

CRISTINA LÚCIA DIAS VAZ

NOÇÕES ELEMENTARES SOBRE DIMENSÃO



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA

CRISTINA LÚCIA DIAS VAZ

NOÇÕES ELEMENTARES SOBRE DIMENSÃO

1ª Edição

BELÉM - PARÁ



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2019



Todo conteúdo deste trabalho, exceto quando houver ressalva, é publicado sob a licença **Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional**.

Copyright © 2019 Editora EditAedi Todos os direitos reservados.

REITOR

Dr. Emmanuel Zagury Tourinho

VICE-REITOR

Dr. Gilmar Pereira da Silva

COMITÊ EDITORIAL

Presidente:

Dr. José Miguel Martins Veloso

Diretora:

Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz

Membros do Conselho:

Dr. Aldrin Moura de Figueiredo

Dr. Iran Abreu Mendes

Dra. Maria Ataíde Malcher

AUTORA

Cristina Lúcia Dias Vaz

REVISOR TÉCNICO

Márcio Lima do Nascimento

DIAGRAMAÇÃO

Cristina Lúcia Dias Vaz

CAPA

Andreza Jackson de Vasconcelos

EDITORIA

EditAedi

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Vaz, Cristina Lúcia Dias.

Noções Elementares sobre Dimensão / Vaz, Cristina Lúcia Dias

Belém: EditAedi/UFPA, 2019

ISBN: 978-85-65054-86-7

1. Dimensão topológica

2. Dimensão Hausdorff

3. Autossimilaridade

*Dedico este livro ao meu pai, que
me ensinou muitas coisas maravilhosas,
com seu amor seguro e paciente.
Amor e ensinamentos que levarei pela vida afora.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos alunos que de alguma forma contribuíram para a realização deste livro, especialmente aos alunos da turma 2006 do curso de Licenciatura em Matemática da UFPA que se envolveram de corpo e alma no projeto *Explorando a Geometria Fractal*. A minha mais profunda gratidão.

Agradeço aos colegas da Faculdade de Matemática da UFPA pelo apoio e qualquer colaboração. Em especial, aos meus companheiros de viagem, professores Márcio Lima do Nascimento e Marcos Monteiro Diniz. Obrigada pelo incentivo, pelas conversas estimulantes e, principalmente, pela parceria no projeto *Explorando a Geometria Fractal*. A viagem não seria a mesma sem vocês. Em particular, agradeço ao professor Marcos Diniz pela boa vontade na confecção de algumas figuras.

Agradeço a todos os meus amigos(as) pela força e carinho.

Agradeço ao meu filho Arnaldo por estar sempre ao meu lado nesta trajetória. Você, meu querido, faz tudo valer a pena.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste livro.

Prefácio	1
Introdução	3
1 Dimensão Topológica	3
1.1 Dimensão zero	4
1.1.1 O conjunto de Cantor ternário ou triádico	4
1.2 Dimensão 1	6
1.2.1 O Triângulo de Sierpiński	7
1.2.2 A curva de Koch	8
1.2.3 O Tetraedro de Sierpiński	9
1.3 Dimensão n	11
1.4 Propriedade topológica da dimensão	11
1.5 A dimensão topológica do $\mathbb{R}^n$	13
1.5.1 Dimensão topológica e Álgebra Linear	15
1.6 Linha do tempo	17
2 Dimensão Hausdorff	18
2.1 Medida Lebesgue	18
2.1.1 Conjunto com medida nula	19
2.1.2 Medida Lebesgue 1-dimensional	20
2.1.3 Medida Lebesgue n-dimensional	21

2.1.4	O Tapete de Sierpiński	23
2.1.5	A Esponja de Menger	24
2.2	Medida Hausdorff s -dimensional	25
2.3	Dimensão Hausdorff	28
2.3.1	Dimensão Topológica e dimensão Hausdorff	31
2.4	Dimensão por contagem de caixas	32
2.5	Dimensão Hausdorff de gráficos de funções	36
2.6	Linha do tempo	40
3	Autossimilaridade	42
3.1	Construção por autossimilaridade	42
3.2	Sistema de funções iteradas	45
3.3	Dimensão por similaridade	46
3.3.1	Calculando Dimensão por autossimilaridade	47
3.3.2	Variação da dimensão Hausdorff	57

O presente livro é fruto de um maravilhoso caminho acadêmico que teve o seu início em 2003 com uma conversa estimulante sobre *dimensão*. Durante este período várias tentativas frustradas para escrevê-lo foram feitas e finalmente através do projeto *Explorando a Geometria Fractal*, apoiado pelo Programa Prodocência da Universidade Federal do Pará em parceria com a Capes, ele se tornou uma realidade.

Navegar pelas “águas” de um assunto tão empolgante e frutífero, acompanhada por amigos e alunos tão queridos, foi um grande privilégio e uma inestimável aprendizagem. Da *dimensão* chegamos aos *fractais* dos fractais chegamos a *teoria moderna de curvas* e a viagem ainda não acabou.

O que norteou todo este trajeto foi a imensa vontade de escrever um livro sobre *dimensão*, um assunto tão complexo, que fosse acessível aos alunos de graduação. Um texto elementar que introduzisse as principais idéias sobre dimensão topológica e dimensão Hausdorff, sem exagerar no formalismo ou na falta dele. Tarefa desafiadora para uma profissional da matemática! Não sei se o objetivo foi alcançado, mas o esforço em realizá-lo foi uma constante em toda a produção deste livro.

Espero, caro leitor, que este livro lhe agrade e que possa estimular (ou aumentar) o seu interesse pela Matemática, em particular pela Teoria de Dimensão e pela Geometria Fractal.

Cristina L. D. Vaz

Universidade Federal do Pará, Brasil.
Maio de 2019.

Ao longo da história da Matemática, conjuntos e funções com características peculiares têm desafiado a imaginação e têm sido poderosas ferramentas no avanço de certas áreas da Matemática. O conjunto de Cantor, a curva de Koch e a função de Weierstrass são exemplos da influência de tais objetos no desenvolvimento da Matemática. Originalmente construídos como contra-exemplos, muito tempo se passou até que um estudo sistemático sobre tais objetos fosse feito e sua utilidade como modelos da natureza fosse percebida pelos matemáticos contemporâneos.

Em 1975, B. Mandelbrot [15], matemático polonês, notou que estes conjuntos apresentavam muitas propriedades comuns e os chamou de *fractais*. O termo vem do latim, do adjetivo *fractus*, derivado do verbo *frangere* que significa *quebrar*, *fracionar*.

Para definir **fractal**, Mandelbrot [15] escreveu que "*um fractal é, por definição, um conjunto cuja dimensão Hausdorff é estritamente maior do que a sua dimensão topológica*". Posteriormente esta definição se mostrou inadequada para caracterizar certos fractais, porém esta é uma das principais propriedades dos fractais. Portanto, para entendermos o que é um fractal precisamos entender o significado de "dimensão".

Nossa ideia intuitiva de dimensão nós diz que a reta é unidimensional, que o plano é bidimensional e que o espaço é tridimensional. Esta noção está intimamente relacionada ao fato de associarmos dimensão ao número de parâmetros necessários para descrever (de forma única) todos os pontos de um conjunto. Por exemplo, um ponto no espaço é descrito por três parâmetros.

A imprecisão desta ideia de dimensão foi mostrada por duas famosas descobertas: a transformação injetora de Cantor da reta no plano e a transformação contínua de Peano do intervalo no quadrado.

Em 1878, George Cantor mostrou a existência de uma função bijetora definida no intervalo $[0, 1]$ e assumindo valores no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ e a Matemática nunca mais foi a mesma. Em outras palavras, Cantor mostrou que existem tantos pontos num quadrado quanto num intervalo. Pela primeira vez postulou-se o problema da “invariância da dimensão”.

A pergunta natural que surgiu posteriormente foi se tal função poderia ser contínua.

Em 1879, E. Netto mostrou que essa bijeção é necessariamente descontínua e a investigação tomou um novo rumo. “Enfraquecendo-se” a exigência de bijeção, pode existir uma função contínua e sobrejetora definida em $[0, 1]$ e assumindo valores em $[0, 1] \times [0, 1]$? Em outras palavras, existe uma curva que “passa” por todos os pontos de um quadrado? Ou seja, podemos descrever os pontos de um quadrado com apenas um parâmetro?

Em 1890, G. Peano respondeu essa pergunta construindo a primeira curva sobrejetora do intervalo no quadrado. Para mais detalhes consulte Sagan ([23]).

Estes resultados mostraram que a dimensão muda pela atuação de uma função injetora ou contínua e contradizem a ideia de que a dimensão de um objeto seja o número de parâmetros necessários para descrever os seus pontos ou o número de pontos que formam o objeto. Portanto, era necessário dar uma definição mais precisa de dimensão.

Em 1912, Poincaré propôs, num trabalho de filosofia, uma definição *indutiva* de dimensão, observando que a reta é unidimensional porque podemos separar dois pontos quaisquer sobre ela *isolando* um do outro por uma “barreira” formada por um único ponto, que tem dimensão zero. O plano é bidimensional porque podemos separar dois pontos quaisquer do plano *isolando* um do outro por uma “barreira” formada, por exemplo, por uma curva fechada, que é unidimensional. O espaço é tridimensional porque podemos separar dois pontos quaisquer do espaço *isolando* um do outro por uma “barreira” formada, por exemplo, por uma superfície. Analogamente, o espaço n -dimensional tem dimensão n porque dois pontos quaisquer podem ser separados *isolando* um do outro por uma “barreira” formada por um subconjunto cuja dimensão é $n - 1$.

A ideia fundamental da noção indutiva da dimensão, dada por Poincaré, está em considerar a propriedade de decomposição dos conjuntos por subconjuntos de dimensão menor. Tal noção indutiva de dimensão está implicitamente contida nos *Elementos de Euclides* quando este afirma que um objeto unidimensional é aquele cuja fronteira é formada por pontos, um objeto bidimensional é aquele cuja fronteira é uma curva e um objeto tridimensional é aquele cuja fronteira é uma superfície.

Por outro lado, quando dizemos que uma superfície é “bidimensional”, temos em mente que é possível “medir” a área desta superfície. Analogamente, quando dizemos que uma curva é “unidimensional” pensamos que é possível “medir” comprimento de arco; quando dizemos que um sólido é “tridimensional” pensamos que é possível “medir” o seu volume. Se compararmos o processo de medir com a visualização de um objeto por um microscópio teríamos uma das seguintes situações: (a) poderíamos ampliar muito o foco do microscópio tornando a imagem muito grande (medida infinita); (b) poderíamos diminuir muito o foco tornando a imagem muito pequena (medida zero); (c) no foco ideal (dimensão do conjunto) a imagem aparecerá de forma correta e a medida poderá ser efetuada. Assim, a *medida* pode ser usada para definir um certo **tipo de dimensão**, que é o foco ideal para medirmos um conjunto.

