade, não é difícil imaginar sistemas bastante mais complicados do que esses, ainda que apenas em linhas gerais. O estudo geral das iterações constitui um dos segmentos da área de Sistemas Dinâmicos, da qual citamos as introduções [?, ?, ?].

Aqui nos aproveitaremos somente de um pequeno componente da teoria, conhecido como *análise gráfica*. As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 desta Seção foram produzidas através do software *Maxima*, seguindo as instruções de [?]. Recomendamos fortemente que o leitor interessado produza suas próprias figuras e realize experimentos semelhantes.

Quando f é uma função real a consideração do par de gráficos $y = x$ e $y = f(x)$ abre a possibilidade associarmos às sequências x_k definidas por (3.8) caminhos poligonais do plano como na Figura 3.2, produzida da seguinte maneira: para cada chute inicial x_0 , o ponto (x_0, x_0) é conectado por um segmento de reta vertical a $(x_0, f(x_0))$, que por sua vez é conectado por um segmento de reta horizontal ao ponto $(f(x_0), f(x_0))$ pertencente à diagonal. A reta vertical que passa por este ponto encontra o gráfico $y = f(x)$ exatamente no ponto $(f(x_0), f^2(x_0))$, e traça-se o segmento de reta vertical conectando esses pontos. A seguir, $(f(x_0), f^2(x_0))$ é

conectado por um segmento horizontal a $(f^2(x_0), f^2(x_0))$, que é conectado por um segmento de reta vertical a $(f^2(x_0), f^3(x_0))$, e assim por diante. Resumindo, a regra é: andar até o gráfico verticalmente, até a diagonal horizontalmente, e assim sucessivamente. Note que, no caso da Figura 3.2, o caminho poligonal foi atraído pela intersecção do gráfico $y = f(x)$ com a diagonal $y = x$.

Em geral, uma solução da equação $x = f(x)$ é chamada de *ponto fixo* de f . Tais pontos correspondem a estados de equilíbrio de um sistema, aqueles que não se modificam com a passagem do tempo. Quando f é uma função real, graficamente, as soluções dessa equação são as abscissas das intersecções do gráfico $y = f(x)$ da função f , com o gráfico $y = x$, que é a diagonal do plano cartesiano (x, y) . Quando ocorre o fenômeno da Figura 3.2, o ponto fixo é dito *atrator*. Encarregamos o leitor de investigar, assumindo que f é suave, a relação entre um ponto fixo ser atrator e o valor da derivada de f nesse ponto fixo. A chave aqui é o Teorema do Valor Médio.

De volta ao nosso problema-guia, aquele mesmo de se obter aproximações de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^2 = 2$, a recursão do método babilônico estudado na Seção 3.2.2 é a iteração da função:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right), \quad x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.9)$$

A porção de seu gráfico correspondente a $0 < x \leq 10$ encontra-se na Figura 3.3. Verifique que o que estamos procurando são pontos fixos de f , isto é, que:

$$\alpha^2 = 2 \iff f(\alpha) = \alpha. \quad (3.10)$$

Aplique a análise gráfica a Figura 3.3, verificando que nesse caso o ponto $(\alpha^+, f(\alpha^+)) = (\alpha^+, \alpha^+)$ correspondente ao ponto fixo $\alpha^+ > 0$ (a raiz quadrada positiva de 2) atrai a poligonal, inclusive mais rápido do que no exemplo da Figura 3.2. Isso está em conformidade com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha^+$ quando $x_0 > 0$, como demonstramos na Seção 3.2.2. Considerando o gráfico de f para $x < 0$, a análise gráfica torna claro também que, para um chute inicial $x_0 < 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha^-$, a raiz quadrada negativa de 2.

Enfatizamos que o comportamento dos caminhos poligonais considerados na análise gráfica dependem fortemente do formato do gráfico de f e que, em geral, aparecem comportamentos muito mais variados do que o das Figuras 3.2 e 3.3.

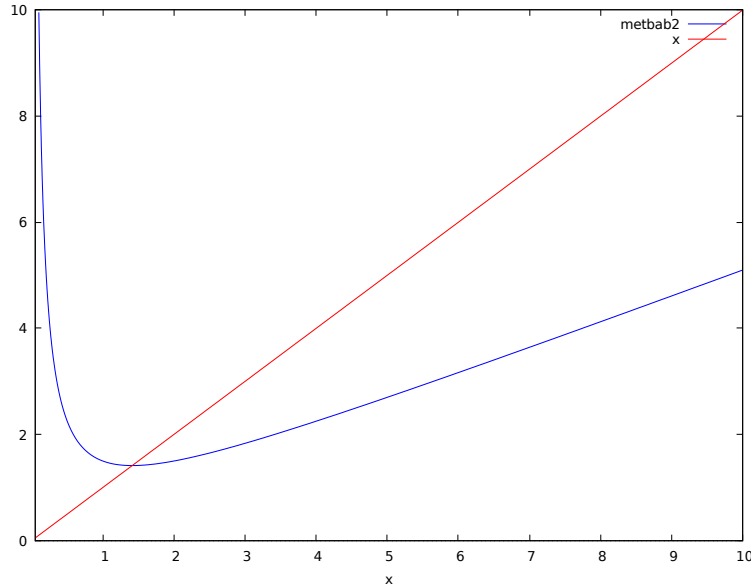


Figura 3.3: Gráficos $y = x$ e $y = f(x)$, onde f é definida pela equação (3.9).

Sugerimos como um exercício a exploração de caminhos poligonais associados a diferentes funções reais f e chutes iniciais x_0 . Quais gráficos / fórmulas e escolhas de x_0 produzem poligonais que escapam para o infinito? Espiralam atraídas por um ponto fixo? São atraídas por um ponto fixo por um lado, e repelidas pelo outro? Fecham um retângulo? Retornam a um mesmo ponto após três passos? Quatro ou mais passos? Se comportam de uma maneira *caótica*? Será possível que a sequência x_k se torne tão próxima quanto se quiser de um conjunto com um número infinito de pontos? Aqui o caminho não é complicar a forma do gráfico ou a expressão da função, pois funções f tão simples quanto quadráticas possuem dinâmicas bastante ricas, conforme podemos ver na Figura 3.4.

A compreensão dos comportamentos que surgem ao se variar os ingredientes X , f e x_0 é um dos temas centrais da pesquisa em Sistemas Dinâmicos. E, muitas vezes, isso passa pela invenção de elementos ideais que representem os limites de quando esses ingredientes são levados ao infinito, que podem ser sugeridos ao se colocar os sistemas no cenário apropriado. Voltaremos a isso na Seção 3.4.4.

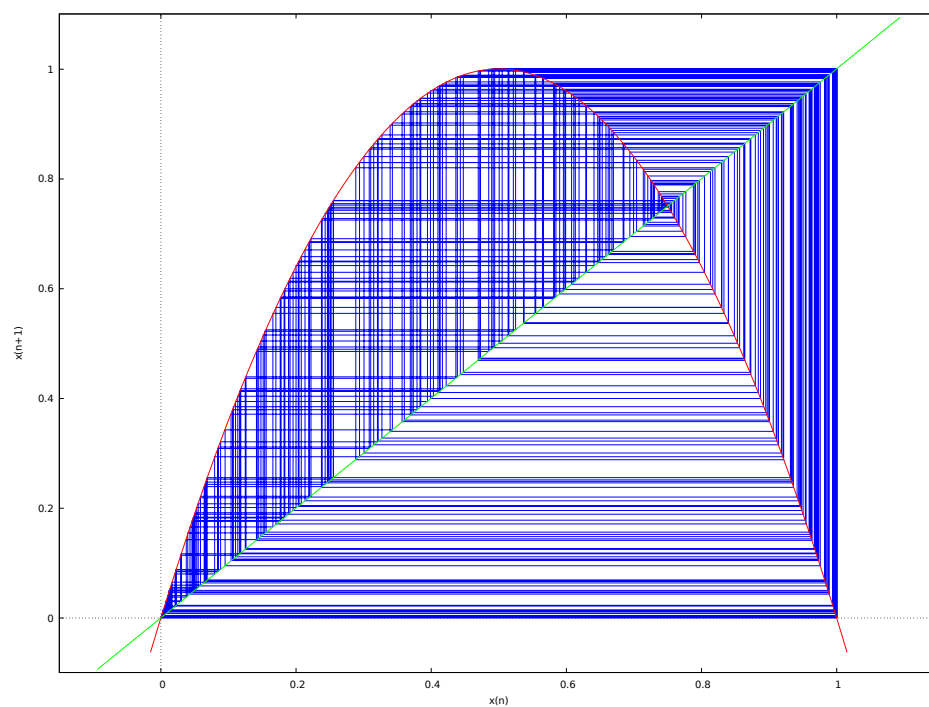


Figura 3.4: Caminho poligonal obtido com $f(x) = 4x(1 - x)$ e $x_0 = 0.7$, feitas 300 iterações.

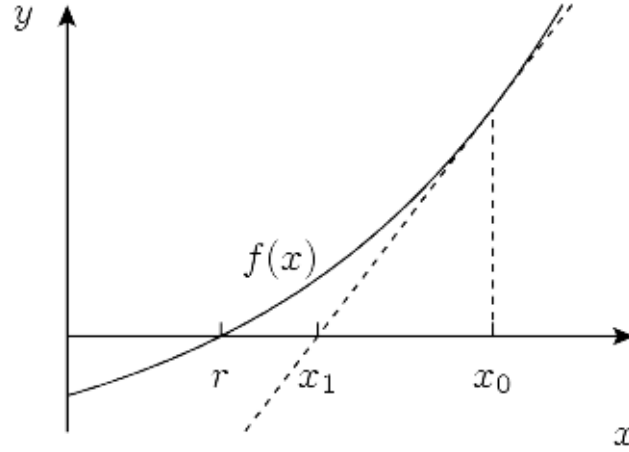


Figura 3.5: Método de Newton. No texto estamos chamando de g o que nesta Figura é chamado de f .

3.2.4 Método de Newton

O método babilônico de extração de raízes quadradas é também um caso particular do método de Newton de aproximação de raízes de uma função real.

A visão geométrica da construção a seguir encontra-se na Figura 3.5. Dada uma função real g cujos zeros temos a intenção de aproximar, tomamos sequências $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, que são obtidas a partir de chutes iniciais x_0 por meio da regra:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \quad (3.11)$$

onde g' denota a derivada de g , cuja existência é assumida a fim de se empregar o método. Nos termos da Seção 3.2.3, a sequência x_k é obtida a partir de x_0 por meio da iteração da *função de Newton associada a g* :

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}. \quad (3.12)$$

Há aqui uma sutileza com relação ao domínio de f , que deve ser restrito aos números reais x tais que $g'(f^k(x)) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, para que nas expressões (3.11) e (3.12) não apareça uma divisão por zero e $x_k = f^k(x_0)$ esteja bem definida para todo $k \in \mathbb{N}$. Observe que α é um zero de g se, e somente se, α é ponto fixo de f .

Para $g(x) = x^2 - 2$, uma verificação simples mostra que a função de Newton é dada pela equação (3.9), justificando a afirmação inicial desta Seção. A Figura 3.3

mostra então uma segunda maneira de se visualizar a convergência demonstrada na Seção 3.2.2. A convergência nesse caso não é um mero acidente.

Considere uma função real g qualquer, suponha que α é um zero de g , isto é, $g(\alpha) = 0$. Se g tem derivada contínua, $g'(\alpha) \neq 0$, e x_0 é tomado suficientemente próximo de α , então $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$. Isto é, nessas condições, o método de Newton funciona. Além disso, existem condições que garantem que a convergência é *quadrática*, isto é, que o erro em cada etapa se comporta como no método babilônico. Demonstrações dessas afirmações encontram-se em materiais padrão de Cálculo / Cálculo Numérico (esses resultados são, basicamente, consequências do Teorema do Valor Médio).

Destacamos que a eficácia do método de Newton depende crucialmente da escolha judiciosa do chute inicial, e que o resultado do parágrafo anterior nada diz a respeito das sequências x_k quando x_0 está longe das raízes de g . Comportamentos caóticos como os mencionados no final da Seção 3.2.3 podem ser obtidos por meio da iteração de funções de Newton associadas a funções g tão simples quanto polinômios – até mesmo de grau igual a 2, mas notoriamente de grau maior ou igual a 3. A despeito de já se saber bastante sobre isso, esses tópicos ainda constituem temas de pesquisa atual.

3.2.5 Aproximações de π

Se já na medição de segmentos de reta com relação a um segmento fixado somos obrigados a tomar o limite de sequências numéricas, não é de se surpreender que o mesmo ocorra ao se medir o comprimento de curvas mais gerais. Entendendo que segmentos de reta têm comprimentos bem-definidos, o comprimento de uma curva é definido como o limite dos comprimentos de aproximações poligonais da curva, exatamente como é feito nos cursos básicos de Cálculo.

Não nos preocuparemos aqui em definir exatamente o que é uma curva. De todo jeito, considere uma curva $\mathcal{C}$ que conecte pontos A e B , e tome pontos $P_0, \dots, P_N \in \mathcal{C}$ com as propriedades: $P_0 = A$; $P_N = B$; e, ao se percorrer $\mathcal{C}$ de A até B , encontram-se os pontos P_k na ordem $P_0, P_1, \dots, P_{N-1}, P_N$. Somando os comprimentos dos segmentos de reta $\overline{P_k P_{k+1}}$, e tomando o limite sobre todas tais sequências P_k , obtemos, por definição, o comprimento de $\mathcal{C}$.