Pelo descrito acima, existem pelos menos duas maneiras de tratarmos a dimensão, em realidade existem vários tipos de dimensão, porém, mesmo conceitualmente diferentes, o que fazem é a cada conjunto associar um certo número chamado a dimensão do conjunto. Ou seja, podemos definir dimensão axiomáticamente, isto é, entender dimensão como uma função que a cada conjunto associa um número e que satisfaz algumas propriedades “desejáveis”. Mais precisamente, para um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, a dimensão de E , representada por $\dim E$, satisfaz as seguintes propriedades:

- (D1) para $x \in E$ o conjunto unitário $\{x\}$ tem dimensão zero, o intervalo unitário $[0, 1]$ tem dimensão 1 e, mais geral, o hiper-cubo m -dimensional tem dimensão m ;
- (D2) (Monotonicidade) Se $E \subset F$ então $\dim E \leq \dim F$;

(D3) (Estabilidade enumerável) Se $\{E_i\}$ é uma seqüência de subconjuntos fechados do espaço $\mathbb{R}^n$ então

$$\dim\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sup_{i \geq 1} \dim(E_i);$$

(D4) (Invariância) Para qualquer função ψ de alguma subfamília do conjunto dos homeomorfismos do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\dim(\psi(E)) = \dim(E).$$

Note que as condições (D1) e (D2) são condições “naturais”. A condição (D3) é um pouco mais técnica e podemos substituir “enumerável” por “finita”, ou seja,

(D3') (Estabilidade finita) Se $E_1, E_2, \dots, E_m$ são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ então

$$\dim\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) = \sup_{1 \leq i \leq m} \dim(E_i).$$

Deste modo, a condição (D3) é simplesmente a extensão da (D3'), que foi deduzida do caso $m = 2$.

A condição (D4) é importante para responder perguntas do tipo: como certas transformações afetam a dimensão de um conjunto?

Em geral, é razoável esperar invariância sob transformações do tipo similaridade ou congruência. Logo, a subfamília da condição (D4) deve conter, no mínimo, transformações por similaridade e congruência.

Por outro lado, quando a condição (D4) é satisfeita para todos os homeomorfismos dizemos que a função dimensão é *topologicamente invariante*. Neste caso, conjuntos homeomorfos tem a mesma dimensão.

Neste contexto, a pergunta interessante e fundamental que surgiu foi: existe um homeomorfismo entre os espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ com $n \neq m$? Esta é uma pergunta relevante, pois se tal homeomorfismo existisse, um objeto unidimensional, por exemplo, seria homeomorfo a um objeto bidimensional e a idéia de *invariância topológica* seria falsa.

Em 1913, o matemático holandês, L.Brouwer definiu uma função dimensão to-

pologicamente invariante que satisfaz as condições acima e assume valores inteiros.

Em 1922, independentemente de Brouwer e independentemente um do outro, Menger e Urysohn reformularam o trabalho de Brouwer com importantes avanços. Esta função dimensão é chamada **dimensão topológica** e vamos representá-la por $\dim_T$. Sua construção foi formalizada por Menger e Urysohn do seguinte modo: o conjunto vazio tem dimensão -1. A dimensão de um conjunto X é o menor inteiro n para o qual todo ponto de X tem uma vizinhança arbitrariamente pequena cuja fronteira tem dimensão menor do que n . A grande vantagem desta definição é formalizar a nossa idéia intuitiva de dimensão.

A teoria geral da dimensão topológica trata de três tipos de dimensões: duas dimensões indutivas e uma dimensão por cobertura. Neste texto, trabalharemos apenas com a dimensão indutiva, pois para subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ estas classes de dimensão são todas equivalentes e por esta razão chamaremos a dimensão indutiva de dimensão topológica. Para mais detalhes sobre a teoria clássica da dimensão consulte Hurewicz e Wallman [13].

Por outro lado, por muito tempo os matemáticos tentaram generalizar as ideias intuitivas de comprimento, área e volume para medir conjuntos mais gerais. Por exemplo, Borel iniciou sua pesquisa nesta direção no final do século 19. No início do século 20, Lebesgue desenvolveu a teoria da medida como suporte para a teoria de integração. Carathéodory generalizou o trabalho de Lebesgue e introduziu a medida s -dimensional para s inteiro e Hausdorff notou que s fazia sentido mesmo quando não era inteiro e definiu dimensão Hausdorff. Esta função dimensão satisfaz todas as propriedades da dimensão com a subfamília da condição (D4) dada por funções bi-Lipschitz. Representaremos esta função dimensão por $\dim_H$.

Calcular a dimensão Hausdorff usando a definição é uma tarefa complexa, pois envolve cálculos sobre todas as coberturas. Por esta razão, buscamos métodos equivalentes mais amigáveis ou técnicas para obtermos boas aproximações. Aqui trataremos dois destes métodos: *Dimensão por similaridade* e *Dimensão por contagem por caixas*

Agora, podemos reescrever a definição de Mandelbrot para fractais do seguinte

modo: dizemos que um subconjunto E do $\mathbb{R}^n$ é um fractal se $\dim_T E < \dim_H E$.

O livro foi organizado do seguinte modo: dimensão topológica será tratada no capítulo [1](#). No capítulo [2](#) estudaremos medida para entendermos dimensão Hausdorff e obteremos aproximações da $\dim_H$ de alguns conjuntos usando o método de *Contagem de caixa*. No capítulo [3](#) descreveremos o método dimensão por similaridade e calcularemos a dimensão Hausdorff de alguns fractais.

1 DIMENSÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo trataremos da dimensão topológica usando a definição *intuitiva* dada por Menger e Uryson. Começaremos introduzindo o conceito de vizinhança. Para evitarmos qualquer tipo de confusão chamaremos de **disco** de centro p e raio $r > 0$ ao conjunto D dos pontos do plano cuja distância ao ponto p é menor do que r . Chamaremos a fronteira do disco D de círculo.

Um conjunto do plano é chamado de **aberto** se cada um de seus pontos é centro de um disco contido no conjunto. Deste modo, o disco D , o interior de um quadrado, o interior de um triângulo são conjuntos abertos do plano. Uma **vizinhança** de um ponto p do plano é um disco centrado em p . Dizemos que p é um **ponto de fronteira** de um conjunto E do plano se toda vizinhança de p contém pontos de E e do complementar de E .

Note que o conceito de vizinhança depende do conjunto que o ponto se encontra. Se o ponto pertence ao conjunto E do plano a *vizinhança de p relativa ao conjunto E* é formada pelos pontos de E que pertencem a uma vizinhança de p . Em outras palavras, é a interseção de uma vizinhança de p com o conjunto E . Por exemplo, se E é um segmento de reta no plano então a vizinhança de $p \in E$ relativa a E é o segmento cujos extremos são os pontos de interseção de um disco de centro p e o segmento E . Se E é um conjunto finito de pontos então cada ponto de E é uma vizinhança relativa de E .

De modo análogo podemos definir abertos e vizinhanças nos espaços $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, o disco de centro p e raio $r > 0$ no espaço é uma esfera de centro p e raio r .

1.1 Dimensão zero

Intuitivamente, dizemos que um ponto ou um conjunto finito de pontos tem “dimensão zero”, mas qual é a característica matemática que está por trás desta intuição?

Em termos de vizinhança, podemos observar que cada ponto de um conjunto finito de pontos tem uma vizinhança relativa com fronteira vazia. De fato, a vizinhança relativa é formada por um único ponto, que pertence ao conjunto (e logo não é ponto de fronteira). A definição de dimensão zero dada por Menger e Uryson tem como suporte a seguinte propriedade:

*Um conjunto E tem **dimensão zero** se cada um dos seus pontos tem uma vizinhança relativa arbitrariamente pequena com fronteira vazia*

As palavras “arbitrariamente pequena” são necessárias, pois caso contrário se E é uma região plana limitada por um quadrado então podemos encontrar um disco suficientemente grande que contém E , logo nenhum ponto de E pertence a fronteira deste disco e portanto E tem dimensão zero!

Além dos conjuntos finitos, muitos conjuntos infinitos tem dimensão zero. Por exemplo, considere $E = \{x \in \mathbb{R}; x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. É claro que cada ponto de E tem uma vizinhança relativa arbitrariamente pequena cuja fronteira não tem pontos de E . Apenas o ponto $x = 0$ pode gerar algumas dúvidas. Mas se tomarmos uma vizinhança de raio r com r um número irracional então nenhum ponto de E pertence a fronteira desta vizinhança. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ também tem dimensão zero. De fato, tomando como raio da vizinhança de cada racional um número irracional tem-se que cada vizinhança relativa tem fronteira vazia.

A seguir daremos um exemplo interessante e bastante significativo:

1.1.1 O conjunto de Cantor ternário ou triádico

O conjunto triádico de Cantor é o conjunto formado pela remoção de uma sequência de intervalos abertos do intervalo $[0,1]$. Primeiro dividimos intervalo $[0,1]$ em três partes iguais e removemos a parte do meio, isto é, o intervalo $(1/3, 2/3)$ para

obter o seguinte conjunto

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Novamente removemos o terço médio de cada intervalo fechado de $\mathcal{C}_1$ para obter o seguinte conjunto

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Note que $\mathcal{C}_2$ é a união de $2^2 = 4$ intervalos fechados, cada um do tipo $[j/3^2, (j+1)/3^2]$ e que $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2$. Novamente removemos o terço médio de cada um destes intervalos para obter o conjunto $\mathcal{C}_3$, que é a união de $2^3 = 8$ intervalos fechados tal que $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3$. Continuando este processo k -estágios obteremos o conjunto $\mathcal{C}_k$, que é a união de 2^k intervalos do tipo $[j/3^k, (j+1)/3^k]$ tal que $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \dots \supset \mathcal{C}_k \supset \dots$

O conjunto triádico de Cantor é a interseção dos conjuntos $\mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_k.$$

A figura abaixo ilustra alguns estágios do processo de construção do conjunto de Cantor.



Figura 1.1: Ilustração do processo de construção do conjunto triádico de Cantor.