Mesmo se $\mathcal{C}$ é uma curva cônica (parábola, hipérbola, elipse e, em particular, circunferência), o cálculo efetivo do comprimento de $\mathcal{C}$ é um problema difícil. Ainda que sejam empregadas técnicas do Cálculo Infinitesimal, por exemplo no caso das elipses, as integrais em questão são não-elementares, exigindo técnicas variadas para suas avaliações.

Restringindo-nos a circunferências, a definição acima tem uma consequência bastante conhecida. Considerações simples a respeito de semelhança de triângulos demonstram que, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são circunferências cujos comprimentos são iguais a, respectivamente C e C' ; e cujos diâmetros têm comprimentos iguais a d e d' , então $C/d = C'/d'$. Essa razão comum a todas as circunferências define o célebre número π , o “perímetro” da circunferência de diâmetro unitário. Daí, segue diretamente a fórmula que memorizamos desde o ensino básico, $C = 2\pi r$, que fornece o comprimento de uma circunferência de raio r . Se coloca então a seguinte questão fundamental: como calcular π ?

Em primeiro lugar, a existência do limite que define o comprimento de uma curva está diretamente relacionada com aquilo que se chama de *curva*, de modo que o limite pode perfeitamente ser infinito. O leitor é estimulado a construir curvas “limitadas” que tenham comprimento infinito, e mencionamos a célebre curva “flocos de neve” de Koch como inspiração. O que garante as circunferências não são curvas como essas, isto é, que π não é infinito?

Tendo em vista a Seção 3.2.4, poderíamos buscar alguma função g tal que $g(\pi) = 0$, e então aplicar o Método de Newton para obter aproximações de π . Note que nesse caso, certamente g não é uma função polinomial com coeficientes racionais, uma vez foi demonstrado no século XIX que π não é uma raiz de nenhum polinômio desse tipo (isto é, π não é *algébrico*, resultado conhecido como Teorema de Lindemann – veja [?]).

Após todo esse suspense, especificaremos, sem demonstração, uma técnica que possibilita aproximar π tão bem quanto se quiser por sequências definidas recursivamente. A primeira aparição de uma técnica desse tipo é atribuída a Arquimedes, cujo trabalho original pode ser consultado em [?], onde também se encontram demonstrações das afirmações abaixo, bem como de outras técnicas. É também Arquimedes que leva o crédito por ter demonstrado que a razão entre o comprimento e o diâmetro, comum a toda as circunferências, coincide com a razão entre

suas áreas e raios ao quadrado.

Considere uma circunferência $\mathcal{C}$ de diâmetro igual 1. Para cada $n \geq 2$, sejam p_n o perímetro de um polígono regular de 2^n lados inscrito em $\mathcal{C}$; e P_n o perímetro de um polígono regular de 2^n lados circunscrito em $\mathcal{C}$. Intuitivamente,

$$p_n < \pi < P_n, \quad (3.13)$$

e espera-se obter π como a intersecção da sequência de intervalos encaixantes $[p_n, P_n]$. Isso decorre de essas sequências satisfazerem as seguintes relações de recorrência:

$$P_{n+1} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \quad \text{e} \quad p_{n+1} = \sqrt{p_n P_{n+1}}. \quad (3.14)$$

Ou seja, π pode ser aproximado através de cálculos sucessivos de médias harmônicas e geométricas partindo de certos chutes iniciais. A prova disso é um passeio pelos fundamentos da trigonometria e, encontra-se facilmente na literatura (por exemplo, [?]).

Observe que, em particular, o emprego das relações (3.14) depende do cálculo de raízes quadradas, o que por sua vez pode ser feito com o emprego da relação de recorrência que vimos na Seção 3.2.2. Isso é um reflexo do fato de π ser um número irracional “mais complicado” que, por exemplo, $\sqrt{2}$. Deixamos como um exercício a aplicação de (3.14) para se obter as aproximações usuais 3,14 ou 3,1415.

Existem muitas outras maneiras de se aproximar π e, nos dias atuais, em que computadores são empregados para se obter quadrilhões de casas decimais corretas, o cálculo deste célebre número se coloca como um teste de poder computacional.

3.3 Digressão: para que serve?

Antes de prosseguir, vamos refletir um pouco sobre uma questão central: quais são os interesses em se aproximar números tão bem quanto se quiser? Caso não sejam suficientemente interessantes a beleza e relevância das técnicas da Seção 3.2 enquanto conhecimento “puramente matemático”, ou seu valor como resultado da árdua exploração de um mundo abstrato das idéias, colocamos a seguinte resposta para essa pergunta: *conhecer um número com muita precisão possibilita multiplicá-lo por números muito grandes e obter resultados com erros muito pequenos.*

Deixando de lado aqui motivações bélicas e da ordem do desenvolvimento tecnológico, que costumam satisfazer aqueles que tanto se preocupam com a tal da “utilidade” das coisas, vamos falar rapidamente da questão, muito antiga, da elaboração de modelos que representem o universo que habitamos.

Dentre o conhecimento que nos chega creditado aos pioneiros gregos, está o argumento de Eratóstenes que demonstra que a superfície do planeta não é plana, essencialmente porque em um mesmo instante do tempo, a incidência luminosa do Sol chega com ângulos diferentes em pontos distintos A e B da superfície.¹ A verificação desse fenômeno é feita considerando-se perpendiculares à superfície, que podem ser poços ou torres, dependendo da variante da história que é contada. Entendendo que a incidência luminosa do sol é um feixe de retas paralelas, o experimento mostra que essas perpendiculares não são paralelas e que, ao serem prolongadas ao subsolo, se encontram em um ponto O . O ângulo formado em O é conhecido, pois os ângulos de incidência dos raios solares podem ser medidos com o auxílio das perpendiculares à superfície. Com isso, conhecendo a distância entre os pontos A e B , Eratóstenes é capaz de estimar o comprimento da circunferência com centro em O que passa por A e B . Nesse sentido, fica então conhecido o comprimento da circunferência do planeta.

Tendo essa informação, pode ser estimado o raio dessa circunferência, e nessa hora é necessário empregar uma aproximação de π . Claro, quanto melhor for essa aproximação, melhor será a estimativa. Se o conhecimento do raio da circunferência do planeta não interessa por si só, chamamos aqui atenção ao fato de ela ter sido utilizada, ainda pelos pioneiros gregos, por exemplo na estimativa das distâncias até a Lua e até o Sol. Aqui quem leva o crédito é Hiparco, cujo trabalho marca a transição de uma astronomia *qualitativa* para uma astronomia *quantitativa*, sendo ele o criador das primeiras tabelas trigonométricas. Essa afirmação é feita em [?], onde se encontram mais detalhes a esse respeito.

¹ O argumento de Eratóstenes pode ser facilmente encontrado na literatura, e aqui referimos o trabalho clássico de divulgação científica realizado por Carl Sagan, tanto em forma de livro, quanto em forma de programa de televisão. Citamos aqui a segunda variante [?], disponível no Youtube. É curioso que, no momento da redação deste texto (abril de 2018), uma massa de internautas furiosos esteja descontente com o argumento de Eratóstenes, sem no entanto ser capaz de refutá-lo. Sentimos muito por um poderoso exercício de imaginação geométrica, o da consideração de como seria a vida em uma superfície plana, ter sido sequestrado.

Saltando alguns milênios a partir daí, e considerando desenvolvimentos da Física do Século XX, fazemos a seguinte citação, que foi a inspiração primeira deste trabalho (em tradução do autor):

São necessários meros 39 dígitos de π a fim de calcular o comprimento de uma circunferência de raio 2×10^{25} (uma cota superior para a distância percorrida por uma partícula se movendo a velocidade da luz por 20 bilhões de anos e, portanto, uma cota superior para o raio do universo) com um erro menor que 10^{-12} metros (uma cota inferior para o raio de um átomo de hidrogênio). [?]

Não nos interessa aqui a atualidade dos valores mencionados, mas sim sua magnitude, e apenas grosseiramente. O que chama atenção é o grau de maturidade da astronomia quantitativa inaugurada por Hiparco, uma vez que hoje em dia questões acerca das dimensões do universo são consideradas razoáveis e tratáveis. Fazemos aqui dois destaques: em primeiro lugar, os “meros” 39 dígitos realmente não são tantos assim, tendo em vista os comentários finais da Seção 3.2.5.

Mas talvez sejam necessários mais dígitos, pois, em segundo lugar, a citação acima assume implicitamente que o universo é euclidiano, uma vez que a fórmula $C = 2\pi r$ é uma característica bastante particular da geometria euclidiana. Outras geometrias, outras maneiras de se medir distâncias, resultam em outras fórmulas para suas circunferências de raio r . Por exemplo, na geometria hiperbólica a fórmula é $C = 2\pi \sinh r$ (onde $\sinh$ é a função seno hiperbólico). Uma vez que estamos falando de circunferências “bem grandes”, sugerimos que o leitor compare essas duas grandezas, por exemplo, calculando $\lim_{r \rightarrow +\infty} (\sinh r)/r$. Quantos dígitos são necessários se a geometria do universo for hiperbólica?

Entender qual é a maneira apropriada de se medir distâncias astronômicas, quer dizer, que lei dos cossenos devemos utilizar para estimar a distância entre duas galáxias que somos capazes de observar, e até mesmo entender se faz sentido colocar a questão dessa maneira, parecer ser uma questão complicada, cujo tratamento adequado está muito além das possibilidades deste texto e das competências de seu autor. A esse respeito, sugerimos a leitura [?]. A questão é colocada aqui no terreno seguro dos exercícios de imaginação geométrica, e apenas assim.

Esperamos que esta Seção tenha motivado aquelas que a precederam. Aque-

les que lançam mísseis desejam que eles cheguem precisamente a seus destinos, e mencionamos algo que se conta sobre uma expedição européia que chegou do lado de cá do oceano: se Cristovão Colombo empregasse o valor da circunferência do planeta calculado por Eratóstenes, ele teria certeza de que não estava nas Índias.

3.4 Infinitamente distante

Vimos na Seção 3.2.2 em que sentido certos números irracionais são limites ideais de sequências limitadas de números racionais. Agora veremos como associar limites ideais a sequências ilimitadas. Resumindo, em vez de falar que uma sequência é divergente, podemos falar que ela *converge para o infinito*, uma vez que tenhamos entendido que o infinito é um ponto com certas propriedades em comum com todos os outros. Enfatizamos que não há uma maneira única de se fazer isso, conforme veremos a seguir.

Na Seção 3.4.1 ilustramos a discussão dando exemplos de sequências que “vão embora” para o infinito. E nas Seções 3.4.2 e 3.4.3 vemos como, para sequências da reta e do plano, o infinito lá está para recebê-las. Na Seção 3.4.4 vemos como a construção da Seção 3.4.3 permite um tratamento unificado de uma série de sistemas dinâmicos iterados, em particular possibilitando novas perspectivas sobre o bom e velho método babilônico. Em grande parte a Seção 3.4.4 é um “show de luzes”, e a colocamos principalmente como um convite ao estudo dos temas nela descritos.

3.4.1 Números grandes

Sequências divergentes de números podem facilmente ser construídas por meio de recursões da forma da equação (3.8) da Seção 3.2.3. Por exemplo, para qualquer $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixado e *termo inicial* $x_0 \in \mathbb{R}$, a recursão $x_{k+1} = x_k + b$ é uma progressão aritmética, cujos termos se tornam tão grandes (se $b > 0$) ou pequenos (se $b < 0$) quanto se desejar. Pensando no desafio de “quem fala o maior número?”, essas sequências correspondem a desafiantes modestos, que vencem uns os lances dos outros somando b a cada rodada.

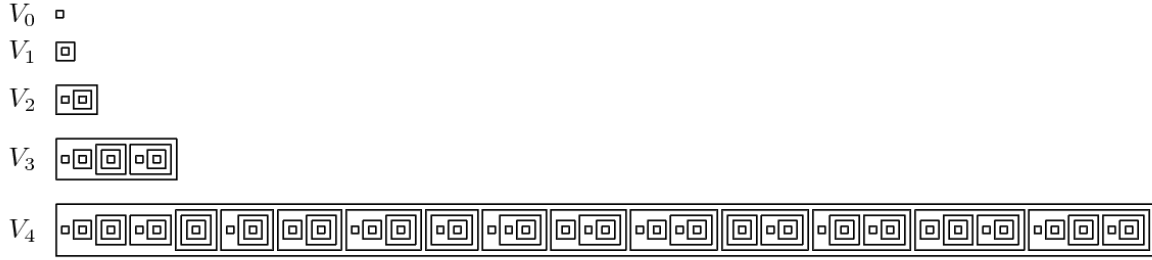


Figura 3.6: Sequência de conjuntos considerada na Seção 3.4.1.

Outro exemplo bastante popular é o das progressões geométricas, em que $x_{k+1} = bx_k$. Nesse caso, assumimos também que $x_0 \neq 0$ e, a fim de obter uma sequência divergente, que $|b| > 1$. Aqui temos desafiante um tanto mais audaciosos que, por exemplo, dobram os lances de seus oponentes ($b = 2$). Progressões geométricas “crescem mais” que progressões aritméticas, uma vez que, ao calcular o limite dos quocientes de seus termos gerais, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_0 b^k / (x_0 + kb) = \infty$ (nas condições acima).

Entretanto, poderíamos ter desafiante ainda mais ousados, familiarizados com o conceito de recursão e com o poder da exponenciação. Se na equação (3.8) tomarmos uma função f exponencial, podemos obter sequências que crescem ainda mais rapidamente. Em particular, se $f(x) = 2^x$ e $x_0 = 0$, a Teoria dos Conjuntos fornece uma maneira interessante de visualizar qual é a sequência x_k resultante.