Fonte: Autora

Exemplo 1.1 *O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tem dimensão zero.*

De fato, note que o conjunto $\mathcal{C}_k$ da construção do conjunto de Cantor é formado

por 2^k intervalos I_{kj} fechados e disjuntos de comprimento 3^{-k} , ou seja, $C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{kj}$. Logo cada ponto $p \in C$ pertence a algum intervalo fechado $I_{kj_0} = [a, b]$ e a distância de I_{kj_0} a qualquer outro intervalo I_{kj} é maior ou igual a 3^{-k} . Assim, podemos tomar intervalos arbitrariamente pequenos do tipo $(a - 3^{-k}, b + 3^{-k})$ tal que a fronteira da interseção destes intervalos com o conjunto de Cantor C não tem pontos de C .

Podemos caracterizar a propriedade se um conjunto ser zero dimensional usando o seguinte conceito de *conjunto separados*:

Definição 1.1 *Sejam A, B e L subconjuntos simultaneamente disjuntos do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que A e B são **separados** por L no espaço $\mathbb{R}^n$ se existem conjuntos U e V disjuntos e abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $L = \mathbb{R}^n - \{U \cup V\}$.*

Observe que para U e $V = U^c$ abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $A \subset U$ e $B \cap U = \emptyset$ tem-se $L = \partial U = \emptyset$. Assim, dizemos que A e B são **separados pelo vazio** se existe U aberto e fechado do $\mathbb{R}^n$ (ou seja, com $\partial U = \emptyset$) tal que $A \subset U$ e $B \cap U = \emptyset$.

Teorema 1.1 *Um subconjunto E não vazio do $\mathbb{R}^n$ tem dimensão zero se, e somente se, para todo $p \in E$ e todo fechado F que não contém p tem-se que os conjuntos $\{p\}$ e F são separados pelo vazio.*

Prova: seja $p \in E$ tal que $p \notin F$, logo $p \in F^c$. Como F^c é uma vizinhança de p e $\dim_T E = 0$ temos que existe uma vizinhança V tal que $p \in V \subset F^c$, $\partial V = \emptyset$ e $V \cap F = \emptyset$. Logo, $\{p\}$ e F são separados pelo vazio. Reciprocamente, seja $p \in E$ tal que $p \notin F$ e F^c uma vizinhança de p . Como $\{p\}$ e F são separados pelo vazio existe um aberto V tal que $p \in V \subset F^c$, $\partial V = \emptyset$ e $V \cap F = \emptyset$. Logo, $\dim_T E = 0$. ■

1.2 Dimensão 1

Intutivamente, um conjunto tem “dimensão um” se não tem dimensão zero e se cada um de seus pontos tem vizinhança arbitrariamente pequena cuja fronteira tem dimensão zero. Um conjunto “não tem dimensão zero” se a fronteira de **toda** vizinhança arbitrariamente pequena de cada um dos seus pontos não é vazia. Assim,

Um conjunto E tem **dimensão 1** se não tem dimensão zero e se cada um dos seus pontos tem uma vizinhança relativa arbitrariamente pequena cuja fronteira tem dimensão zero.

Deste modo, a reta, segmentos de reta, círculos, elipse tem dimensão 1, pois a fronteira da interseção de toda vizinhança de cada ponto destes conjuntos é formada por dois pontos, e logo tem dimensão zero.

1.2.1 O Triângulo de Sierpiński

O processo de construção do Triângulo de Sierpiński é similar ao da construção do conjunto triádico de Cantor: a partir de um objeto inicial, retiramos *uma parte central* sua, obtendo de resto cópias similares ao objeto inicial. Procedemos então de forma similar com cada cópia e assim indefinidamente. Mais precisamente, inicia-se com uma região triangular equilátera $\mathcal{S}_0$, de lado 1 e vértices $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (1,0)$ e $v_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, subdividindo-a em quatro regiões triangulares menores, usando para isto os segmentos de reta que unem os pontos médios de cada lado. Remove-se então o interior da região triangular central (a região central, sem sua fronteira). Note que assim é gerado um conjunto $\mathcal{S}_1$ formado por três regiões triangulares menores e congruentes, cujos lados medem a metade da medida dos lados do triângulo original. Repete-se então esse mesmo procedimento em cada uma das três regiões triangulares e assim sucessivamente, gerando-se uma seqüência de conjuntos $\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \dots$ com cada $\mathcal{S}_k$ formado por 3^k regiões triangulares, similares à região inicial, cujos lados medem 2^{-k} da medida do lado do triângulo inicial.

O Triângulo de Sierpiński $\mathcal{S}$ é o conjunto limite desta seqüência de pontos, isto é,

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_k$$

Exemplo 1.2 O triângulo de Sierpiński $\mathcal{S}$ tem dimensão 1.

De fato, note que cada um dos lados dos triângulos $\mathcal{S}_k$ está contido em $\mathcal{S}$, o que significa $\mathcal{S}$ não tem dimensão zero. Note também que os triângulos $\mathcal{S}_k$ da



Figura 1.2: Etapas da construção do Triângulo de Sierpiński

Fonte: Wikipedia.org

construção do triângulo de Sierpiński são formado por 3^k regiões triangulares T_{kj} cuja única interseção são os vértices e cujos lados medem 2^{-k} , ou seja, $S_k = \bigcup_{j=1}^{3^k} T_{kj}$. Então, cada $p \in S$ pertence a algum T_{kj} e portanto podemos tomar discos arbitrariamente pequenos tais que os vértices de T_{kj} pertençam aos círculos destes discos. Assim, a fronteira da interseção deste discos com S é formada por três pontos e, logo, tem dimensão zero.

1.2.2 A curva de Koch

A construção da curva de Koch inicia-se com um segmento de reta $\mathcal{K}_0$, tomemos por exemplo o segmento $[0, 1]$, dividindo-o em três partes iguais e substituindo-se o o terço médio por dois segmentos adjacentes (tais que estes formem um “triângulo” equilátero sem a base), formando então uma linha poligonal $\mathcal{K}_1$ de quatro segmentos consecutivos, em uma espécie de “ponta de estrela”. Repete-se então o processo em cada um dos segmentos de $\mathcal{K}_1$, obtendo-se assim $\mathcal{K}_2$ e continua-se indefinidamente gerando uma seqüência de conjuntos $\{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots\}$, cujo limite é a **curva de Koch**, $\mathcal{K}$ (figura 1.3)

Exemplo 1.3 *A curva de Koch $\mathcal{K}$ tem dimensão 1.*

De fato, note que cada $\mathcal{K}_j$ é formada por 4^j segmentos de comprimento 3^{-j} , logo $\mathcal{K}$ não tem dimensão zero. Então, cada $p \in \mathcal{K}$ pertence a algum segmento e portanto a fronteira de toda vizinhança relativa de p é formada por dois pontos e, logo, tem dimensão zero.

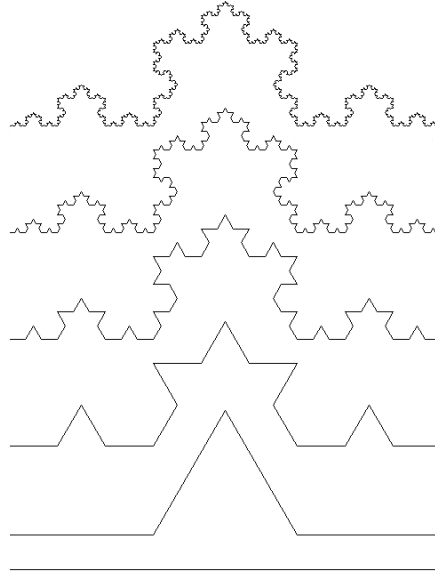


Figura 1.3: Etapas da construção da curva de Koch
Fonte: Wikipedia.org

1.2.3 O Tetraedro de Sierpiński

O Tetraedro de Sierpiński é uma “versão 3D” do triângulo homônimo. Para construí-lo, inicia-se com um tetraedro $\mathcal{T}_0$ e dele se retira o octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de $\mathcal{T}_0$. A figura resultante $\mathcal{T}_1$ é constituída por quatro tetraedros similares ao primeiro, se intersectando dois a dois em seus vértices (Figura 1.4) e cujas arestas medem exatamente a metade das medidas das arestas do tetraedro inicial. Então em cada um desses tetraedros menores, repete-se a mesma operação e assim indefinidamente, obtendo-se uma seqüência de figuras

$$\mathcal{T}_0 \supset \mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2 \cdots$$

cujo limite

$$\mathcal{T} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_k$$

é o Tetraedro de Sierpiński .

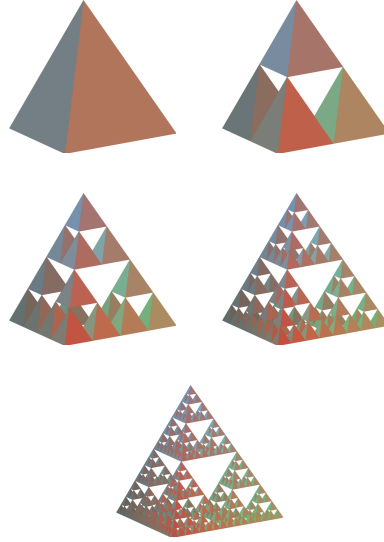


Figura 1.4: Etapas da construção do Tetraedro de Sierpiński
Autor: Marcos Monteiro Diniz

Observe que a figura $\mathcal{T}_k$ é constituída por 4^k tetraedros cujas arestas medem $1/2^k$ das arestas do tetraedro inicial. Note também que o volume de $\mathcal{T}_i$ é

$$\text{Vol}(\mathcal{T}_i) = 4^i \left(\frac{1}{2^i} \right)^3 \text{Vol}(\mathcal{T}_0) = \frac{1}{2^i} \text{Vol}(\mathcal{T}_0) \longrightarrow 0$$

e portanto o Tetraedro de Sierpiński tem volume nulo. Por outro lado, note que a soma das áreas das faces de cada figura $\mathcal{T}_i$ é exatamente igual à área de $\mathcal{T}_0$, não sendo portanto absurdo considerarmos que a “área do Tetraedro” seja finita e igual à área de $\mathcal{T}_0$ e podemos pensar se o Tetraedro não viria a ser um fractal de dimensão inteira igual a 2!

Exemplo 1.4 *O Tetraedro de Sierpiński $\mathcal{S}$ tem dimensão 1.*

De fato, note que cada $\mathcal{T}_k$ é constituída por 4^k tetraedros $\mathcal{T}_{kj}$ cujas arestas medem $1/2^k$ das arestas do tetraedro inicial, Assim, as arestas de cada um destes tetraedros pertence a $\mathcal{T}$, o que significa $\mathcal{T}$ não tem dimensão zero. Então, cada $p \in \mathcal{T}$ pertence a algum $\mathcal{T}_{kj}$ e portanto podemos tomar esferas arbitrariamente pequenas que contenham os vértices de $\mathcal{T}_{kj}$. Assim, a fronteira da interseção destas esferas com $\mathcal{T}$ é formada por um conjunto finito pontos e, logo, tem dimensão zero.

1.3 Dimensão n

Podemos generalizar o processo intuitivo descrito nas seções anteriores e definir “dimensão n ”.

*Um conjunto E tem **dimensão n** se não tem dimensão $n-1$ e se cada um dos seus pontos tem uma vizinhança relativa arbitrariamente pequena cuja fronteira tem dimensão $n-1$.*

Por convenção, o conjunto vazio tem dimensão -1 . Se o conjunto não tem “dimensão n ” para todo n dizemos que o conjunto tem dimensão infinita.

1.4 Propriedade topológica da dimensão

Topologia é uma área da Matemática que trata da forma como objetos geométricos podem ser deformados. Segmentos podem ser deformados em curvas, círculos em triângulos ou quadrados. Porém, nem tudo pode ser deformado. Por exemplo, buracos serão sempre buracos, ou seja, são invariantes e portanto uma esfera pode ser deformada e se tornar a superfície de uma ferradura, mas nunca será deformada num pneu. As transformações que, quando aplicadas a um objeto geométrico, não alteram suas propriedades topológicas são chamadas *homeomorfismos*. Estas transformações são funções contínuas com inversa também contínua. Por exemplo, as translações e rotações são homeomorfismos. Dizemos que dois conjuntos são **homeomorfos** se existe um homeomorfismo definido entre eles. Do ponto de vista topológico, conjuntos homeomorfos são indistinguíveis.

Uma propriedade importante da dimensão indutiva é a sua invariância por homeomorfismo, ou seja, se dois conjuntos são homeomorfos então eles tem a mesma dimensão. Por esta razão chamaremos a dimensão definida por Menger e Uryson de *dimensão topológica* e a representaremos por $\dim_T$.

Exemplo 1.5 Para todo $a \in \mathbb{R}^n$ e para todo número real $\lambda \neq 0$ definimos a **translação** $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a **homotetia** $g_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente, por $T_a(x) = x + a$ e $g_\lambda(x) = \lambda x$. T_a e g_λ são homeomorfismos em $\mathbb{R}^n$. De fato, T_a e g_λ são contínuas e possuem inversas $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ e $(g_\lambda)^{-1} = g_{1/\lambda}$ contínuas.

Exemplo 1.6 Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e a bola aberta $B_\epsilon(p)$ de $\mathbb{R}^n$. A função $h: B_\epsilon(p) \rightarrow B_1(0)$ definida por $f(x) = (x - p)/\epsilon$ é um homeomorfismo. De fato, h é contínua, pois é uma translação $x \mapsto x - p$ e uma homotetia $y \mapsto y/\epsilon$. É claramente injetora. Além disso, para $x \in B_\epsilon(p)$ tem-se $\|f(x)\| = \|x - p\|/\epsilon < \epsilon/\epsilon = 1$, e logo, a imagem de f é $B_1(0)$. Sua inversa f^{-1} é dada por $f^{-1}(x) = \epsilon x + p$, que é contínua. Logo, $B_\epsilon(p)$ e $B_1(0)$ são homeomorfas. ■

Exemplo 1.7 Toda bola $B_\epsilon(p)$ do $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$. Em particular, o intervalo (a, b) e $\mathbb{R}$ são homeomorfos.

De fato, pelo exemplo anterior, basta provarmos que $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo a bola $B_1(0)$. Considere $h: \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(0)$ definida por $h(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$. Como $\|h(x)\| = \left\| \frac{x}{1 + \|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$ temos que h está bem definida. Como a norma é uma função contínua, tem-se que h é contínua. Agora, considere $g: B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$ para $\|x\| \neq 1$. Então g é contínua e facilmente se verifica que $g \circ h$ e $h \circ g$ são a identidade de E em $B_1(0)$, respectivamente. Logo, h é um homeomorfismo. ■

Exemplo 1.8 Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua. O gráfico $G_f = \{(x, f(x)); x \in D\}$ de f é homeomorfo ao domínio D .

De fato, a função $h: \mathbb{R}^n \rightarrow G_f$ dada por $h(x) = (x, f(x))$ é contínua, pois suas componentes são funções contínuas. É bijetora, pois $(x, f(x)) = (x_1, f(x_1))$ implica $x = x_1$ e dado $(x, f(x)) \in G_f$ então $x \in \mathbb{R}^n$ e $h(x) = (x, f(x))$. Além disso, h^{-1} é a restrição da primeira projeção ao gráfico G_f , portanto, é uma função contínua. ■

Exemplo 1.9 O círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\}$ são homeomorfos.

De fato, verifique que $h: \mathcal{Q} \rightarrow S^1$ dada por

$$h(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

é um homeomorfismo.

Exemplo 1.10 O plano furado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \neq 0\}$ e o cilindro $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ são homeomorfos.

De fato, verifique que $h: Y \rightarrow X$ dada por $h(x, y, z) = (x e^z, y e^z)$ é um homeomorfismo.

Exemplo 1.11 A parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$ é unidimensional.

Primeiro, vamos mostrar que o domínio de uma função contínua e o seu gráfico são homeomorfos. De fato, seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $G_f = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ o gráfico de f . A função $h : A \rightarrow G_f$ dada por $h(x) = (x, f(x))$ é contínua, pois suas coordenadas são contínuas, é bijetora porque $(x, f(x)) = (y, f(y))$ implica $x = y$ e, dado $(x, f(x)) \in G_f$ tem-se $x \in A$ e $h(x) = (x, f(x))$. Além disso, a inversa de h também é contínua pois h^{-1} é simplesmente a restrição da projeção na primeira coordenada ao gráfico G_f . Então h define um homeomorfismo entre A e G_f . Portanto, $\dim_T A = \dim_T G_f$.

Logo, $\mathbb{R}$ é homeomorfo à parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$, pois esta parábola é o gráfico da função $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Isto implica que $\dim_T P = 1$ ■

1.5 A dimensão topológica do $\mathbb{R}^n$

O resultado principal desta seção é mostrar que o $\mathbb{R}^n$ tem dimensão topológica n . Tal demonstração é fundamentalmente baseada no teorema de ponto fixo de Brouwer e é similar ao caso $n = 2$, que apresentaremos aqui.

Teorema 1.2 (Teorema do ponto fixo de Brouwer) Seja $\overline{B}_1(0)$ a bola fechada unitária do $\mathbb{R}^n$, isto é, $\overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, 0) \leq 1\}$. Uma função contínua $f : \overline{B}_1(0) \rightarrow \overline{B}_1(0)$ possui pelo menos um ponto fixo, isto é, existe pelo menos um ponto $x \in \overline{B}_1(0)$ tal que $f(x) = x$.

Como o quadrado $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ é homeomorfo a bola $\overline{B}_1(0)$ temos que o teorema de ponto fixo de Brouwer também vale para o quadrado. Logo,

Corolário 1.1 Seja $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Uma função contínua $f : I^2 \rightarrow I^2$ sempre possui um ponto fixo, isto é, existe um ponto $x \in I^2$ tal que $f(x) = x$.

Usaremos o seguinte resultado na prova que a dimensão do $\mathbb{R}^2$ é 2 (veja [8]):

Proposição 1.1 $\dim_T X \leq n$ se, e somente se qualquer par de subconjuntos disjuntos e fechados de X pode ser separado por um fechado de dimensão $\leq n - 1$, isto é, $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, A, B fechados, existe L fechado tal que $A \subset L$, $L \cap B = \emptyset$ e $\dim_T L \leq n - 1$.

O seguinte resultado é o “coração” da prova que a dimensão do $\mathbb{R}^2$ é 2 (veja [8]):

Lema 1.1 *A dimensão topológica do quadrado $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ é maior ou igual 2, ou seja, $\dim_T I^2 \geq 2$.*

Considere os conjuntos $C_1 = \{(x, y) \in I^2 : x = 1\}$, $C'_1 = \{(x, y) \in I^2 : x = -1\}$, $C_2 = \{(x, y) \in I^2 : y = 1\}$, $C'_2 = \{(x, y) \in I^2 : y = -1\}$. Então $\partial I^2 = C_1 \cup C'_1 \cup C_2 \cup C'_2$.

Se $\dim_T I^2 \leq 1$ então, pela proposição 1.1, existe um conjunto fechado L_1 que separa C_1 e C'_1 e existe um conjunto fechado L_2 que separa C_2 e C'_2 tais que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Vamos provar que este não é o caso, ou seja, que necessariamente $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. De fato, seja $I^2 - L_i = U_i \cup U'_i$, onde $C_i \subset U_i$, $C'_i \subset U'_i$ e $U_i \cap U'_i = \emptyset$, com U_i e U'_i abertos, para $i = 1, 2$. Considere a seguinte função contínua $f : I^2 \rightarrow I^2$, com $\mathbf{x} = (x, y) \in I^2$:

$$f(\mathbf{x}) = (x + d(\mathbf{x}, L_1), y + d(\mathbf{x}, L_2)) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in U'_1 \cap V'_2,$$

$$f(\mathbf{x}) = (x - d(\mathbf{x}, L_1), y + d(\mathbf{x}, L_2)) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in U_1 \cap V'_2,$$

$$f(\mathbf{x}) = (x - d(\mathbf{x}, L_1), y - d(\mathbf{x}, L_2)) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in U_1 \cap V_2,$$

$$f(\mathbf{x}) = (x + d(\mathbf{x}, L_1), y - d(\mathbf{x}, L_2)) \quad \text{se} \quad \mathbf{x} \in U'_1 \cap V_2.$$

Observe que não há dificuldade em definir f sobre L_1 ou L_2 . Aplicando o Corolário 1.1, obtemos que existe um ponto $\mathbf{y} \in I^2$ tal que $f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Para que isto ocorra é necessário que $d(\mathbf{y}, L_1) = 0 = d(\mathbf{y}, L_2)$, ou seja, $\mathbf{y} \in L_1$ e $\mathbf{y} \in L_2$ e portanto $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. ■

Agora estamos em condições de mostrar que $\dim_T \mathbb{R}^2 = 2$.