Defina $V_0 = \emptyset$, o conjunto vazio; e, para cada $n \geq 0$, $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$, isto é, o conjunto das *partes* de V_n , cujos elementos são precisamente os subconjuntos de V_n . Ou seja, $V_1 = \{\emptyset\}$, $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, e assim por diante. Os primeiros membros dessa sequência estão representados na Figura 3.6. Essa construção é conhecida como o *universo de von Neumann*, e sua relevância em Teoria dos Conjuntos pode ser apreciada a partir de [?]. Denotando por $|\cdot|$ o número de elementos de um conjunto, temos que $|V_{n+1}| = 2^{|V_n|}$, e os primeiros números dessa sequência são: $|V_0| = 0$; $|V_1| = 1$; $|V_2| = 2$; $|V_3| = 4$; $|V_4| = 16$; $|V_5| = 65.536$; e $|V_6| = 2^{65.536}$.

Esse último número é aproximadamente $10^{19.728}$, e um árbitro que estivesse registrando nosso desafio precisaria já na sexta rodada empregar por volta de 19.728 dígitos decimais para registrar os lances dos desafiante. Especialistas dizem que esse número é maior que o número de átomos do universo observável. Entretanto,

matematicamente, não devemos se deixar inibir por isso: poderíamos estar interessados no número de relações entre todos esses átomos, ou no número de relações entre relações entre todos esses átomos, e assim por diante.

Concluimos esta Seção deixando ao leitor a tarefa de bolar uma estratégia que produza sequências que crescem ainda mais rápido, e ainda mais rápido que essa, e assim sucessivamente. Há uma sequência numérica que cresce mais rápido que todas as outras sequências numéricas? Isto é, um desafiante bem informado seria capaz de sempre vencer o desafio de “quem fala o maior número”? Crianças que respondem “infinito vezes infinito” saem vitoriosas?

3.4.2 Os infinitos da reta real

Ao falarmos de certas sequências limitadas de números racionais na Seção 3.2.2, o que vimos foi que a atribuição de limites a essas sequências é estabelecida ao se considerar os números racionais como pontos de uma reta, na qual há pontos que não correspondem aos racionais, e que cumprem então o papel dos tais limites ideais. Veremos agora que com a reta real acontece algo análogo, mas que há uma opção a ser feita. Basicamente, essa opção se refere a distinguirmos ou não $-\infty$ de $+\infty$.

Primeiro consideremos que, sim, iremos distinguir $-\infty$ e ∞ . Considere a função real

$$\varphi :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = \tan\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad (3.15)$$

onde $] - 1, 1[$ é o intervalo aberto de extremidades -1 e 1 ; e $\tan$ é a função trigonométrica tangente. A Figura 3.7 mostra o gráfico de φ , no qual ficam claras as seguintes propriedades, cujas demonstrações rigorosas ficam como exercício:

1. φ é *bijetora*: para cada $r \in \mathbb{R}$ existe um único $s \in] - 1, 1[$ tal que $\varphi(s) = r$. Consequentemente, existe uma única função $\mathbb{R} \rightarrow]\pi/2, \pi/2[$, denotada por φ^{-1} , que é *inversa* a φ , no sentido de que $\varphi^{-1}(\varphi(s)) = s$ para todo $s \in] - 1, 1[$, e $\varphi(\varphi^{-1}(r)) = r$ para todo $r \in \mathbb{R}$.
2. φ é *contínua*: para cada $s_0 \in] - 1, 1[$ e cada vizinhança U de $r_0 = \varphi(s_0)$, existe vizinhança V de s_0 tal que $\varphi(V) \subset U$. Aqui, por *vizinhança* de um número real, entende-se qualquer intervalo aberto que contém o número.

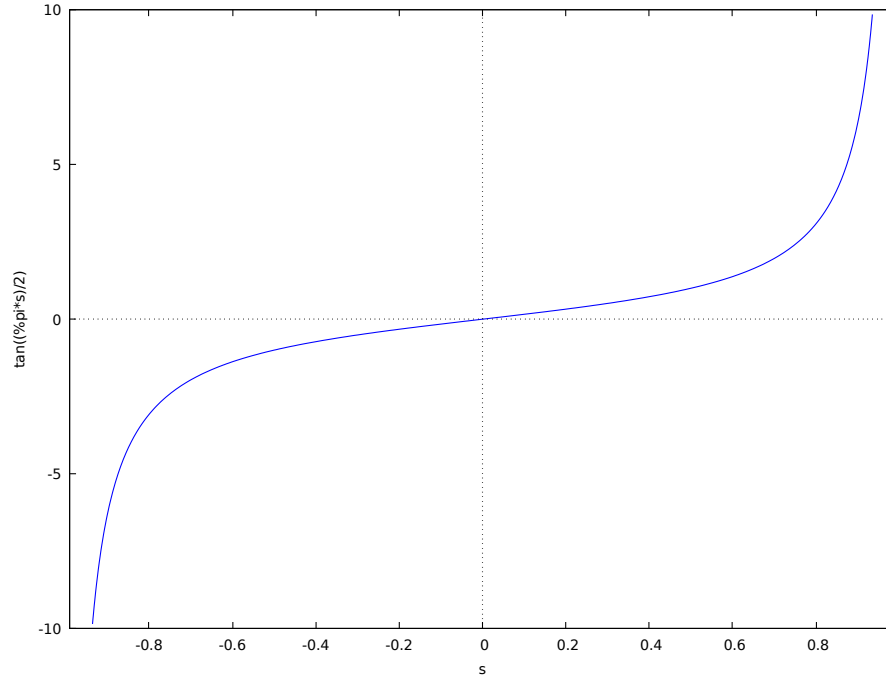


Figura 3.7: Gráfico da função $\varphi(s) = \tan\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, $s \in]-1, 1[$.

3. φ^{-1} é contínua.

Essas três propriedades fazem com que, por definição φ seja chamada de *homeomorfismo*. Um homeomorfismo estabelece uma *equivalência topológica* entre seu domínio e seu contra-domínio e, nesses termos, a função φ faz com que $\mathbb{R}$ seja topologicamente equivalente ao intervalo aberto $] - 1, 1[$. De fato, empregando funções afins, é fácil verificar que o intervalo $] - 1, 1[$ nada tem de especial e que, portanto, a reta real é topologicamente equivalente a um intervalo aberto não-degenerado qualquer. Ainda na terminologia da topologia, as construções a seguir são exemplos de *compactificações*.

Entendendo que $\{-\infty, +\infty\}$ é qualquer conjunto disjunto de $\mathbb{R}$ constituído por exatamente dois elementos, que decidimos denotar utilizando os símbolos $-\infty$ e $+\infty$, considere a união $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Defina $\bar{\varphi} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ como uma *extensão* de φ , isto é, $\bar{\varphi}(-1) = -\infty$, $\bar{\varphi}(1) = +\infty$, e $\bar{\varphi}(s) = \varphi(s)$ se $s \in]-1, 1[$.

Note que $\bar{\varphi}$ é bijetora. Definimos então, no domínio de $\bar{\varphi}$, as vizinhanças dos pontos -1 e 1 como, respectivamente, intervalos da forma $[-1, -1 + \delta[$ e $]1 - \delta, 1]$,

com $0 < \delta < 2$. E, no contra-domínio de $\bar{\varphi}$, as vizinhanças dos pontos $-\infty$ e $+\infty$ são, respectivamente, conjuntos da forma $\{-\infty\} \cup \{r \in \mathbb{R} \mid r < R\}$ e $\{+\infty\} \cup \{r \in \mathbb{R} \mid r > R\}$, com $R \in \mathbb{R}$ qualquer. Uma vez que $\lim_{s \rightarrow -1} \varphi(s) = -\infty$ e $\lim_{s \rightarrow 1} \varphi(s) = +\infty$, segue que $\bar{\varphi}$ é contínua (sugerimos que o leitor recorra a um livro de cálculo para averiguar a definição que dá significado a esses limites). Além disso, $\bar{\varphi}^{-1}$ também é contínua. Portanto, $\bar{\varphi}$ é um homeomorfismo, estabelecendo que $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $[-1, 1]$ são topologicamente equivalentes.

Sumarizando a construção, basicamente φ^{-1} coloca bijetivamente toda a reta real dentro de um intervalo limitado aberto de um modo que acrescentar ao intervalo suas extremidades corresponde a acrescentar à reta dois pontos no infinito. Essa construção dá precisão à idéia de que, por exemplo, para $b > 1$, as sequências $-b^k$ e b^k convergem em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ para, respectivamente, os pontos $-\infty$ e $+\infty$. Mas e quanto às sequências da forma b^k com $b < -1$?

Tratemos agora da segunda opção mencionada no início desta Seção, aquela em que não distinguimos $-\infty$ e $+\infty$. Nesse caso, colocamos a reta real bijetivamente dentro de uma circunferência menos um ponto, de modo que colocar o ponto de volta na circunferência corresponda a acrescentar à reta um único ponto. Daremos precisão a isso a seguir.

Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (r, t) , no qual identificamos $\mathbb{R}$ com os pontos de coordenadas $(r, 0)$, e denotamos por S^1 a circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio igual a 1:

$$S^1 = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 + t^2 = 1\}. \quad (3.16)$$

Seja $N = (0, 1)$ o “polo norte” da circunferência, e defina $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \setminus \{N\}$ como na Figura 3.8, isto é, para cada $r \in \mathbb{R}$, $\varphi(r)$ é igual à intersecção com S^1 da reta que conecta r e N . Se $-1 < r < 1$, então $\varphi(r)$ pertence ao hemisfério sul de S^1 ; se $r = -1$ ou $r = 1$, então $\varphi(r) = r$; e se $|r| > 1$, então $\varphi(r)$ pertence ao hemisfério norte de S^1 . Essas observações podem ser verificadas na fórmula que se deduz da Figura 3.8:

$$\varphi(r) = \left(\frac{2r}{r^2 + 1}, \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right). \quad (3.17)$$

Verifique que φ é uma bijeção. E φ é um homeomorfismo, entendendo que as vizinhanças em $\mathbb{R}$ são os intervalos abertos, enquanto que as vizinhanças de um

ponto $P \in S^1 \setminus \{N\}$ são as intersecções de $S^1 \setminus \{N\}$ com discos abertos do plano euclidiano com centro em P .

Note que:

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{2r}{r^2 + 1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} = 1. \quad (3.18)$$

Ou seja, $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \varphi(r) = N$. Procedemos então de modo análogo à construção anterior: denotamos por $\{\infty\}$ um conjunto disjunto de $\mathbb{R}$ com um único elemento, denotado por ∞ , e tomamos a união $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Estendemos φ a uma função $\bar{\varphi} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow S^1$ definida por $\bar{\varphi}(r) = \varphi(r)$, se $r \in \mathbb{R}$; e $\bar{\varphi}(\infty) = N$; e com isso obtemos um homeomorfismo $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, onde as vizinhanças de ∞ são conjuntos da forma $\{\infty\} \cup \{r \in \mathbb{R} \mid |r| > R\}$, com $R \in \mathbb{R}$; e as vizinhanças de N são as intersecções com S^1 de discos abertos do plano cartesiano centrados em N .

Sob essa correspondência entre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e S^1 , mesmo sequências ilimitadas em $\mathbb{R}$ com sinais alternados, como por exemplo b^k para algum $b < -1$, *convergem* para o ponto ∞ .

3.4.3 Um ponto no infinito do plano

Assim como na Seção 3.4.2 compactificamos a reta, também o plano pode ser compactificado. Nesse caso também há escolhas a serem feitas, sendo que as mais comuns são as de colocar uma circunferência no infinito do plano, tornando ele um disco fechado, e a de colocar um único ponto no infinito do plano, tornando ele uma esfera.² Ambas são extremamente úteis em matemática, mas aqui abordaremos apenas a segunda.

Utilizaremos no espaço tridimensional coordenadas (z, t) , onde $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, sendo $\mathbb{C}$ o plano complexo. Denotando por $|z|$ o valor absoluto de $z \in \mathbb{C}$, definimos a esfera bidimensional S^2 por:

$$S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}. \quad (3.19)$$

² Registramos aqui a seguinte questão, levantada pelo Prof. Daniel Vendruscolo durante a palestra de apresentação deste trabalho na Semana do Infinito: podemos compactificar o plano adicionando a ele precisamente 2 pontos? Achamos interessante também algumas variações dessa questão, por exemplo: como colocar exatamente n pontos no infinito do plano? Exatamente n pontos no infinito da reta? Alertamos ao leitor que tentativas de se realizar essas construções podem produzir objetos menos amigáveis que superfícies e curvas.

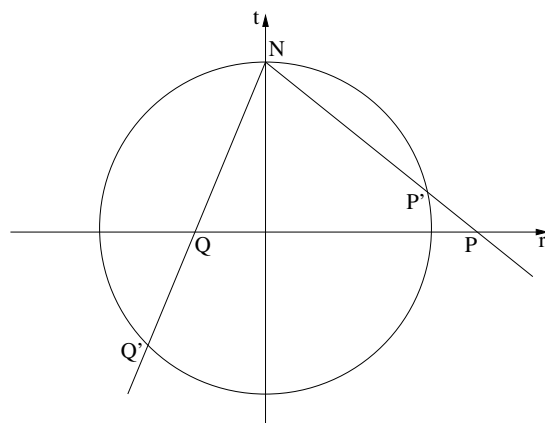


Figura 3.8: Equivalência topológica definida na Seção 3.4.2. Denotamos $P' = \varphi(P)$ e $Q' = \varphi(Q)$.

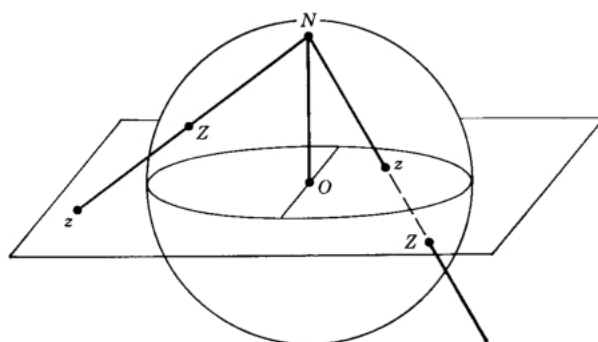


Figura 3.9: A projeção estereográfica tratada na Seção 3.4.3.

De modo análogo ao da Seção anterior, as vizinhanças de S^2 são as intersecções de S^2 com as bolas abertas do espaço tridimensional, as vizinhanças de $\mathbb{C}$ são seus discos abertos, e as vizinhanças do ponto ∞ de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ são conjuntos da forma $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, com $R \in \mathbb{R}$.

A fim de definir um homeomorfismo $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$, rotacionamos a construção da Figura 3.8, obtendo a Figura 3.9. Denotando $N = (0, 1)$ o polo norte de S^2 , novamente definimos primeiro um homeomorfismo $\mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ por:

$$\varphi(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \quad (3.20)$$

E a seguir o estendemos ao homeomorfismo procurado fazendo ∞ corresponder a N . A extensão será denotada por $\bar{\varphi}$.

Intuitivamente, pegamos todo o infinito do plano e o vemos como um único ponto, como se fosse o nó que impede o ar de sair de dentro de um balão de festas. A transformação $S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ é conhecida como *projeção estereográfica*, e fornece, por exemplo, uma maneira de se produzir mapas planificados do globo terrestre.

Verifique que, através de $\bar{\varphi}$, circunferências de $\mathbb{C}$ correspondem a circunferências de S^2 que não passam por N , e retas de $\mathbb{C}$ correspondem a circunferências de S^2 que passam por N . Isso dá sentido à frase “retas paralelas se encontram no infinito”. E os conceitos de reta e circunferência do plano podem ser unificados, sendo ambos circunferências na esfera. Além disso, a correspondência entre $\mathbb{C}$ e S^2 preserva ângulos, não preserva comprimentos, e também não preserva áreas. Deixamos como exercício o cálculo do efeito de $\bar{\varphi}$, ou de sua inversa, sobre as formas diferenciais de comprimento e de área.

Antes de prosseguir, notamos que o acréscimo de um ponto pode ser feito em qualquer dimensão, e não apenas na reta e no plano. Se no espaço tridimensional forem utilizadas coordenadas retangulares (u, v, w) , a expressão da equação (3.19) se torna:

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \quad (3.21)$$

Essa expressão pode facilmente ser adaptada para se obter uma equivalência topológica entre o espaço m -dimensional acrescido de um ponto no infinito $\mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ e a esfera m -dimensional S^m .

3.4.4 Sistemas Dinâmicos na Esfera de Riemann

Vejamos agora uma aplicação da compactificação do plano pelo acréscimo de um ponto no infinito. No contexto das funções de variáveis complexas, o plano acrescido de um ponto como na Seção 3.4.2 é chamado de *plano estendido*, ou *esfera de Riemann*. Iremos denotá-lo por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Por um lado, o ponto ∞ complica a álgebra dos números complexos ao criar exceções, uma vez que expressões como $0 \cdot \infty$ ou ∞/∞ não estão bem definidas. Mas, por outro lado, $\hat{\mathbb{C}}$ é um domínio comum a muitas funções que, sem o ponto ∞ , têm domínios distintos. Isso abre precedente para que tais funções sejam estudadas como famílias, e essa técnica possui vastas aplicações na Teoria das Funções Complexas.

Por exemplo, considere as funções racionais de variáveis complexas. Enquanto que um quociente de polinômios complexos $p(z)/q(z)$ só assume valores em $\mathbb{C}$ para os $z \in \mathbb{C}$ tais que $q(z) \neq 0$, temos que $p(z)/q(z)$ define uma função $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ quaisquer que sejam os polinômios p e q (não-nulos). Em particular, a função de Newton associada a um polinômio g (possivelmente complexo) pode ser iterada em $\hat{\mathbb{C}}$, sem a necessidade de se evitar pontos nos quais a derivada de g se anula, conforme foi explicado na Seção 3.2.4.

Em particular, considere a função que se itera no método babilônico de aproximação da raiz quadrada de 2. Iremos repetir aqui sua expressão, para enfatizar que agora a consideramos como uma função da esfera de Riemann em si mesma:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{2}{z} \right), \quad z \in \hat{\mathbb{C}}. \quad (3.22)$$

Note que além dos pontos fixos iguais a $\pm\sqrt{2}$, temos aqui um terceiro ponto fixo, uma vez que $f(\infty) = \infty$. Além disso, $f(0) = \infty$, e $f^k(0) = \infty$ para todo $k \geq 1$, ou seja, o método de Newton falha para o chute inicial $z_0 = 0$. Dando chutes iniciais iguais a $\pm i\sqrt{2}$, o método também falha, pois $f(\pm i\sqrt{2}) = 0$, e $f^k(\pm i\sqrt{2}) = \infty$ para todo $k \geq 2$.

Na verdade, o método falha para qualquer chute inicial sobre o eixo imaginário, onde a dinâmica de f é caótica. Um resultado conhecido como Teorema de Cayley garante que, para qualquer polinômio complexo g de grau 2 com duas raízes distintas, a dinâmica da função de Newton é caótica na mediatriz do segmento de reta

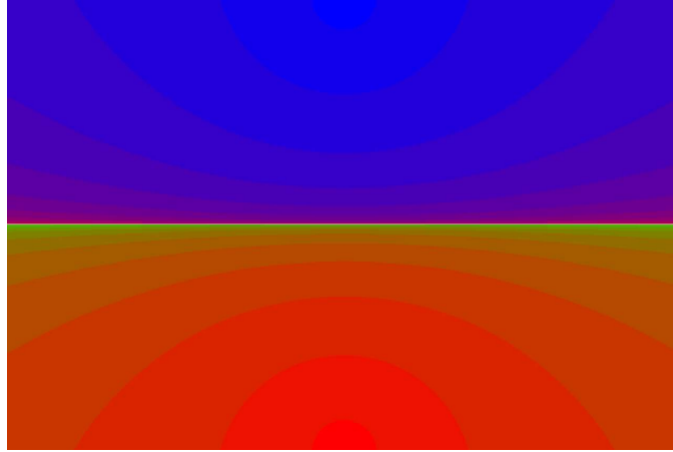


Figura 3.10: Método de Newton: $g(z) = z^2 + 1$.

que conecta as raízes, convergindo para cada uma das raízes em seus respectivos semi-planos (veja a Figura 3.10 para um exemplo semelhante). A demonstração desse Teorema não é difícil, e se encontra em [?]; veja também [?].

Cayley observou que já para polinômios de grau igual a 3 a subdivisão de $\hat{\mathbb{C}}$ análoga à demonstrada para o caso quadrático é bastante mais complicada, tendo sido esse um dos eventos inaugurais da teoria de iteração de funções complexas. Os conjuntos de chutes iniciais para os quais o método de Newton falha em aproximar as raízes são fractais, e exibimos um deles na Figuras 3.11. O desenvolvimento de teorias gerais a esse respeito segue ocupando pesquisadores até os dias atuais, conforme anunciado na Seção 3.2.4.

Para finalizar, mencionamos aqui um outro tipo de Sistema Dinâmico na esfera de Riemann. Uma *transformações de Möbius* é uma transformação racional de grau igual a 1, isto é, uma função $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ da forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}}, \quad (3.23)$$

onde assumimos que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ satisfazem $ad - bc \neq 0$. Se $c = 0$, então $f(\infty) = \infty$; e se $c \neq 0$:

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty. \quad (3.24)$$

Dentre as possíveis caracterizações das transformações de Möbius, destacamos que elas são composições de inversões baseadas em circunferências de $\hat{\mathbb{C}}$, e que levam

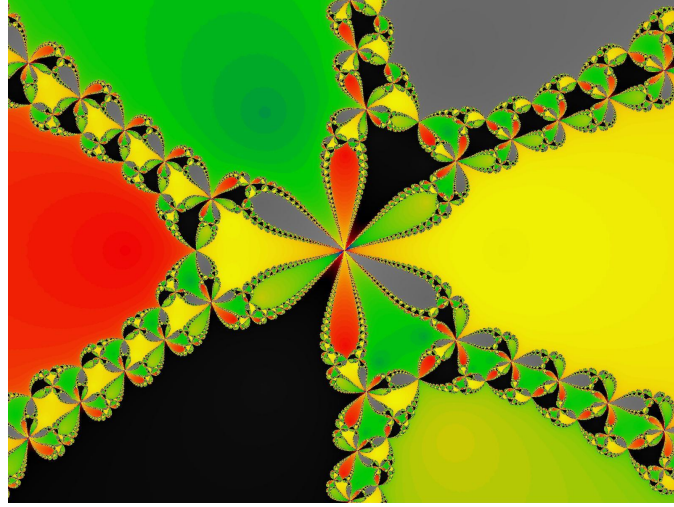


Figura 3.11: Método de Newton: $g(z) = z^6 + z^3 - 11$.

o conjunto de circunferências de $\hat{\mathbb{C}}$ em si mesmo. O estudo dessas transformações está profundamente atrelado ao estudo das transformações racionais mais gerais, mas não cabe aqui maiores explicações a esse respeito.

A dinâmica de uma única transformação de Möbius não é muito interessante. Entretanto, consideramos a dinâmica de certos *grupos* dessas transformações, chamados de *grupos Kleinianos*, sobre os quais indicamos [?, ?, ?]. Nesse contexto também surgem fractais delimitando as regiões nas quais a dinâmica é trivial, e exibimos alguns deles nas Figuras 3.12, 3.13 (retiradas de [?]). Além de oferecer perspectivas interessantes para a Teoria dos Grupos, os desenvolvimentos nesse assunto têm se mostrado extremamente úteis na Topologia e na Geometria. E, por incrível que pareça, a compreensão desses objetos têm se conectado fortemente com as questões acerca da forma do universo delineadas na Seção 3.3.

3.5 Conclusão

Comparando as Figuras da Seção 3.4.4 com nosso tratamento inicial da questão de se aproximar raízes quadradas, que em nada transparecia toda essa geometria, vemos o quanto a discussão matemática enriquece ao estendermos seus conceitos. Da reta contendo números racionais, ao intervalo fechado ou circunferência que

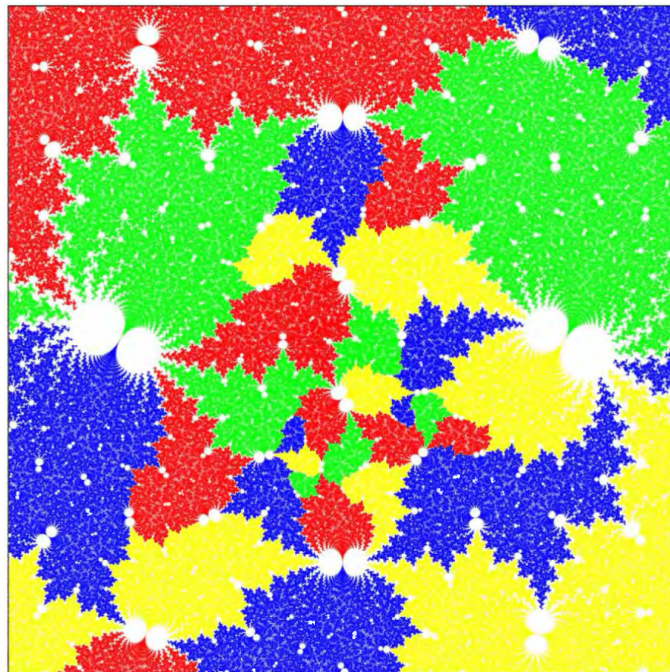


Figura 3.12: Fractal associado à dinâmica de um grupo kleiniano.

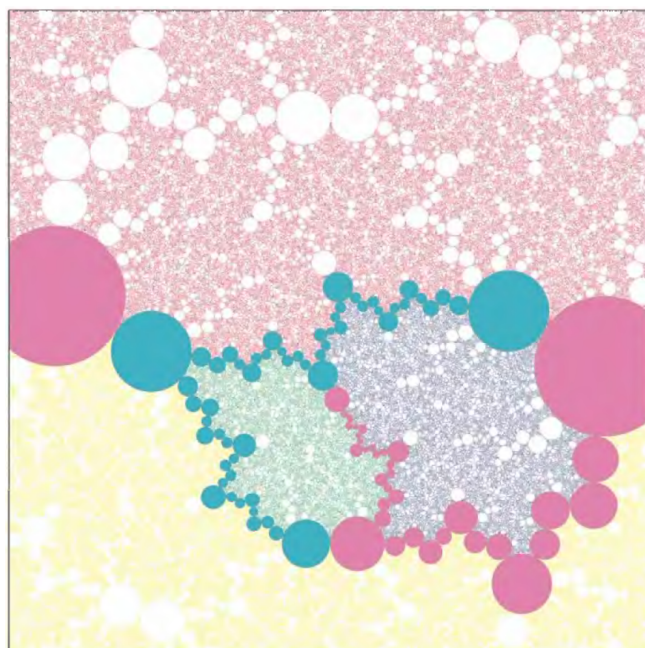


Figura 3.13: Fractal associado à dinâmica de um grupo kleiniano.

contém a reta, até a esfera que contém o plano, carregamos a visualização de certas relações de recorrência e esperamos que o leitor entenda, ou ao menos acredite, que nossa finalidade com isso não é apenas adorná-las ao colocá-las em belas figuras, mas que esse é um efeito colateral agradável do sólido desenvolvimento técnico da matemática como um todo. A consideração de novas possibilidades não é um luxo, mas uma necessidade.