Teorema 1.3 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ tem dimensão topológica igual a 2.*

De fato, dado $p \in \mathbb{R}^2$ existe um disco de centro p com fronteira um círculo, mas a dimensão topológica deste círculo é 1, e portanto $\dim_T \mathbb{R}^2 \leq 2$. Agora usando que I^2 é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e o Lema 1.1 tem-se $\dim_T \mathbb{R}^2 \geq 2$ e podemos concluir que $\dim_T \mathbb{R}^2 = 2$. ■

Como consequência imediata do teorema 1.3 temos que $\dim_T I^2 = 2$. De fato, $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ e logo $\dim_T I^2 \leq 2$ e pelo lema 1.1, o resultado segue.

Exemplo 1.12 *O disco unitário $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tem dimensão 2.*

Basta lembrar que existe um homomorfismo entre I^2 e o disco unitário. ■

Exemplo 1.13 A bola aberta $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, 0) < 1\}$ tem dimensão n .

Sabemos que toda bola aberta $B_1(0)$ de um espaço vetorial normado V é homeomorfa ao espaço V . De fato, $h: V \rightarrow B_1(0)$ dada por $h(v) = v/(1 + \|v\|)$ define este homeomorfismo. Portanto o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e a bola aberta $B_1(0)$ são homeomorfos, o que implica $\dim_T B_1(0) = n$. ■

1.5.1 Dimensão topológica e Álgebra Linear

Quando perguntamos aos alunos *por que a dimensão do espaço é três*, em geral, respondem que é por que a base do espaço euclidiano é formada por três vetores linearmente independentes. Esta noção de dimensão, chamada *dimensão algébrica*, é introduzida nos curso básicos de Álgebra Linear.

Sabemos que os conceitos de base e dimensão *algébrica* de um espaço vetorial (real) normado V têm uma importância relevante no estudo da estrutura deste espaço. Se V admite uma base finita então a dimensão *algébrica* de V é o número de elementos desta base. Naturalmente podemos perguntar qual a relação entre a dimensão *algébrica* e a *topológica*. A resposta a esta questão é uma consequência do teorema 1.3 e do seguinte resultado:

Teorema 1.4 *Todo espaço vetorial (real) normado V com base finita formada por n elementos é homeomorfo ao espaço métrico $\mathbb{R}^n$.*

Prova: A prova a seguir encontra-se em [6, p.]. Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ dada por $h(x) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pela definição de base h é linear e bijetora. Além disso, h é contínua, pois

$$\|h(x) - h(y)\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|v_i\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right).$$

Para finalizar devemos provar que a transformação linear h^{-1} é contínua. Para isto basta que exista uma constante $\alpha > 0$ tal que $\|h(x)\| \geq \alpha|x|$. De fato, considere a esfera S^{n-1} do $\mathbb{R}^n$ dada por $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$. Como S^{n-1} é compacta e h linear e injetora temos que $\|h(x)\| > 0$ para todo $x \in S^{n-1}$. Por outro lado, como h é contínua (aplicando o teorema de Weierstrass) existe $\alpha > 0$ tal que $\|h(x)\| \geq \alpha$ para

todo $x \in S^{n-1}$. Agora, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, temos que $\frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ e logo

$$\|h(x)\| = \left\| h\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\| |x| \geq \alpha |x|.$$

■

Corolário 1.2 *O espaço vetorial normado V com base finita formada por n elementos tem dimensão topológica n .*

Como consequências imediatas do corolário 1.2 temos que:

Exemplo 1.14

(a) *Se $\mathbb{C}^n$ é o espaço vetorial normado da n -uplas de números complexos então $\dim_T \mathbb{C}^n = 2n$.*

(b) *Para cada $m \geq 0$,*

$$\mathbb{P}_m = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq n \leq m\}$$

é o espaço vetorial normado dos polinômios de grau menor ou igual a m . Então $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ é uma base de $\mathbb{P}_m$ e $\dim_T \mathbb{P}_m = m + 1$.

Exemplo 1.15 *Seja*

$$\mathbb{P} = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0\}$$

o espaço vetorial normado dos polinômios (com a norma do supremo). Então $\mathbb{P}_m \subset \mathbb{P}$ e portanto $\dim_T \mathbb{P} \geq m + 1$ para todo $m \geq 0$. Isto significa que $\dim_T \mathbb{P} < m + 1$, é falsa qualquer m . Logo $\dim_T \mathbb{P} = \infty$.

Usando argumentos similares aos do exemplo 1.15 podemos mostrar, por exemplo, que o espaço das funções contínua $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tem dimensão infinita.

Exemplo 1.16 *Sabemos que o espaço vetorial $\mathcal{S}$ formado pelas soluções de uma equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes tem uma base formada por n soluções (veja [5, p.59]), portanto $\dim_T \mathcal{S} = n$.*

Exemplo 1.17 Sejam X e Y espaços vetoriais e $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares de X a Y . Sabemos que se X e Y tem base com n e m elementos, respectivamente, então $\mathcal{L}(X, Y)$ tem uma base com mn elementos (veja [5, p.97]), portanto $\dim_T \mathcal{L}(X, Y) = mn$.

1.6 Linha do tempo

H. Poincaré, matemático francês, em 1912 introduziu as idéias indutivas da dimensão em [21]. Embora Poincaré trate “dimensão” apenas do ponto de vista filosófico, seu trabalho tem uma importância histórica relevante.

L.E.J. Brouwer, matemático alemão, em 1913 fez a primeira tentativa de definir rigorosamente as idéias de Poincaré e com sua definição provou a propriedade de invariância da dimensão mostrando que a dimensão do hiper-cubo m -dimensional é m (veja [2]).

P. Uryshon, matemático russo, em 1923 descobriu um “erro” na definição de Brouwer e apresentou uma definição de dimensão ligeiramente diferente. Em 1924, Brouwer [3] corrigiu sua definição usando as idéias de Uryshon, mas não provou a invariância da dimensão.

K. Menger, matemático austríaco, em 1923, independente de Uryshon, apresentou uma definição de dimensão que é a mesma dada por Uryshon e em 1928 publicou o livro *DimensionsTheorie* [17].

O principal objetivo deste capítulo é definir *dimensão Hausdorff*, para isso definiremos medida Hausdorff e destacaremos suas principais propriedades. A maioria dos resultados sobre medida serão apresentados sem demonstração e para maiores detalhes o leitor poderá consultar [8, 11, 22].

2.1 Medida Lebesgue

A medida de um conjunto descreve o *tamanho* (em algum sentido) do conjunto. Por exemplo, a medida de Lebesgue de subconjuntos de $\mathbb{R}$ estende a idéia usual de “comprimento”. De fato, suponha que o “comprimento” do subconjunto E de $\mathbb{R}$ seja dado pela integral de Riemann da função característica de E então quando E é um intervalo do tipo (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ ou $[a, b)$, seu comprimento é $\ell(E) = \int_E \chi_E(x) dx = b - a$. Portanto, o comprimento (definido desta forma) é exemplo de uma função que associa a cada conjunto (de uma certa coleção) um número real.

Nesta seção, estamos interessados em generalizar a ideia de comprimento de tal modo que preserve algumas propriedades “desejáveis”, como por exemplo: a “medida” do conjunto vazio é zero; se o conjunto é a união enumerável de conjuntos disjuntos, a sua “medida” é igual a soma das “medidas” destes conjuntos, esta propriedade é conhecida como *aditiva enumerável*.

Em 1904, H. Lebesgue introduziu uma medida exterior $m_e(E)$ e uma medida interior $m_i(E)$ para subconjuntos E da reta. Para conjuntos E tais que $m_e(E) = m_i(E)$ definiu a medida de E por $m(E) = m_e(E)$.

A ideia principal foi estender o conceito de “comprimento” usando um processo de aproximação por *excesso* do seguinte modo: cobre-se o conjunto E com a

união de uma família enumerável de intervalos limitados e depois minimiza-se a soma de todos os comprimentos destes intervalos, tomando o ínfimo sobre todas as coberturas de E (a ideia é similar a usada na construção da integral superior de Riemann). Este “comprimento por excesso” é a medida exterior $m_e(E)$.

A medida exterior $m_e(E)$ tem várias propriedades interessantes e está definida para *todos* os subconjuntos da reta, mas não é aditiva enumerável. Porém, quando restrita a uma certa classe de subconjuntos, representada por $\mathcal{M}$, chamada *classe dos conjuntos mensuráveis*, é uma medida conhecida como *medida Lebesgue 1-dimensional*. Em resumo, a base da construção da medida Lebesgue é considerar uma medida exterior definida em todos os subconjuntos E de $\mathbb{R}$, que restrita a classe $\mathcal{M}$ é aditiva enumerável. Este foi o ponto de vista adotado por C. Carathéodory, em 1914, para generalizar a medida Lebesgue.

2.1.1 Conjunto com medida nula

Para “medirmos o comprimento” de conjuntos tais como $\mathbb{Q}$ ou o conjunto de Cantor vamos primeiro estender o conceito de “comprimento” de um intervalo para conjuntos mais gerais.

Considere I um intervalo limitado do tipo $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ ou (a, b) . Definimos o comprimento de I por $\ell(I) = b - a$. Em particular, $\ell(\{a\}) = \ell([a, a]) = 0$, ou seja, o conjunto formado por um único elemento tem “comprimento nulo”. Agora, se E é um conjunto finito de pontos e como cada ponto $p \in E$ tem comprimento nulo temos que $\ell(E) = \sum_{p \in E} \ell(\{p\}) = 0$. A ideia relevante deste exemplo é que se podemos decompor um conjunto em um número finito de intervalos disjuntos podemos obter o seu comprimento somando o comprimento de cada intervalo. Infelizmente, em geral, nem sempre é possível decompor um conjunto deste modo e por esta razão consideramos uma sequência de intervalos, não necessariamente disjuntos.

Dizemos que um subconjunto E de $\mathbb{R}$ tem **medida nula** se E pode ser coberto por uma sequência de intervalos com comprimento total arbitrariamente pequeno. Ou seja, dado $\epsilon > 0$, dizemos que E tem **medida nula** se podemos encontrar uma sequência $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon$.

Por exemplo, o conjunto unitário $\{x\}$ tem medida nula. De fato, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar, por exemplo, $I_1 = (x - \epsilon/4, x + \epsilon/4)$ e $I_n = [0, 0]$ para $n \geq 2$. Então, $\{x\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \ell(I_1) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Qualquer conjunto enumerável tem medida nula. De fato, basta tomarmos $I_n = [x_n, x_n]$. Em particular, $\mathbb{Q}$ tem medida nula.

Exemplo 2.1 *O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tem medida nula.*

De fato, lembrando que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{kj}$ com I_{kj} intervalos fechados de comprimento 3^{-k} , podemos considerar a sequência $\{I_{kj}, 1 \leq j \leq 2^k, k \in \mathbb{N}\}$ cujo comprimento total é dado por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{kj}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \ell(I_{nj}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ para n suficientemente grande temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{kj}) < \epsilon$, e logo, o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tem medida nula. ■

2.1.2 Medida Lebesgue 1-dimensional

A definição de “medida nula” de um conjunto de $\mathbb{R}$ e a propriedade que todo intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é a união finita de intervalos disjuntos com comprimentos arbitrariamente pequenos (logo o seu comprimento é a soma dos comprimentos de cada intervalo), sugere que podemos obter o “comprimento” de qualquer conjunto E de $\mathbb{R}$ cobrindo E com uma sequência de intervalos e considerar a cobertura com menor comprimento total. Ou seja,

$$m_e(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n), \quad (2.1)$$

com o ínfimo tomado sobre todas as sequências de intervalos I_n tais que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

$m_e(E)$ é chamada **medida Lebesgue exterior**.

Claramente $m_e(E) \geq 0$ para qualquer subconjunto E de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n); E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ intervalos} \right\}$ é limitado inferiormente, e logo, o seu ínfimo

existe. Além disso, podemos encontrar conjuntos E para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$ diverge para todas as coberturas de E , neste caso $m_e(E) = \infty$. Assim, $0 \leq m_e(E) \leq \infty$.

Podemos mostrar (veja [1]) que E tem medida nula se, e somente se $m_e(E) = 0$ e que a medida Lebesgue exterior de um intervalo limitado é o seu comprimento.

Já comentamos que a medida exterior $m_e(E)$ não é aditiva enumerável, mas que restrita a classe $\mathcal{M}$ dos conjuntos (Lebesgue) mensuráveis é uma medida. A definição de *conjunto mensurável* é baseada no conceito de σ -álgebra (para mais detalhes consulte [1]).

Destacaremos as propriedades fundamentais da classe $\mathcal{M}$ no seguinte resultado:

Teorema 2.1 (i) $\mathbb{R}$ é mensurável; todo intervalo I é mensurável; todo conjunto com medida nula é mensurável;
(ii) se um conjunto é mensurável então o seu complementar também é mensurável;
(iii) a união e a interseção infinita de uma sequência de conjuntos mensuráveis é mensurável;

Escreveremos $m_e(E) = \mathcal{L}^1(E)$ para todo E mensurável e chamaremos $\mathcal{L}^1(E)$ de **medida Lebesgue 1-dimensional**.

2.1.3 Medida Lebesgue n-dimensional

Podemos generalizar a medida Lebesgue para os espaços $\mathbb{R}^n$. Seja R o hiper-retângulo do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$R = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n] \quad (2.2)$$

com $a_k < b_k$ para todo $1 \leq k \leq n$. O “hiper-volume” de R é definido por

$$vol^n(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Se $E \subset \mathbb{R}^n$ definimos a medida Lebesgue exterior por

$$m_e(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} vol^n(R_k); E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right\}. \quad (2.3)$$

com o ínfimo tomado sobre todas as sequências $\{R_k\}$ que cobrem E .

A medida exterior $m_e(E)$ restrita aos conjuntos mensuráveis do $\mathbb{R}^n$ é uma medida chamada **medida Lebesgue n -dimensional** e será representado por $\mathcal{L}^n(E)$.

No que segue, enunciaremos alguns resultados sobre conjuntos Lebesgue mensuráveis.

Teorema 2.2 (i) R é mensurável e $\mathcal{L}^n(R) = \text{vol}^n(R)$;

(ii) Se E é mensurável então o complementar de E é mensurável;

(iii) união e intersecção infinita de conjuntos mensuráveis é mensurável;

(iv) Todo subconjunto aberto ou fechado do espaço $\mathbb{R}^n$ é mensurável;

(v) Se E e F são mensuráveis e $E \subset F$ então $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(F)$

(vi) Se (E_k) é uma sequência de subconjuntos abertos do espaço $\mathbb{R}^n$ então $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$ é mensurável;

(vii) Se (F_k) é uma sequência de subconjuntos fechados do espaço $\mathbb{R}^n$ então $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ é mensurável;

(viii) Se (E_k) é uma sequência de subconjuntos L -mensuráveis do espaço $\mathbb{R}^n$ tal que $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k \subset \dots$ então $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(E_k)$;

(ix) Se (E_k) é uma sequência de subconjuntos mensuráveis do espaço $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{L}^n(E_1) < \infty$ e $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_k \supset \dots$ então $\mathcal{L}^n\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(E_k)$.

Observação 2.1 Seja o diâmetro do conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ definido por

$$\text{diam}(E) = |E| = \sup\{\|x - y\|; x, y \in E\}. \quad (2.4)$$

Para $\delta > 0$ dado, podemos restringir os hiper-retângulos $\{R_k; k \in \mathbb{N}\}$ aos com diâmetro menor do que δ . Por exemplo, podemos sucessivamente bissecionar os lados do retângulo para obter retângulos com diâmetros menores do que δ .

Exemplo 2.2 Todo conjunto enumerável da reta é mensurável.

De fato, seja E um conjunto enumerável de $\mathbb{R}$ então cada elemento de E é um intervalo fechado do tipo $[x, x]$ e como a união de intervalos fechados é mensurável tem-se E é mensurável. Além disso, $\mathcal{L}^1(E) = 0$. ■

Em particular, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é mensurável. Além disso, como seu complementar é o conjunto dos números irracionais temos que este também é mensurável.

O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é mensurável, pois é a interseção enumerável de fechados de $\mathbb{R}$. Além disso, $\mathcal{L}^1(\mathcal{C}) = 0$.

Exemplo 2.3 O triângulo de Sierpiński é mensurável com $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}) = 0$.

De fato, $\mathcal{S}$ é mensurável, pois é a interseção enumerável de fechados do espaço $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_k) = \frac{3}{4}\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_{k-1}) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_{k-2})\right) = \dots = \left(\frac{3}{4}\right)^k \mathcal{L}^2(\mathcal{S}_0)$. Como $\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \dots \supset \mathcal{S}_k \supset \dots$ e $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}_0) = \frac{1}{2}$ tem-se

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{S}) = \mathcal{L}^2\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^2(\mathcal{S}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 0. \blacksquare$$

Note que o comprimento do triângulo de Sierpiński é infinito. De fato, $\mathcal{L}^1(\mathcal{S}_k) = \frac{3}{2}\mathcal{L}^1(\mathcal{S}_{k-1}) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\mathcal{L}^1(\mathcal{S}_{k-2})\right) = \dots = \left(\frac{3}{2}\right)^k \mathcal{L}^1(\mathcal{S}_0) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^k$. Assim,

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{L}^1\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^1(\mathcal{S}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty.$$

2.1.4 O Tapete de Sierpiński

A construção do tapete de Sierpiński se inicia com uma região quadrada $\mathcal{Q}_0$ de lado unitário, que é dividida em nove regiões quadradas menores cujos lados medem $1/3$ do lado de $\mathcal{Q}_0$ (Figura 2.1). Extraí-se apenas a região central, obtendo-se $\mathcal{Q}_1$, que é formada então por oito quadrados menores. Em cada um desses quadrados menores, repete-se a mesma operação para se obter $\mathcal{Q}_2$, que é constituída por 64 quadrados com lados que medem $1/27$ do lado de $\mathcal{Q}_0$. Procedendo-se recursivamente, obtém-se uma seqüência

$$\mathcal{Q}_0 \supset \mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}_2 \supset \dots ,$$

com cada $\mathcal{Q}_k$ é formado por 8^k regiões quadradas, similares à região inicial, cujos lados medem $1/3^k$ da medida do lado do quadrado inicial $\mathcal{Q}_0$. O limite desta seqüência

$$\mathcal{Q} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_k$$

é o **Tapete de Sierpiński**.

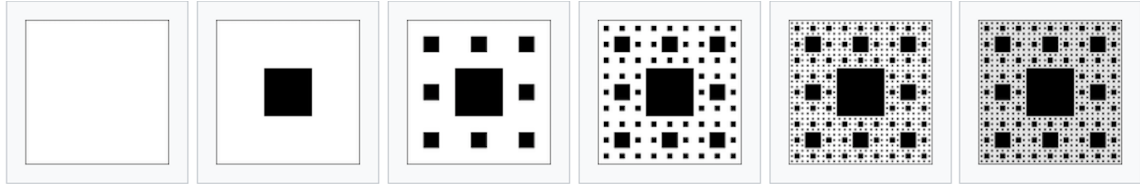


Figura 2.1: Tapete de Sierpiński
Fonte: Wikipedia.org

Exemplo 2.4 O tapete de Sierpiński é mensurável com $\mathcal{L}^2(\mathcal{Q}) = 0$.

De fato, $\mathcal{Q}$ é mensurável, pois é a interseção enumerável de fechados do espaço $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\mathcal{L}^2(\mathcal{Q}_k) = \frac{8}{9} \mathcal{L}^2(\mathcal{Q}_{k-1}) = \frac{8}{9} \left(\frac{8}{9} \mathcal{L}^2(\mathcal{Q}_{k-2}) \right) = \dots = \left(\frac{8}{9} \right)^k \mathcal{L}^2(\mathcal{Q}_0)$. Como $\mathcal{Q}_0 \supset \mathcal{Q}_1 \supset \dots \supset \mathcal{Q}_k \supset \dots$ e $\mathcal{L}^2(\mathcal{Q}_0) = 1$ tem-se

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{Q}) = \mathcal{L}^2\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^2(\mathcal{Q}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k = 0. \blacksquare$$

Não é complicado verificar que o comprimento do tapete de Sierpiński é infinito.

2.1.5 A Esponja de Menger

A construção da Esponja se inicia com um cubo $\mathcal{M}_0 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, dividindo-o em 27 cubos menores e congruentes, cujas arestas medem um terço da aresta do cubo inicial (basta para isso dividir cada aresta em três partes iguais e, pelos pontos de divisão, traçar planos paralelos às faces do cubo). Retiram-se então de $\mathcal{M}_0$ o cubo menor central e os seis cubos menores “dos centros das faces”, de modo que, se olharmos a figura de frente a cada face de $\mathcal{M}_0$, veremos um quadrado “vazado”. Obtém-se assim o “cubo” $\mathcal{M}_1$, que é constituído então por 20

cubos menores, cujas arestas medem um terço da medida da aresta de $\mathcal{M}_0$. Em cada um dos 20 cubos menores repete-se então a mesma operação, obtendo-se assim $\mathcal{M}_2$, que é formado por 400 cubos de arestas que medem um nono da medida da aresta de $\mathcal{M}_0$. Prossegue-se então indefinidamente, gerando uma seqüência $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \dots \supset \mathcal{M}_k \dots$, cujo limite

$$\mathcal{M} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$$

é a **esponja de Menger**.