Nem sempre novas idéias e perspectivas têm facilidade de serem aceitas pela comunidade matemática. Muito se falou nisso durante a Semana do Infinito, em reverência ao trabalho revolucionário de Georg Cantor, à sua subsequente defesa por David Hilbert, e com respeito às instigantes discussões de Fundamentos da Matemática da virada dos Séculos XIX e XX. Foi precisamente nesse período que brotaram os germes daquilo que se tornou a teoria moderna dos Sistemas Dinâmicos, da qual uns poucos aspectos foram brevemente delineado acima. Nessa teoria, a figura predominante é a de Henri Poincaré, que esteve entre os primeiros a contemplar alguns assuntos que tocamos na Seção 3.4.4 e muitos outros; cujo trabalho pioneiro aponta as direções da área até os dias atuais.

Poincaré também deixou registradas impressões a respeito do processo de descobrimento matemático, e das discussões acerca de seus fundamentos. Seu olhar era de desconfiança. Não é com a intenção de denegrí-lo que colocamos a citação abaixo, é claro que sua genialidade foi incontestável, e acreditamos que Poincaré apenas não viveu o bastante para ver a necessidade do “bizarro” e dos “monstros” na compreensão daquilo que ele mesmo estava estudando – nas Figuras da Seção 3.4.4 abundam curvas contínuas que não são deriváveis, por exemplo. Aparentemente, mesmo os grandes têm dificuldade em antever os caminhos da matemática.

Lógica de vez em quando gera monstros. O último meio século assistiu a emergência de uma multidão de funções bizarras que procuram remontar o mínimo possível as funções honestas que têm algumas aplicações. Sem continuidade, ou até com continuidade, mas sem derivadas, etc... Mais ainda, de um ponto de vista lógico, são essas funções estranhas as mais gerais, e aquelas que alguém encontra sem procurá-las aparecem apenas como casos especiais. Nos velhos tempos, quando alguém inventava uma nova função, era por causa de alguma aplicação prática; hoje, elas são inventadas com o propósito único de exibir falhas nos ra-

ciocínios de nossos pais, e essa é a única coisa que jamais será extraída delas. – Henri Poincaré (citado em [?], tradução do autor)

Agradecimentos

O autor agradece a todos os envolvidos na realização da Semana do Infinito, e em particular ao Prof. Márcio Nascimento, pelo convite. Que tenha sido a primeira de muitas!

Marcel Vinhas Bertolini (marcelvbertolini@gmail.com) - FACMAT - UFPA

Capítulo 4

Os diferentes usos do conceito de infinito e suas relações com o aprendizado da Matemática - Paulo Vilhena da Silva¹ e Marisa Rosâni Abreu da Silveira²

¹Doutor em Educação Matemática (UFPA). Professor do Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN/UFPA).

E-mail: pvilhena@ufpa.br

²Doutora em Educação (UFRGS). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/IEMCI/UFPA).

E-mail: marisabreu@ufpa.br

Resumo 4.1 Neste capítulo discutiremos sobre a compreensão do conceito de infinito por estudantes de matemática, mostrando que, por vezes, a confusão entre os diferentes usos (no cotidiano e na matemática) é a fonte dos mal-entendidos que trazem obstáculos ao aprendizado. Tal confusão ocorre pela adoção de uma concepção referencial de linguagem, a qual nos faz buscar uma essência, um significado único, ou um “objeto” como representante da palavra, impedindo-nos de atentar para os diferentes aspectos dos diferentes usos das expressões linguísticas, pois, embora aparentados, são distintos. Para tanto, usaremos como aporte teórico as ideias do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein e de alguns educadores que discutem o aprendizado do infinito na matemática. Para desfazer os mal-entendidos e confusões, sugerimos o diálogo entre professor e alunos. Acreditamos que dar voz ao aprendiz permite ao mestre compreender aquilo que não ficou claro em suas explicações e assim retomar a fala buscando outras palavras que dissolvam as confusões.

Palavras-Chave— *Aprendizado da matemática. Concepção Referencial de Linguagem. Infinito. Uso.*

Que é, pois, o tempo? Se ninguém me pergunta, eu sei; mas se quiser explicar a quem indaga, já não sei (Santo Agostinho, 2007, p. 120).

4.1 INTRODUÇÃO

O símbolo do infinito ∞ é a imagem de uma curva matemática chamada lemniscata e foi usado pela primeira vez para simbolizar a infinidade, segundo Morris (1998), em 1656 em *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis. O uso se difundiu rapidamente e atualmente o símbolo é usado em todo o mundo, por cientistas e matemáticos. Por outro lado, o conceito de infinito possui diversos usos no cotidiano, ou em outras áreas do saber, como a Literatura.

O infinito pode significar, para alguns, beleza e harmonia, pode causar encanto e prazer, para quem observa o céu e as estrelas, por exemplo, ou para quem contempla a “infinidade” do mar, ou ainda, para o matemático que se considera no paraíso¹ com as operações que pode realizar. Por outro lado, pode causar espanto a filósofos que buscam explicar *o que é* o infinito e trazer dores de cabeça aos físicos, que buscam a todo custo excluir o infinito de suas equações (MORRIS, 1998).

Na Matemática, ainda hoje, famosos paradoxos continuam a encantar ou tirar o sono de alguns estudiosos, como por exemplo o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, criado por Zenão, ou o paradoxo do Hotel de Hilbert, ou da Lâmpada de Thompson, na qual uma lâmpada é ligada e desligada infinitas vezes e se deseja saber seu estado final (ligada ou desligada) (MORRIS, 1998).

¹ David Hilbert resumiu o recém surgido respeito por Cantor dizendo: “Ninguém haverá de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós.”

Oportuno é o nome do evento ao qual o livro em questão faz alusão: *Semana do Infinito* do PARFOR Matemática, uma vez que o tempo também é elemento de reflexão de muitos pensadores, como Santo Agostinho, citado em Epígrafe. Seria o tempo linear e infinito ou cíclico? Conforme relata Agostinho (1998), ele costumava ser interpelado por pessoas que o questionavam “Que fazia Deus antes de criar o céu e a Terra?”. Conforme explica Morris (1998), Agostinho precisava de uma solução original e assim o fez: o pensador concluiu que o tempo simplesmente não existia antes da Criação. O tempo e o mundo nasceram juntos. Deus permaneceu eternamente fora do tempo. Perguntar o que fazia Deus antes da Criação não tinha sentido. Não houve nenhum antes.

Não é no tempo que és [o criador] anterior ao tempo: de outro modo não precederias a todos os tempos. E poderia o tempo fluir se não existisse? E como poderiam os séculos passar, se jamais houvessem existido? [...] Pois também criaste esse mesmo tempo, e este não poderia passar antes que o criasses (AGOSTINHO, 1998, p.119).

Solução curiosa essa dada pelo pensador! Quando fala do tempo, Agostinho (1998) parece tratá-lo como uma substância ou essência, o que nos lembra sua concepção referencial de linguagem, bastante conhecida e discutida na filosofia. Um trecho das *Confissões* pode ilustrar esse modelo:

Assim, pois, quando chamavam alguma coisa pelo nome, eu a retinha na memória e, ao se pronunciar de novo a tal palavra, moviam o corpo na direção do objeto, eu entendia e notava que aquele objeto era o denominado com a palavra que pronunciavam, porque assim o chamavam quando o desejavam mostrar. Que esta fosse sua intenção, era-me revelado pelos movimentos do corpo, que são como uma linguagem universal, feita com a expressão do rosto, a atitude dos membros e o tom da voz, que indicam os afetos da alma para pedir, reter, rejeitar ou evitar alguma coisa. Deste modo, das palavras usadas nas e colocadas em várias frases e ouvidas repetidas vezes, ia eu aos poucos notando o significado e, domada a dificuldade de minha boca, comecei a dar a entender minhas vontades por meio delas (AGOSTINHO, 1998, 1998).

Segundo esse modelo, a essência da linguagem humana seria a de denominar objetos: cada palavra teria um significado, o objeto que substitui, e frases seriam, portanto, ligações de tais denominações. Conforme argumenta Wittgenstein (1999), esse modelo de linguagem acarreta problemas filosóficos insolúveis, por buscar significados extralinguísticos, isto é, fora da linguagem, onde, na verdade, não há. Retomaremos essa questão mais à frente. Por ora, importa notar que os problemas com o infinito que confundem quem estuda matemática parecem ter a mesma fonte dos equívocos causados à filósofos e cientistas pela adoção da concepção referencial de linguagem: a busca por uma essência, um objeto ou um ente o qual a palavra “infinito” substituiria. Se a princípio a questão parece inofensiva, veremos que pode ser fonte de confusões de toda a sorte, conforme mostram obras como as de Silveira (2005), Borges (2015) e Clareto (2016).

Assim, este texto busca analisar como os alunos compreendem processos infinitos tais como: as dízimas periódicas, o valor de π e os infinitos números reais que podem existir, por exemplo, entre zero e um. Para nosso propósito, traremos o apoio teórico de Wittgenstein e alguns de seus comentadores, bem como educadores matemáticos que trabalham na perspectiva da filosofia da linguagem deste filósofo. Os conceitos discutidos pelo filósofo austríaco nos mostram os perigos da cegueira visual que nos acomete pela falta do domínio de técnicas, nos impedindo de perceber as nuances de uma expressão linguística. Nosso olhar precisa ser treinado para ver² aspectos que nos apontam para peculiaridades nos objetos e assim compreender seus significados.

No decorrer do texto discutiremos sobre as confusões que a adoção de uma concepção referencial da linguagem pode causar (seja na filosofia, seja na educação), sobre o infinito na matemática e as dificuldades dos estudantes em compreendê-lo, apontando, inspirados na filosofia de Wittgenstein, sugestões de como os professores podem contornar tais problemas.

² Conforme aponta Hebeche (2002), não devemos nos enganar com a *metáfora visual* utilizada por Wittgenstein. Os diferentes aspectos de uma expressão linguística são seus diferentes usos na linguagem e, portanto, apontam para o domínio de técnicas.

4.2 A CONCEPÇÃO REFERENCIAL DA LINGUAGEM E OS DIFERENTES USOS DAS PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS

Retomando a discussão sobre a concepção referencial de linguagem, pretendemos mostrar como Wittgenstein argumenta que esse modelo representa apenas uma das funções da linguagem e que pode causar confusões quando usada dogmaticamente. O filósofo austríaco é comumente distinguido, por seus comentadores, por primeiro e segundo Wittgenstein, de acordo com o período de vida intelectual. O primeiro é aquele do *Tractatus Logico-Philosophicus*, o qual percebia uma *forma lógica* nas proposições, de tal maneira que concebia a palavra e o seu referente. O segundo é aquele das *Investigações Filosóficas* em que reconhece que a *forma de vida* é que dá sentido às palavras.

Wittgenstein inicia as *Investigações* com uma citação de Santo Agostinho, a qual denota o modelo referencial de linguagem. Como vimos, podemos destacar a essência dessa concepção através dos seguintes enunciados: a) as palavras da linguagem denominam objetos; b) frases são ligações de tais denominações; c) cada palavra tem um significado, a saber, o objeto que a palavra substitui (1999, §01).

Wittgenstein então argumenta que esse sistema não é tudo aquilo que chamamos de linguagem, pois não a usamos apenas para nomear. Diz ele:

É como se alguém explicasse: “Jogar consiste em empurrar coisas, segundo certas regras, numa superfície...” – e nós lhe respondêssemos: “Você parece pensar nos jogos de tabuleiro, mas nem todos os jogos são assim. Você pode retificar sua explicação, limitando-a expressamente a esses jogos” (1999, §03).

O filósofo austríaco então sugere comparar a linguagem com as alavancas de uma locomotiva: todas são mais ou menos parecidas (e por isso podem causar confusões), afinal todas serão manobradas com a mão; entretanto, cada uma tem uma função diferente (1999, §12). Em outro trecho, Wittgenstein compara a linguagem com um conjunto de ferramentas. As ferramentas guardam semelhanças entre si, mas cada uma tem sua função (1999, §11).

As analogias devem lembrar-nos de que palavras são usadas para diferentes propósitos. Há inúmeras possibilidades de atividades nas quais empregamos a linguagem. Podemos usá-la para comandar, descrever, relatar, conjecturar, contar histórias, representar teatro, ler, contar piadas, cantar, pedir, agradecer, maldizer, saudar, orar etc. (1999, §23) e cada atividade, cada contexto possui técnicas de aplicação diferentes. As diversas práticas nas quais a linguagem está inserida, os diferentes contextos de emprego da linguagem, são chamados por Wittgenstein de *jogos de linguagem*: “Chamarei também de ‘jogos de linguagem’ o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está entrelaçada” (1999, §07, §23).

Assim Wittgenstein reconhece que o sentido de uma proposição não podia ser dado independente do contexto ou forma de vida na qual ocorre, diz ele: O significado de uma expressão linguística, agora, é (na grande maioria dos casos) seu uso na linguagem (1999, §43).

A palavra “água”, por exemplo, pode ser usada para referir-se ao elemento natural assim denominado; para ensinar uma criança ou a um estrangeiro sua aplicação como nome; sob a forma de um pedido, quando estamos sedentos; posso usá-la como pedido de rendição a meu adversário; como pedido urgente daquilo que ela denomina, para apagar um incêndio e muitos outros usos que podemos imaginar (MORENO, 2000, p. 55-56). Importante notar que, embora um conceito tenha diversos usos isso não pressupõe ambiguidade. O fato de usarmos palavras como água, número ou jogo em diferentes contextos não implica que tenhamos diferentes conceitos de água, jogo ou de número, mas sim diferentes usos desses conceitos.

Quando não nos damos conta dos diversos usos de nossas expressões linguísticas é que entramos em confusões, inclusive em contextos pedagógicos. O conceito de *infinito*, quando aplicado ao cotidiano, refere-se à uma quantidade gigantesca de algo, quando olhamos para as estrelas no céu por exemplo, ou a algo que não se pode aferir, quando dizemos que nosso amor por alguém é infinito. Porém seu uso na matemática é diferente, não se refere a nenhum objeto fora da própria linguagem, não é um número muito grande de algo, em suma, não descreve *nada*.

Considerar a palavra “infinito” um número (de algo) nos remete a uma concepção equivocada da natureza desta atividade, como se toda proposição da matemática devesse se referir a algo para além de sua expressão linguística, como se descrevesse uma suposta *realidade* matemática (GOTTSCHALK, 2014, p. 60-61).

Quando dizemos que temos três canetas, no dia a dia, ou 3 raízes em uma equação, no campo da matemática, esses usos, embora diferentes, se assemelham e podem fazer parecer que a matemática descreve algo. Ora, o uso do conceito de

infinito na matemática é diferente, não se refere a um número, mas a uma *técnica* de desenvolvimento ilimitado de uma sequência, expressando operações que não são limitadas (GOTTSCHALK, 2014).

E é nesse contexto que o aluno, ao lidar com o infinito pode se confundir, ao achar que este descreve algo, uma quantidade. Seu campo visual fica prejudicado quando não consegue *ver os diferentes aspectos* em um objeto. Tais elementos são de crucial importância para a compreensão do infinito, bem como de processos infinitos. Proposições ou conceitos matemáticos como: “a reta tem infinitos pontos”, “por um ponto passa infinitas retas”, o estudo dos conjuntos numéricos, das séries numéricas, das dízimas periódicas, da expansão de *pi* e assim por diante são conceitos que estão atrelados ao conceito de infinito e que confundem os alunos quando buscam significados fora da própria linguagem.

Cabe esclarecer, portanto, que as proposições matemáticas são normativas, não descrevem “entidades”, nem objetos, sejam eles empíricos, abstratos ou mentais, não descrevem *nada* (embora possuam inúmeros *usos* descritivos), e sim expressam normas, regras a serem seguidas. Para Wittgenstein, as proposições matemáticas fornecem um “quadro de referência” para descrições (WITTGENSTEIN, 1987). Assim, as proposições da matemática são paradigmas para proposições empíricas, são normas de substituição que descrevem fatos empíricos e nos autorizam a fazer descrições.

A proposição matemática “ $2 + 2 = 4$ ”, por exemplo, não descreve nada, não diz respeito a fatos empíricos, tem na verdade um papel prescritivo: *estabelece que quatro é o resultado correto quando somamos dois mais dois*. Se o resultado não for quatro, o cálculo realizado foi outro, ou então foi realizado de forma incorreta.

As proposições matemáticas diferem de proposições empíricas porque são atemporais e permitem generalizações. Quando demonstramos uma proposição matemática, sobre um triângulo retângulo, por exemplo, estamos demonstrando uma propriedade que é válida para *todos* os triângulos que possuam a propriedade de ser retângulo, independente se é aqui ou em outro país, hoje ou amanhã – ou seja, independentemente de fatos contingentes, como é o caso das proposições empíricas.

Proposições matemáticas não são verdadeiras nem falsas, estas são anteriores a verdade ou falsidade, definem o que faz sentido chamar de verdadeiro ou falso. A proposição de nosso exemplo anterior, “ $2 + 2 = 4$ ”, não é verdadeira nem falsa, mas estabelece que é falso dizer, por exemplo, que “dois mais dois é igual a 3”, ou seja, implica que há algum erro no cálculo.

Segundo Wittgenstein, a dificuldade em distinguir o uso normativo e o uso descritivo das proposições é uma das causas das confusões e problemas filosóficos (como também na educação). Muitas vezes, acreditamos estar descrevendo algo com certa proposição quando na verdade é uma convenção linguística que está sendo proposta. Por outro lado, é preciso notar que uma mesma proposição pode ser empírica ou gramatical, dependendo do contexto no qual ocorre, do uso que fazemos dela. Uma mesma proposição pode ser usada para a) descrever o próprio uso das palavras e b) descrever objetos:

Uma mesma afirmação, como “isto é branco”, pode ter, ora uma função descritiva, ora uma função normativa, dependendo do contexto da enunciação. Se for uma resposta à pergunta “o que é branco?” estará sendo empregada normativamente [uso a)], enquanto que em um outro contexto, pode estar sendo empregada simplesmente para descrever a cor de um determinado objeto [uso b)] (GOTTSCHALK, 2007, p. 117).

Gottschalk (2007), a partir de Wittgenstein, nos mostra um uso a) e um uso b) da proposição “isto é branco”. No uso a), ao apontar uma “amostra” da cor branca, não estamos falando de objetos, mas explicitando nossa convenção linguística de chamar “branco” a tal cor; no uso b), a frase “isto é branco” está sendo usada para descrever um objeto da cor “branco”. Como veremos, a compreensão do conceito de infinito e seus diferentes usos trouxe dores de cabeça também para filósofos e matemáticos.

4.3 O INFINITO NA MATEMÁTICA

Uma das maiores conquistas da matemática como linguagem tem sido a sua própria coragem imaginativa para enfrentar o conceito mais inacessível e paradoxal que poderia pretender a fragilidade temporal do intelecto humano: o conceito de infinito. Nós poderíamos quase dizer que a matemática é a linguagem que finge

falar do infinito, ou a ciência que pretende medir o infinito. (ORTIZ, 1994, p. 60).

O autor da epígrafe afirma que para Platão e Pitágoras, o infinito é o caos, o infinito não tem medida. A ideia do infinito também foi rejeitada por Aristóteles e pelos escolásticos, baseados nas mesmas contradições do conceito de infinito. Um dos argumentos típicos usados contra o infinito era conhecido como a aniquilação dos números, de acordo com este argumento, os números finitos seriam absorvidos pelos números infinitos.

Durante a idade média, a maior parte da matemática relacionada com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno tomou a forma de um conjunto de especulações em torno das ideias de Platão e Aristóteles sobre a relação entre ponto e a reta, a natureza dos incomensuráveis, os paradoxos de Zenão, a existência do indivisível e a potencialidade e atualidade do infinito. Embora neste momento, o debate sobre a natureza do infinito levou à conotações teleológicas em vez de matemáticas, considerando o infinito como propriedade exclusiva de Deus. Para Wittgenstein podemos dizer que *a classe de todas as classes equinumeráveis com o tipo de série infinita* tem o mesmo sentido que *o tipo de todos os anjos que se encaixam na ponta de uma agulha*. Tais afirmações são vazias de sentido, pois não encontramos uso para elas. Tal uso, ainda, não foi descoberto, mas deve ser inventado. (ORTIZ, 1994).

Pinto (2016), citando Tobias Dantzig, afirma que Arquimedes provavelmente influenciado pelos paradoxos de Zenão, concordava com o denominado horror ao infinito, já que o infinito era considerado um tabu, e, portanto, tinha que ser mantido de fora ou ainda camuflado.

E os debates sobre os fundamentos da matemática envolvendo a questão do infinito acabam sempre remetendo às posições divergentes de Platão e Aristóteles a esse respeito. Desde seu aparecimento na civilização ocidental até os dias de hoje, as histórias dessas disciplinas se entrelaçam, e os avanços de uma repercutem na outra. (PINTO, 2016, p. 606).

Para o intuicionismo, uma das correntes filosóficas da matemática, a matemática é separada da linguagem porque as construções mentais não têm linguagem. A demonstração matemática é de origem mental e tem um número infinito de membros com um número finito de acompanhantes linguísticos. O infinito não é visto como completo, fornecendo assim a ideia de estar aberto a novos passos. O processo de metodologia construtiva evita os problemas com o infinito já que os objetos são criados à medida de suas necessidades. Conforme Ortiz (1994), Hilbert em seu artigo “No infinito”, pretendeu esclarecer a ideia de infinito levando em consideração aspectos mais gerais, tal como a ideia de que não podemos manter o rigor matemático apenas com um número finito de inferências.

Wittgenstein critica tanto o intuicionismo como as demais correntes filosóficas da matemática e afirma que a matemática não tem fundamentos, ou melhor, ela se fundamenta nos jogos de linguagem, tal como nos ensinamentos da aritmética. De acordo com Marion (1998), o finitismo de Wittgenstein se insere na recusa em interpretar a questão sobre o infinito em termos epistemológicos. A, b, c, ..., e assim por diante. Aqui “e assim por diante” representa o resto do alfabeto, um número definido de letras. Isso é bem diferente de $1/3 = 0,33...$ e assim por diante. Aqui não há um número definido de dígitos, nem poderia haver para algum ser superior. Os dois exemplos têm gramáticas e regras diferentes. $0,33...$ não é um improvisto: tem uma gramática exata.

As questões que envolvem a ideia de infinito foram discutidas pelo filósofo porque talvez percebessem a ligação entre treino, repetição, imitação que estas palavras mantinham. Além de exemplos com dízimas periódicas, também encontramos suas observações sobre π .

O estranho da questão de se no desenvolvimento infinito de π aparecerá a figura φ (uma certa ordenação de cifras, por exemplo, ‘770’) só se aprecia quando se intenta formular a questão de uma maneira totalmente prosaica: seres humanos têm sido treinados para colocar signos de acordo com certas regras. Eles prosseguem, então, de acordo com esse treinamento, e dizemos que é um problema saber se alguma vez sequer escreverão a figura φ seguindo a regra dada. Mas que disse quem disse que uma coisa é clara: que no desenvolvimento infinito chegou ou não em φ ? (WITTGENSTEIN, 1987, p. 222)

A ideia de uso como prática de Wittgenstein influenciou a criação da máquina de pensar de Alan Turing. Ora, prática é algo que já fizemos repetidas vezes, de tal forma que criamos um hábito por fazer este algo, tantas vezes que se

torna um costume. A conceituação proposta por Turing desenvolvida na forma de uma teoria de autômatos infinitos mostra que as configurações, ou seja, o conjunto de elementos que determinam o comportamento da máquina em cada estágio, pode ser descrito como tabelas, tal como uma máquina construída para calcular uma sequência infinita de 0 e 1 alternada.

“Eu proponho a considerar a questão: ‘Máquinas podem pensar?’”, anuncia Alan Turing, num artigo quase-testamentário que ele publicou em 1950. Parece que tudo se juntou para que este famoso texto assombrasse os debates provocados pelo que é chamado convenientemente de a "revolução tecnológica" da segunda metade do século XX: a própria questão que Turing aborda - o "pensamento" das máquinas - no momento em que aparecem os primeiros computadores; fato que ele resume no artigo e que a resposta que fornece para sua pergunta é que apenas razões psicológicas impedem que as máquinas possam “pensar”.

Turing submete a máquina a um teste - o famoso jogo de imitação e formula a hipótese de que o "pensamento" não poderia ser recusado à máquina que passaria neste teste. Wittgenstein desempenhou um papel crucial no pensamento das máquinas de Turing pelo intercâmbio intelectual que os dois estabeleceram durante o Curso sobre as Fundamentos da Matemática, dado pelo filósofo em 1939 em Cambridge (GOUTEFANGEA, 2018).

Suponhamos que todo objeto espacial consista em um número infinito de pontos, então é claro que não posso enumerá-los todos nomeando-os quando falo deste objeto. Este seria um caso em que não posso chegar à análise completa no sentido antigo, e este é talvez justamente o caso usual (WITTGENSTEIN, 2005, p. 122).

O filósofo nos alerta que a palavra infinito gera muitas dúvidas para o uso em situações cotidianas, justamente pelo motivo que a ideia de infinito no cotidiano se mistura com a ideia de infinito na matemática. E assim podemos acrescentar sobre a concepção de infinito para Wittgenstein.

É muito engraçado se comportar como se estivesse decepcionado por não ter encontrado nada infinito no cálculo; mas não a questão: qual é o uso cotidiano da palavra "infinito", que proporciona significado para nós, e qual é agora a sua ligação com esses cálculos matemáticos? (WITTGENSTEIN, 1987, p. 114)

O sentido da palavra infinito deveria mudar conforme o contexto de sua aplicação. Mas temos a tendência de buscar um único sentido, ou seja, um sentido verdadeiro, como se ele existisse, um sentido que exprimisse a essência da palavra. Como veremos, tais confusões ocorrem também com os estudantes de matemática em diferentes níveis de ensino.

4.4 O INFINITO NO APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

O cálculo diferencial e integral de funções com uma variável foi criado simultaneamente por Leibniz em seus estudos em matemática e por Newton na física. O cálculo infinitesimal utilizado nos limites e na continuidade de uma função traz sérios problemas de aprendizagem para os estudantes. Eles têm dificuldades em representar as pequenas e as grandes cifras, de tal forma que um número pode ser tão grande a tal ponto de ser representado pelo infinito, e outro número pode ser tão pequeno que tende a zero. Estas situações requerem um nível de abstração que vai muito além daquilo que alguns estudantes conseguem atingir. A falta de imaginação ocorre porque não conseguem visualizar estes números.

Lizcano (1993) faz uma análise entre o pensamento chinês, composto por analogias e oposições, e o pensamento grego, composto por abstrações. O complexo simbólico yin/yang trabalha com a determinação de opostos, enquanto que a dialética do ser e não-ser impede a episteme grega de pensar a negatividade. Para o autor, o princípio de não-contradição (ser/não-ser) representa um obstáculo epistemológico. (SILVEIRA, 2005).

No aprendizado da matemática em nível superior, os estudantes têm dificuldades de lidar com grandes cifras, tal como ao calcular o $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1}$ encontra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$. Parece não reconhecer que um número tão grande comparado ao infinito mais uma unidade, não lhe tira a característica de continuar sendo infinito.