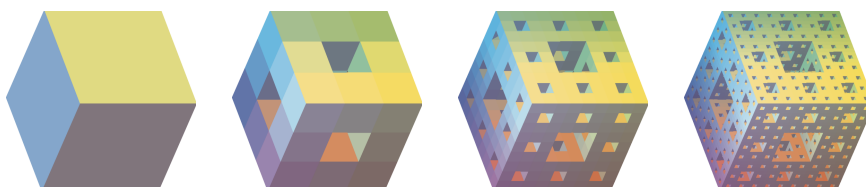


Figura 2.2: Construção da Esponja de Menger
Autor: Marcos Monteiro Diniz

Exemplo 2.5 A esponja de Menger é mensurável com $\mathcal{L}^3(\mathcal{C}) = 0$.

De fato, $\mathcal{M}$ é mensurável, pois é a interseção enumerável de fechados do espaço $\mathbb{R}^3$. Além disso, $\mathcal{L}^3(\mathcal{M}_k) = \frac{20}{27} \mathcal{L}^3(\mathcal{S}_{k-1}) = \frac{20}{27} \left(\frac{20}{27} \mathcal{L}^3(\mathcal{M}_{k-2}) \right) = \dots = \left(\frac{20}{27} \right)^k \mathcal{L}^3(\mathcal{M}_0) = \left(\frac{20}{27} \right)^k$. Como $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \dots \supset \mathcal{M}_k \supset \dots$ e $\mathcal{L}^3(\mathcal{M}_0) = 1$ tem-se

$$\mathcal{L}^3(\mathcal{M}) = \mathcal{L}^3 \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^3(\mathcal{M}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27} \right)^k = 0.$$

Não é complicado verificar que a área da esponja de Menger é infinita.

2.2 Medida Hausdorff s -dimensional

Podemos definir no $\mathbb{R}^n$ uma medida, que generaliza a medida de Lebesgue (definida em [2.3](#)), restringindo os retângulo R_k (dados em [2.2](#)) àqueles com diâmetros menores do que um número $\delta > 0$ dado e tomando potências $s \in \mathbb{R}$ destes diâmetros para depois fazer δ suficientemente pequeno.

Assim, podemos definir a seguinte medida exterior em $\mathbb{R}^n$, conhecida como *medida Hausdorff exterior s -dimensional*.

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\delta^s(E), \quad (2.5)$$

com

$$\overline{\mathcal{H}}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |R_k|^s; E \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k, |R_k| \leq \delta \right\}.$$

A medida exterior $\overline{\mathcal{H}}^s$ restrita aos seus conjuntos mensuráveis é uma medida chamada **medida Hausdorff s -dimensional** e será representada por $\mathcal{H}^s$.

Note que, estamos considerando todas as coberturas de E por conjuntos cujos diâmetros são no máximo δ e minimizando a série de s -potência dos diâmetros. Note também que, para E fixo, $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ é uma função de s e δ . Se a série em (2.5) diverge tomamos como ínfimo o valor ∞ e portanto a função $\mathcal{H}_\delta^s$ assume valores em $[0, \infty]$. Em particular, para um s fixo, quando δ decresce a função $\mathcal{H}_\delta^s$ cresce porque uma cobertura $\{U_k\}$ de diâmetro δ também é uma cobertura de diâmetro δ_1 para qualquer $\delta_1 \geq \delta$. Deste modo podemos garantir a existência do limite.

Por convenção, definimos $\mathcal{H}^0(E)$ interpretando $(diam(E))^0 = 1$ quando E é um conjunto limitado e não vazio e $(diam(\emptyset))^0 = 0$. Podemos considerar como cobertura de E conjuntos abertos U em evz do retângulo R , vamos chamar estas coberturas de δ -coberturas de E .

A medida Hausdorff generaliza a medida Lebesgue. Podemos mostrar que para subconjunto do $\mathbb{R}^n$, a medida Hausdorff n -dimensional é comparável a medida Lebesgue n -dimensional (veja [12, p.13 teorema 1.2]). Mais precisamente, se E é um subconjunto Borel do $\mathbb{R}^n$, então

$$\mathcal{H}^n(E) = c_n^{-1} \mathcal{L}^n(E), \quad (2.6)$$

sendo c_n o volume da bola n -dimensional de diâmetro 1.

Exemplo 2.6 A medida Hausdorff 1-dimensional do conjunto de Cantor é zero, ou seja $\mathcal{H}^1(C) = 0$;

(ii) a medida Hausdorff 2-dimensional do triângulo de Sierpiński é zero, ou seja

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{S}) = 0;$$

(iii) a medida Hausdorff 3-dimensional da esponja de Menger é zero, ou seja $\mathcal{H}^3(\mathcal{M}) = 0$.

De fato, usando (2.6) e os exemplos (2.1), (??) e (2.5) os resultados seguem. ■

A medida Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades:

(i) É homogênea de grau s com relação a dilatação: $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$, $\lambda > 0$.

(ii) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitz, isto é, $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq \beta \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$ então $\mathcal{H}^s(\psi(E)) \leq \beta^s \mathcal{H}^s(E)$.

Note que, se ψ é uma isometria, isto é, $\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|x - y\|$, então $\mathcal{H}^s(\psi(E)) = \mathcal{H}^s(E)$ e logo a medida Hausdorff é invariante por translações e rotações.

No seguinte exemplo mostraremos (como era esperado) que a medida Hausdorff 1-dimensional de uma curva simples é o comprimento da curva.

Exemplo 2.7 Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva injetora e contínua. Então a medida de Hausdorff 1-dimensional de α é o seu comprimento, ou seja, $\mathcal{H}^1(\alpha([a, b])) = \ell$ com

$$\ell = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|; a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}.$$

De fato, é fácil provar que se $[x, y]$ é o segmento que une os pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ então $\mathcal{H}^1([x, y]) = \|y - x\|$.

Agora, para $a \leq t \leq s \leq b$ seja $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal sobre a reta que passa por $\alpha(t)$ e $\alpha(s)$. Então π é uma função Lipschitz com constante 1 e logo

$$\mathcal{H}^1(\alpha([t, s])) \geq \mathcal{H}^1(\pi \circ \alpha([t, s])) = \mathcal{H}^1([\alpha(t), \alpha(s)]) = \|\alpha(s) - \alpha(t)\|$$

Portanto, para qualquer escolha $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ temos que

$$\mathcal{H}^1(\alpha([a, b])) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^1(\alpha[t_{i-1}, t_i]) \geq \sum_{k=1}^m \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \ell.$$

Para provarmos a recíproca, vamos assumir $\ell < \infty$. Considere a função comprimento

de arco $l : [a, b] \rightarrow [0, \ell]$ dada por

$$l(t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|; 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t \right\}.$$

Vamos mostrar que $l(t)$ é contínua. Como α é injetora temos que l é estritamente crescente e logo tem inversa contínua $l^{-1} : [0, \ell] \rightarrow [a, b]$. Note que $\alpha \circ l^{-1}$ é uma parametrização da curva por comprimento de arco e logo é Lipschitz com constante 1. Portanto,

$$\mathcal{H}^1(\alpha([a, b])) = \mathcal{H}^1(\alpha \circ l^{-1}([0, \ell])) \leq \mathcal{H}^1([0, \ell]) = \ell. \quad \blacksquare$$

2.3 Dimensão Hausdorff

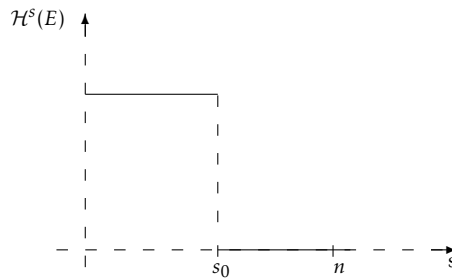
Vamos relembra a comparação do processo de medir com a visualização de um objeto por um microscópio que fizemos na introdução deste texto: se a lente do microscópio encontra-se muito próxima do objeto, a imagem encherá o visor e o objeto aparecerá muito grande para ser medido; se a lente está muito longe, objeto aparecerá muito pequeno para ser medido. No foco ideal (ou seja, na dimensão do objeto), a imagem estará ajustada e o objeto poderá ser medido. Deste modo, podemos usar, por exemplo, a medida Lebesgue para definir um certo **tipo de dimensão**, que é o foco ideal. Por exemplo, $\mathcal{L}^0((a, b]) = \infty$, $\mathcal{L}^1((a, b]) = b - a$ e $\mathcal{L}^2((a, b]) = 0$ e, logo, a medida Lebesgue 1-dimensional é o foco ideal para medirmos o intervalo $(a, b]$. Porém, para a medida Lebesgue 1-dimensional o conjunto de Cantor é *invisível*, ou seja, não é detectado. Será que podemos generalizar este conceito de dimensão de tal modo que alguns conjuntos com medida Lebesgue n -dimensional nula, *olhados com este novo foco*, sejam mensuráveis? Como a medida Hausdorff é a generalização da medida Lebesgue, é natural usarmos esta medida para definir esta dimensão, chamada **dimensão Hausdorff**.

Considere o conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta < 1$ fixos então a medida Hausdorff $\mathcal{H}^s(E)$ é uma função apenas de s . Neste caso, para $t > s$ e $\{U_k\}$ uma δ -cobertura de E temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^t \leq \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^{t-s} |U_k|^s \leq \epsilon^{t-s} \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s,$$

e tomando o ínfimo tem-se $\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E)$.

Agora, fazendo $\delta \rightarrow 0$ observamos que se $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ então $\mathcal{H}^t(E) = 0$ e se $\mathcal{H}^t(E) > 0$ temos que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Deste modo, o gráfico de $\mathcal{H}^s(E)$ é uma função do tipo escada com um único ponto de descontinuidade.



Isto implica que existe um valor crítico $s_0 \in [0, \infty]$ tal que

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & \text{se } s < s_0 \\ 0 & \text{se } s > s_0 \end{cases}$$

O valor crítico s_0 é chamado **dimensão Hausdorff** do conjunto E e representa-se por $\dim_H E$. Assim, por definição, temos que

$$\dim_H E = \sup\{s; \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = \inf\{s; \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

Note que se $0 < \mathcal{H}^{s^*}(E) < \infty$ para algum s^* então $s^* = \dim_H E$. Em geral, nada podemos afirmar sobre a medida $\mathcal{H}^{s_0}(E)$ que pode ser zero, um número positivo ou ∞ . Quando $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ dizemos que E é um s -conjunto.

A dimensão Hausdorff satisfaz as seguintes propriedades:

Monotonicidade: Se $E \subset F$ então $\dim_H E \leq \dim_H F$. Isto é consequência imediata da seguinte propriedade de medida: $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para todo s .

Estabilidade enumerável: Se $\{E_i\}$ é uma seqüência enumerável então $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \{\dim_H E_i\}$.

Conjuntos enumeráveis: Se E é enumerável então $\dim_H E = 0$. De fato, se E_i é formado por um único ponto então $\mathcal{H}^0(E) = 1$ e $\dim_H E_i = 0$, usando a propriedade

de estabilidade enumerável $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = 0$.

Conjuntos Abertos: Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto então $\dim_H E = n$. De fato, como E contém uma bola de n -dimensional volume positivo temos que $\dim_H E \geq n$. Mas E é a reunião enumeráveis de bolas, portanto pela propriedade estabilidade enumerável é imediato que $\dim_H E = n$.

Conjuntos regulares: Se E é uma variedade do $\mathbb{R}^n$ (ou seja, uma superfície contínua e diferenciável) então $\dim_H E = m$ com $m < n$. Em particular, curvas regulares tem dimensão Hausdorff igual a 1 e superfícies regulares tem dimensão Hausdorff igual a 2.

Bi-Lipschitz: Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função *bi-lipschitz*, isto é, para c_1, c_2 constantes positivas tem-se $c_1 \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2 \|x - y\|$, então $\dim_H f(E) = \dim_H E$.

Voltando a comparação com o microscópio, agora nosso *foco ideal* é a dimensão Hausdorff e esperamos que alguns conjuntos com medida Lebesgue nula, tal como o conjunto de Cantor, possam ser detectados pela dimensão Hausdorff e sua medida possa ser calculada.

No que segue, calcularemos a dimensão Hausdorff de alguns conjuntos diretamente da definição. Em geral, não é fácil determinar este valor mesmo para subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Podemos facilmente obter uma cota *superior* da $\dim_H E$ escolhendo adequadamente a δ -cobertura, a dificuldade aparece quando vamos calcular a cota *inferior*, pois devemos considerar todas as coberturas de E . Porém, no caso unidimensional a situação é relativamente simples. De fato, note que a definição de δ -coberturas não perde a sua generalidade se considerarmos uma sequência $\{U_k\}$ de conjuntos fechados e conexos como cobertura, logo basta considerarmos seqüências de intervalos fechados de comprimento menor ou igual a δ para cobrir um subconjunto E de $\mathbb{R}$.

Nosso primeiro exemplo é o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. O conjunto de Cantor é um dos raros conjuntos cuja medida Hausdorff podemos calcular e a sua dimensão foi calculada pela primeira vez em 1919 por F. Hausdorff em seu famoso trabalho.

Exemplo 2.8 A dimensão Hausdorff do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é $s_0 = \ln 2 / \ln 3 (\cong 0.63092)$ e a medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}) = 1$.

De fato, sabemos que o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é dado por $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$, sendo C_k a união de intervalos fechados disjuntos de comprimento 3^{-k} . Assim, podemos considerar C_k uma cobertura de $\mathcal{C}$ e para $\delta \geq 3^{-k}$ obtemos

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(\mathcal{C}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (3^{-k})^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s} \right)^k.$$

Mas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s} \right)^k = 0 \quad \text{se} \quad \frac{2}{3^s} < 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s} \right)^k = 1 \quad \text{se} \quad \frac{2}{3^s} = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s} \right)^k = \infty \quad \text{se} \quad \frac{2}{3^s} > 1.$$

Então $\frac{2}{3^s} = 1 \Rightarrow \ln 2 = \ln 3^s \Rightarrow s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Portanto, temos que $s_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ é o número candidato a $\dim_H \mathcal{C}$. Note que para $s_0 = \ln 2 / \ln 3$ temos que $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}) \leq 1$. Então para provarmos que s_0 é a dimensão Hausdorff de $\mathcal{C}$ basta mostrarmos que $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}) > 0$ (ou $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}) \geq 1$). podemos encontrar a prova que $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}) \geq 1$ em [12] p.14]. ■

Exemplo 2.9 A dimensão Hausdorff do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é n .

2.3.1 Dimensão Topológica e dimensão Hausdorff

No espaço $\mathbb{R}^n$ a relação entre dimensão topológica e dimensão Hausdorff é que a dimensão topológica é sempre menor ou igual a dimensão Hausdorff, ou seja, $\dim_T X \leq \dim_H X$. (veja [8] p. 155)].

Se estas dimensões são diferentes então a dimensão Hausdorff é sempre maior e pode ser um número não inteiro. Como mencionamos anteriormente, Mandelbrot usou este resultado para dar a seguinte definição de **fractal**:

Definição 2.1 Dizemos que o conjunto X é um fractal se $\dim_T X < \dim_H X$.

De acordo com a definição 2.1 conjuntos familiares tais como segmentos de reta e os polígonos da geometria euclidiana não são fractais. O conjunto de Cantor é um fractal, pois sua dimensão topológica é zero e a sua dimensão Hausdorff é $\ln 2 / \ln 3$.

Existem conjuntos “muito irregulares” que não são fractais segundo a definição 2.1, por exemplo, o gráfico G_T da função Takagi $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(2^n x)/2^n$ com $\psi(x) = d(x, \mathbb{Z})$ a distância entre x e o inteiro mais próximo de x .

De fato, sabemos que o gráfico de qualquer função contínua tem dimensão topológica igual a dimensão topológica do domínio da função (veja exemplo 1.11). Além disso, podemos mostrar que $\dim_H G_T = 1$. Logo, $\dim_T G_T = \dim_H G_T = 1$.

Assim, $T(x)$ é exemplo de uma função contínua que não tem derivada em nenhum ponto e portanto, o seu gráfico é um conjunto com um certo “grau de irregularidade”, que não é um fractal segundo a definição 2.1.

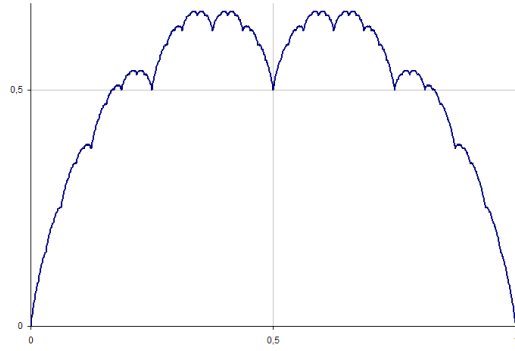


Figura 2.3: Gráfico da função Takagi
Fonte:Wikipedia.org

O exemplo acima mostra que para dar uma definição de fractal, que seja mais abrangente do que a definição dada por Mandelbrot, precisamos investigar outras propriedades destes conjuntos tais como: autossimilaridade e estrutura fina.

2.4 Dimensão por contagem de caixas

Sejam $\epsilon > 0$, E um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ e $N(\epsilon)$ o menor número de caixas (bolas de diâmetro ϵ) necessárias para cobrir E , ou seja,

$$N(\epsilon) = \min \left\{ N ; \exists B_1, B_2, \dots, B_N \text{ bolas com diâmetro } \epsilon \text{ tais que } E \subset \bigcup_{i=1}^N B_i \right\}. \quad (2.7)$$

Como E é compacto então tem coberturas finitas, vamos considerar o número de caixas em cada uma destas coberturas sem levar em conta como elas cobrem E .

Por exemplo, para $E = [0, 1]$ temos que as caixas são intervalos abertos de diâmetro ϵ e podemos considerar as seguinte escolhas:

ϵ	1/2	1/3	1/4	1/5
$N(\epsilon)$	2	3	4	5

Observe que $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$. Agora, para $E = [0, 1] \times [0, 1]$ temos que as caixas podem ser quadrados de lado ϵ e podemos considerar as seguintes escolhas:

ϵ	1/2	1/3	1/4	1/5
$N(\epsilon)$	2^2	3^2	4^2	5^2

Observe que $N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^2$. Para o caso $E = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ temos que $N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3$. Para o caso $E = [0, 1]^n$ teremos $N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^n$. Note que a relação entre $N(\epsilon)$ e $1/\epsilon$ é uma lei de potência.

Estamos interessados na *taxa de crescimento* de $N(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Se E é um conjunto finito então $N(\epsilon) \approx C$, com C uma constante. Se E é uma curva "regular" então $N(\epsilon) \approx C/\epsilon$. Analogamente, se E é uma m -dimensional superfície "regular" então $N(\epsilon) \approx C/\epsilon^m$. A idéia é que para conjuntos n -dimensionais "usuais" do $\mathbb{R}^n$ tenhamos $N(\epsilon) \approx 1/\epsilon^n$. Note que o índice n é igual a dimensão topológica de E e é dado por $n \approx \ln N(\epsilon)/\ln(1/\epsilon)$.

Deste modo, podemos definir uma dimensão obtida *por uma escala* ϵ . Para cada ϵ , medimos o conjunto ignorando as "irregularidades" dos tamanhos menores que ϵ e analisamos como esta *medida* se comporta quando $\epsilon \rightarrow 0$. Em geral, a dimensão de E é determinada por uma lei de potência satisfeita por $N(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Se C e s são constantes e

$$N(\epsilon) \approx C(1/\epsilon)^s$$

podemos dizer que E tem dimensão s e que E tem *s-dimensional medida* igual a C . Tomando o logaritmo e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}.$$

A motivação acima sugere a seguinte definição de dimensão, conhecida como **dimensão por contagem de caixas**:

Definição 2.2 *Sejam E qualquer conjunto não vazio e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $N(\epsilon)$ dado por (2.7). A **dimensão por contagem de caixa** de E é definida por*

$$\dim_B E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \right), \quad (2.8)$$

quando o limite existe.

A dimensão por contagem de caixas também é conhecida como textitentropy Kolmogorov ou *dimensão Minkowsky*.

Se o limite (2.8) não existe, podemos definir dimensão por contagem de caixas **inferior** (representada por $\underline{\dim}_B E$) e **superior** (representada por $\overline{\dim}_B E$) como, respectivamente, os limites

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \right) \quad \text{e} \quad \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \right).$$

Exemplo 2.10 *A dimensão por contagem de caixas do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é $\ln 2 / \ln 3$.*

De fato, usando as coberturas C_k de $\mathcal{C}$ que são formadas por 2^k intervalos fechados de diâmetro 3^{-k} e tomando $3^{-k-1} \leq \epsilon \leq 3^{-k}$ obtemos $N(\epsilon) \leq 2^k$ então

$$