Outro exemplo é $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1}$ que deveria ser calculado como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$ o

estudante encontra $x+1$. O aluno parece não compreender que uma unidade dividida por um número muito grande deve tender a zero.

Parece-me perfeitamente possível que as manchas em nosso campo de visão sejam objetos simples, desde que não percebamos nenhum ponto separadamente dessas manchas; a imagem visual das estrelas certamente parece estar neste caso. [...] não vejo todas as partes do meu campo visual *teórico*. Quem pode saber se vejo uma infinidade de pontos! (WITTGENSTEIN, 2005, p. 127)

Em sua pesquisa, Borges (2015) buscou refletir sobre as concepções de estudantes de diferentes níveis escolares (ensino fundamental e ensino médio) a respeito do infinito na matemática. Para tal, aplicou um questionário com as seguintes perguntas:

1. Quantos números existem entre 0,18 e 0,6?
2. Qual é o maior número entre 0 e 1, desconsiderando o 1?
3. Existe algum número entre 2,9 e 3? Se sim, qual é?
4. Descreva com suas palavras o que você acha que é o infinito (BORGES, 2015, p. 22).

O autor concluiu, a partir das respostas ao questionário, que os alunos, de modo geral, não têm a ideia e não fazem o uso correto do infinito, visto que encontrou o uso do termo infinito de maneira equivocada e o conceito de infinito deturpado. Um dos equívocos mais recorrentes é considerar o infinito um número. Conforme o autor “Alguns [estudantes] afirmaram ser infinito o maior número” (BORGES, 2015, p. 25) ou ainda “Uma delas [das respostas obtidas] é a ideia errônea de que o infinito é um número, o que é muito comum entre os alunos (BORGES, 2015, p. 25).

Esse equívoco dos aprendizes demonstra a confusão que fazem entre usos normativos e referenciais do conceito de infinito, não atentando para seus diferentes usos, na matemática e no cotidiano, conforme aponta Gottschalk (2014), apoiada em Wittgenstein:

Não distinguir esses diferentes usos (o empírico e o gramatical), leva a mal entendidos, como no caso das proposições transfinitas [...], a saber, a imagem de que seriam números de algo no campo da matemática. Como a imagem do infinito formada pela linguagem ordinária é a de algo muito grande ou então muito pequeno (infinitesimal), no cotidiano tem uma função descritiva [...]. [Na matemática] são apenas técnicas de expansão ilimitada de sequências matemáticas. Consequentemente, não ter claro o modo como é empregada na matemática só leva a confusões (GOTTSCHALK, 2014, p.62).

De modo semelhante, o diálogo abaixo mostra o professor de matemática e seus alunos discutindo sobre conjuntos numéricos. As respostas dos alunos ao professor apontam para a dificuldade de compreenderem o significado de infinito na sequência dos números em diferentes conjuntos numéricos.

Bem, o assunto de hoje é conjuntos numéricos.
 – Então, o conjunto dos números racionais é infinito?
 – Sim, sim.
 – Mas por quê?
 – Aí complicou, professor!
 Silêncio... Estranho, mas parece que de-poucas-palavras ficaram eles, meninos e meninas.
 – Tá bom, vou dar uma ajudinha: entre 0 e 1 tem quantos números?
 Ninguém responde... Odlenir continua, determinado:
 – Tem o 0,1; o 0,2; o 0,01; o 0, 02; o 0,3...e, não posso fazer isso infinitamente? Então, entre dois números racionais tem infinitos números. Ou seja, os conjuntos dos racionais é infinito.
 Legal! (CLARETO, 2016, p. 321).

Apontamos aqui alguns exemplos de problemas de visão, como afirma Wittgenstein na citação anterior. Alguns estudantes não conseguem compreender conceitos matemáticos que envolvam a ideia de pequenas e grandes cifras, justamente porque essas cifras estão além de seus campos de visão. É preciso, então, treinar seus “olhares”: ora, como vimos, compreender o infinito, na matemática, significa dominar técnicas de expansão ilimitada (GOTTSCALK, 2014), daí que compreender o infinito implica compreender seus diversos usos e dominar as técnicas a ele relacionadas.

Talvez se diga que as falhas do aluno se devem a explicações confusas por parte do professor. Entretanto, segundo Wittgenstein, nem sempre é possível exibir explicações completas a respeito do significado ou do emprego de uma expressão linguística. Alguns conceitos, como o de jogo, são vagos, não tem uma definição rígida, de modo que não poderia haver uma explicação que abrangesse todos seus usos nos diferentes contextos. Mesmo uma explicação completa – nos casos em que há uma – não garante que não haverá mal-entendidos (BAKER & HACKER, 2005, p. 38). Não existe tal coisa como uma explicação do significado ou uma regra para o uso de uma expressão que esteja imune a equívocos (SILVA, 2011).

Está claro que não temos a intenção de afirmar que, caso uma explicação não obtenha sucesso, o professor estará de mão atadas. Pelo contrário, outras muitas explicações podem ser dadas a fim de corrigir possíveis mal-entendidos ou dúvidas. Dependendo da ocasião, podemos formular novas explicações, apontar para objetos, usar gestos, dar novos exemplos e assim por diante (SILVA, 2011).

Quando buscamos explicar o uso da palavra infinito para que nossos estudantes compreendam seu significado, podemos apontar para os diferentes objetos matemáticos que se manifestam em diferentes usos, tal como um número muito grande que tende a infinito, infinitas casas decimais que se repetem em forma de períodos como as dízimas periódicas, uma expansão do número π , etc, porém, não basta enunciar as diferentes manifestações da ideia de infinito para que os estudantes consigam visualizá-lo. O campo visual dos estudantes, muitas vezes, não consegue perceber os infinitos números que existem entre dois números inteiros quaisquer. Perceber que um número infinitamente pequeno tende a zero, necessita da ideia de limite que parece que alguns estudantes não dispõem.

Nesse sentido, os jogos de linguagem da filosofia de Wittgenstein nos fornecem a oportunidade de desvelar os sentidos da palavra infinito que alguns estudantes não conseguem perceber. Para tanto, é necessário estabelecermos um diálogo com nossos estudantes, lançando perguntas e colhendo nas suas respostas aquilo que compreenderam de nossas explicações, pois para Wittgenstein, o professor tem sob seu domínio explicações e exemplos para ensinar. Oportunizar a palavra ao aluno é uma forma de obtermos um feedback de nossa explicação: é na escuta de suas compreensões que podemos retomar nossas palavras para dirimir as confusões oriundas da polissemia de nossa linguagem. Assim, ao compreendermos o que foi interpretado de nossa exposição, podemos buscar no repertório da nossa linguagem palavras mais adequadas, palavras que façam sentido e que tenham forma de vida.

O diálogo fornecido por Clareto (2016) aponta para uma mostra de como é possível compreendermos aquilo que o estudante não compreende. O professor ao dizer em sua explicação que o conjunto dos números racionais é infinito é diferente de estabelecer um diálogo com perguntas e respostas. O monólogo do professor quando fala consigo mesmo é diferente do diálogo com os estudantes que busca uma compreensão mútua, um mesmo universo discursivo, um jogo de linguagem com palavras com sentido.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os paradoxos de Zenão, embora possam parecer pegadinhas ou charadas extravagantes, tornam-se profundos e complexos quando analisados em seus pormenores. Não é toa que tais paradoxos que tiveram a atenção de grandes filósofos, como, por exemplo, o eminente Bertrand Russel, que os caracterizou como *incomensuravelmente sutis e profundos*. Conforme aponta Morris (1998), as dificuldades enfrentadas pelos físicos ainda hoje nos mostram que o infinito continua sendo tão misterioso quanto no tempo de Zenão.

Tendo em vista que o conceito de infinito sempre foi uma pedra no sapato dos físicos, filósofos e até dos matemáticos no passado, não é de se surpreender que confunda também os estudantes atualmente. Embora em nosso dia a dia digamos que a quantidade de grãos de areia em uma praia seja infinita, ou que o número de estrelas no céu seja infinito, sabemos que não são verdadeiramente infinitos, mas sim uma quantidade muito grande, além do que poderíamos contar.

Na matemática, por outro lado, temos usos distintos e mais complexos: muitas vezes causa espanto aos alunos saberem que há infinitos maiores que outros, ou que o resultado da divisão do infinito por um número qualquer ainda é infinito, ou que uma reta tem infinitos pontos. Como vimos, considerar o infinito um número ou a essência de algo é o que nos confunde. Ora, de acordo com Wittgenstein (1987), o conceito de infinito é dado pelo seu uso, logo, representa uma família de usos aparentados, aplicados em diferentes contextos.

Entra em cena a importância do papel do professor, que deve utilizar a mística, a beleza e as sutilezas complexas e

intrigantes da matemática para encantar os aprendizes e tornar suas aulas fonte de inspiração e de criatividade, desfazendo os mal-entendidos e confusões.

4.6 REFERÊNCIAS

AGOSTINHO, Santo. **Confissões**. São Paulo: Paulinas, 1998.

BAKER, Gordon. P. & HACKER, Peter. M. S. **Wittgenstein: understanding and meaning – part I**. Oxford: Blackwell, 2005.

BORGES, Bruno Andrade. **O infinito na matemática**. São Carlos: USP, 2015. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

CLARETO, Sônia Maria. O infinito e seus tamanhos: nos becos da sala de aula, que matemática acontece? In.: VILELA, D. S.; MONTEIRO, A. **Paradoxos do infinito e os limites da linguagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. pp. 315-353.
GOTTSCALK, Cristiane Maria Cornelia. A compreensão de significados matemáticos: entre o transcendental e o empírico. In: MORENO, Arley Ramos. (Org.). **Compreensão: Adestramento, Treinamento, Definição**. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2014, v. 68, p. 55-76 (Coleção CLE).

GOTTSCALK, Cristiane Maria Cornelia. Três Concepções de Significado na Matemática: Bloor, Granger e Wittgenstein. In: MORENO, Arley Ramos. (Org.). **Wittgenstein: aspectos pragmáticos**. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007, v. 49, p. 95-133 (Coleção CLE).

GOUTEFANGEA, P. **Alan Turing: la “pensée” de la machine et l’idée de pratique**. Philosophie. Université de Nantes, 1999. Français. <NNT: 1999NANT3003>. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01298350>. Acesso em 25/03/2018.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

MARION M. **Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1998.

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein: os labirintos da linguagem - ensaio introdutório**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2000.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

ORTIZ, José Ramón. El concepto de infinito. Asociación Matemática Venezuela. **Boletín** v. I, n. 2, 1994.

PINTO, P. R. M. Aspectos da história do número π na perspectiva duma filosofia da matemática de inspiração wittgensteiniana. **Sapere aude**. Belo Horizonte, v. 7, n. 14, p. 605-626, Jul./Dez. 2016.

PORTO, A. As dízimas periódicas na filosofia da matemática de Wittgenstein. **Philosophos**. V. 8, n. 2, jul./dez. 2003, pp 127-157.

PORTO, A. S. Singularité et perception visuelle. **Philosophiques**, vol. 39, n° 1, 2012, p. 75-100. <http://id.erudit.org/iderudit/1011611>

SILVA, Paulo Vilhena da. **O aprendizado de regras matemáticas: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão**. Belém: UFPA, 2011. Dissertação (mestrado em Educação Matemática).

SILVEIRA, M. R. A. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: UFRGS, 2005. Tese (Doutorado em Educação).

WITTGENSTEIN, L. **Carnets 1914-1916**. Paris: Gallimard, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas**. São Paulo: Nova cultural, 1999.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

Capítulo 5

Infinitamente Pequeno - João Cláudio Brandemberg¹

¹ Faculdade de Matemática- FACMAT/ICEN – Universidade Federal do Pará, Brasil.
Email: brand@ufpa.br

Resumo 5.1 — *Objetivamos discutir os conceitos de indivisível e infinitésimo, suas origens e sua importância para o desenvolvimento do Cálculo até a metade do século XVII. Essencialmente faremos uma discussão da natureza dos infinitamente pequenos nas visões de Johann Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) apontando diferenças e semelhanças, sua aceitação e o seu uso em problemas de quadraturas e cubaturas.*

Palavras-Chave— *Indivisível, Infinitésimo, Infinito, História do Cálculo.*

5.1 Introdução

Os caminhos que levam ao conceito de Limite remontam a antiguidade clássica. De fato, foi o "horror do infinito" grego que impediu o desenvolvimento de uma teoria efetiva dos limites sendo que as provas dos problemas, a época, eram realizadas por um método de dupla redução ao absurdo. Uma discussão deste ponto de vista, pode estar ligada as concepções dos conceitos de Indivisíveis (infinitamente pequenos) e Infinitesimais.

No pensamento grego antigo, Pitágoras de Samos (550/495 a.C.), seguindo os atomistas, define ponto como “uma linha sem extensão”; para Platão (428/347 a. C.) ponto é “o início de uma linha: uma linha indivisível”; Aristóteles (384/322 a. C.), discípulo de platão faz a seguinte indagação “se o ponto é uma linha indivisível, então deve haver um fim” e Euclides (323/285 a. C.), em seu Elementos, nesta direção, define ponto como “o que não tem partes”. Assim, a Geometria se origina da definição de ponto, um conceito abstrato da lógica.

Com as informações e as controvérsias ligadas aos paradoxos de Zenão (490/430 a. C.), envolvendo o infinito, temos em Matemática duas fases distintas: uma de contagem de elementos discretos, separados e indivisíveis e outra de medida de quantidades que são contínuas e portanto infinitamente divisíveis (BARON, 1985a, p.22).

De fato se considerarmos o material contínuo composto de entes (pontos) indivisíveis, como é possível obter desses pontos segmentos (de retas) finitos e se por outro lado, um ponto tem dimensão, como pode ser indivisível. Temos um paradoxo.

Assim, a noção de infinitésimo (ou quantidade infinitesimal) está diretamente relacionada ao contínuo matemático. De fato ela surge, a partir do lema de Eudoxo de Cnido (408/355 a. C.): “se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor que a sua metade, e do resto não menos que sua metade, e se prosseguir, no final restará, uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie. O método de exaustão de Eudoxo foi aplicado por Arquimedes na sua quadratura do círculo.

O método permite, a cada passo, estimar o erro que se comete numa *pseudo-quadratura*. De fato, ao inscrever um quadrado no círculo dado, verificamos que a diferença entre a área das duas figuras é menor que a metade da área do círculo dado. Se a seguir construímos um octógono, verificamos que a diferença entre as áreas em questão é menor que a metade da diferença anteriormente considerada. Assim, podemos reiteradamente construir polígonos inscritos no círculo com o dobro de lados do polígono inscrito no passo anterior. Podemos obter um polígono cuja diferença para a área do círculo seja tão pequena quanto se queira.

Com o renascimento, ocorre uma redescoberta, valorização, do saber matemático dos gregos (matemáticos helênicos). De fato, a partir de 1558 os trabalhos de Arquimedes de Siracusa (287/212 a. C.), se tornam acessíveis à

comunidade científica graças aos esforços de Frederico Commandino (1509-1575) que em 1565 produziu um livro sobre volumes e centro de gravidade utilizando as ideias dos matemáticos antigos (WUSSING, 1998).

O método de quadraturas seguido por Commandino e outros matemáticos da época adotavam a teoria do método de exaustão desenvolvido na antiguidade. Inicialmente, as quadraturas de figuras limitadas por curvas (curvilíneas) eram obtidas da comparação com retângulos inscritos e circunscritos que produziam valores superiores e inferiores ao desejado. O que pode caracterizar o método da exaustão como um dos primeiros elementos no desenvolvimento de uma matemática infinitesimal.

Os infinitésimos aparecem no *Método* de Arquimedes, sem magnitude, uma vez que não são obtidos da divisão de entes geométricos. Assim, os trabalhos de Arquimedes, seus resultados e métodos, passaram a servir de modelo para os diversos métodos infinitesimais desenvolvidos durante o século XVII.

Enquanto protestos de louvor eram devotados a Arquimedes, por alguns, outros esforçavam-se em construir demonstrações mais rigorosas. Acentuou-se o hiato entre as demonstrações de geometria clássica dos antigos e os métodos novos e excitantes do século XVII, especialmente com a introdução do simbolismo algébrico (BARON, 1985b, p. 3).

A influência de Arquimedes se faz presente quando se estudam os trabalhos de Johann Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Suas contribuições são fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo e nos mostram a riqueza e a força do pensamento arquimediano.

Associados, o rigor dos métodos gregos e o simbolismo algébrico introduzido por François Viète (1540-1603) e René Descartes (1596-1650), proporcionam a admissão de novas técnicas que permitem o uso intuitivo do infinito em uma profusão de métodos infinitesimais para o cálculo de áreas e volumes (BOYER, 1993) (EVES, 2002).

Os astrônomos Johann Kepler e Galileu Galilei foram os primeiros a fazer uso dos indivisíveis (infinitamente pequenos). Kepler aplicou suas ideias no cálculo de áreas e volumes e Galileu no estudo do movimento. Cavalieri, aluno e associado de Galileu, transformou o uso dos “indivisíveis” num poderoso conjunto de técnicas para comparar áreas e volumes (BARON, 1985b, p. 11-12).

O uso dos indivisíveis, como uma técnica de resolução de problemas, influenciou vários matemáticos como Giles de Roberval (1602-1675), Blaise Pascal (1623-1662), John Wallis (1616-1703) e Pierre de Fermat (1607-1665), que tentaram modificá-los, com novas definições, para justificarem seu uso (BARON, 1985b).

Foi o Marquês de L'Hospital (1661-1704), que em sua obra que popularizou os métodos infinitesimais (*Infiniment petits*), onde faz um histórico, afirmando que Descartes, Fermat e também Barrow, Leibniz e Jean Bernoulli são adeptos desse método (ROQUE, 2012, p.352).

5.2 Os infinitamente pequenos de Kepler e Cavalieri

Na direção do desenvolvimento do que viria a se tornar o Cálculo Infinitesimal, Johann Kepler se notabiliza por sua geometria infinitesimal, onde ele pode exercer suas características científicas, místicas e sua criatividade imersas na observação de fenômenos naturais.

Entre seus trabalhos destacamos o Cálculo de tonéis, *Stereometria Doliorum Vinariorum* (1613), onde Kepler executa um estudo sistemático para medir a capacidade de tonéis de vinho e obteve um cálculo aproximado para o volume de outros (92) corpos gerados por rotação de cônicas.

Do ponto de vista metodológico, a partir de 1616, com Kepler o conceito de infinitamente pequeno, usado até então no sentido filosófico, passa a ser utilizado na prática para o cálculo da área do círculo.

Para Kepler a superfície de um círculo é equiparável a um número infinito de triângulos isósceles; logo a área do círculo é igual à área do triângulo ABC, onde A é o centro do círculo, o cateto AB é o raio do círculo e o Cateto AC é o comprimento (retificado) da circunferência (WUSSING, 1998, p. 143).

Ele utiliza a mesma técnica para obtenção do volume da esfera (considerando cones (ou pirâmides) com vértices no centro da esfera e bases situadas em sua superfície). A seguir, aplica sua técnica infinitesimal relacionada ao cálculo astronômico a partir da obtenção de segmentos elípticos.

Em sua atividade, relacionado ao cálculo de uma área ou um volume, Kepler dissecava suas figuras (planas ou espaciais) em um número infinito de peças infinitesimais, os indivisíveis, que sejam convenientes para a solução do seu problema. Uma derivação das técnicas de Eudoxo e Arquimedes. Assim, por exemplo, o “indivisível” da área é um “triângulo” e do volume uma “pirâmide” (ou cones).

Bonaventura Cavalieri ampliou as possibilidades da “matemática infinitesimal”. Ele aderiu à concepção atomística dos gregos; e em 1635, com a publicação de seu livro *Geometria Indivisibilibus Continuum*, busca sistematizar todo esse conhecimento.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), aluno associado de Galileu, transformou o uso da reta e de superfície “indivisíveis” num conjunto poderoso de técnicas para comparar áreas e volumes. Esses métodos estão contidos em dois livros difíceis e longos, a *Geometria Indivisibilibus Continuum Nova Quadam Ratione Promota* (Bolonha, 1635) e as *Exercitationes Geometricae Sex* (Bolonha, 1647). Estes livros foram imediatamente difundidos; por alguns combatidos e por outros defendidos e admirados, tornaram-se extremamente influentes durante o século (BARON, 1985b, p. 12).

Em sua concepção Cavalieri, buscando explicitar o que se entende por indivisível, utiliza a seguinte explicação: “as figuras planas podem ser pensadas como um tecido de eixos (retas) paralelos; os sólidos seriam como livros, compostos por folhas (planos) paralelos. No entanto, a diferença entre uma folha de papel e um indivisível é que elas existem em um número finito e possuem uma espessura (finita)” (WUSSING, 1998, p. 144).

Os indivisíveis de Cavalieri podiam ser interpretados como formas infinitamente “finas” e que possuem uma dimensão inferior em uma unidade ao conjunto contínuo formado por todas elas. Sua aplicação dos indivisíveis ao cálculo de áreas de figuras planas é realizada a partir da obtenção de uma reta tangente a figura (regula) e uma reta tangente oposta. Para o caso de sólidos ele utiliza planos tangentes (paralelos).

Assim, Cavalieri formula seu princípio, na concepção original, composto das seguintes assertivas: (i) O total de indivisíveis de uma figura independe da diretriz (regula); (ii) As figuras planas (sólidos) estão na mesma proporcionalidade que a totalidade de suas retas (planos), tomadas a partir de uma diretriz (regula) qualquer.

De fato, o resultado que geometricamente expressamos a partir do movimento da regula gerando interseções (retas ou planos) pode ser enunciado como: *Se construirmos duas figuras planas quaisquer entre as mesmas paralelas e se ao traçarmos retas equidistantes as paralelas os segmentos que interceptam as figuras forem iguais, então as figuras planas serão também iguais e se construirmos duas figuras sólidas entre os mesmos planos paralelos e ao traçarmos planos equidistantes dos planos paralelos as seções que interceptam as figuras forem iguais, então as figuras sólidas também serão iguais* (BARON, 1985b, p. 14).

Para Cavalieri, se dois sólidos com a mesma altura, que tem suas seções planas de mesmo nível com a mesma área, inferimos que eles têm o mesmo volume. Seu método é pragmático, isto é, ele é considerado válido porque produz resultados corretos (WUSSING, 1998).

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes. De fato, a aceitação como evidentes, destes princípios pode resolver diversos problemas de medidas de grandezas, como os casos de determinação da área compreendida por uma elipse de semi-eixos a e b ; e na determinação do volume de uma esfera de raio r (EVES, 2002, p. 426).

Cavalieri considera a relação entre as ordenadas da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ e da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ dada por $\frac{b}{a}$ e conclui que *área da elipse* $= \frac{b}{a}$ *área da circunferência*, isto é, *área da elipse* $= \frac{b}{a}(\pi a^2) = \pi ab$. Para o volume da esfera ele conclui, a partir da verificação da equivalência de áreas entre os círculos gerados no hemisfério superior da esfera de raio r dada e as respectivas “coroas circulares” na figura obtida do cilindro de volume πr^3 menos o cone de volume $\frac{\pi r^3}{3}$, que $V_{er} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Para Kepler, como frisamos anteriormente, por exemplo, para calcular o volume da esfera, ele a decompõe em um infinito número de pirâmides (ou cones) com vértices no centro e base na superfície da esfera, cuja área é dada por $A_s(E) = 4\pi r^2 = \sum_{i=1}^n b_i$. Kepler considera como alturas o raio da esfera. O cálculo é feito, adicionando-se o volume destas pirâmides, $V(p_i) = \frac{b_i r}{3}$, como segue:

$$V(E) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i h}{3} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i r}{3} = \frac{r}{3} \sum_{i=1}^n b_i = \frac{r}{3} A_s(E) = \frac{r}{3} 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Com base no que vimos argumentando, podemos comparar suas abordagens afirmando que em sua atividade Kepler toma uma figura (sólida ou plana) e a decompõe em figuras infinitesimais adequadas, cujas áreas e volumes são de fácil obtenção, e as adiciona enquanto que Cavalieri se utiliza de uma correspondência entre os elementos indivisíveis (planos, retas, pontos) de suas (duas) figuras; ele obtém área e volume de uma a partir da outra (conhecida). Logo, para Kepler os indivisíveis são de mesma dimensão enquanto que, para Cavalieri os indivisíveis são de diversas dimensões.

5.3 Considerações

Na direção da argumentação de Zenão, a concepção atomística (das monadas) pitagórica de explicação do universo leva a contradições.

De fato, se em um segmento de reta a um número finito (muito grande) de monadas no segmento e elas apresentam uma magnitude positiva (muito pequena), podemos obter outro segmento (medindo a metade) composto de monadas, cujo tamanho seria a metade do tamanho dos “indivisíveis” originais, o que caracteriza sua divisibilidade. Temos uma contradição (CARAÇA, 1984, p. 78).

Por outro lado, se o número de indivisíveis em um segmento de reta é infinito, e se cada um possui magnitude positiva, então sua disposição justaposta é infinita; outra contradição (CARAÇA, 1984, p. 78).

Os problemas dos indivisíveis continuam e se confrontam com a questão da incomensurabilidade. A saber, dois segmentos de retas (grandezas) são incomensuráveis se para qualquer número de “divisões” realizadas, jamais se obtém uma magnitude (grandeza de mesma espécie: segmento) para ser sua unidade comum de medida. Assim, se os segmentos são compostos de indivisíveis, estes átomos (monadas) são uma medida comum e quaisquer dois segmentos são comensuráveis. Agora, se temos dois segmentos incomensuráveis, não existe uma unidade comum que eles possam compartilhar logo, os indivisíveis não existem (CARAÇA, 1984) (BARON, 1985b) (WUSSING, 1998).

Com base nessas contradições o filósofo Aristóteles concluiu que o conceito atribuído aos indivisíveis estava errado; afirmando que grandezas contínuas podem ser divididas *ad infinitum*.

Coube a Arquimedes, o maior dos matemáticos antigos, assumindo todos os riscos, demonstrar em seus trabalhos a poderosa ferramenta matemática em que se constitui o conceito dos infinitamente pequenos (indivisíveis).

Com a adoção do “método” por influentes matemáticos dos séculos XVI e XVII, como os citados Kepler e Cavalieri, o conceito de indivisível revolucionou a prática matemática moderna, possibilitando cálculos de áreas e volumes de figuras geométricas mais gerais.

No final do século XVII, finalmente, o “método” foi formalizado por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), dando origem ao que conhecemos por Cálculo, um sistema matemático que pode ser aplicado na resolução de uma grande gama de problemas.

5.4 Referências

- BARON, M. E. **A Matemática grega**. Curso de História da Matemática Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 1. Brasília, DF: Universidade de Brasília, 1985a.
- BARON, M. E. **Indivisíveis e Infinitésimos**. Curso de História da Matemática Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 2. Brasília, DF: Universidade de Brasília, 1985b.
- BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 1993.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa Editora, 1984.
- EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.
- ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro, RJ: Zahar, 2012.
- WUSSING, H. **Lecciones de História de las Matematicas**. Espanha: Siglo XXI Editores, 1998.



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA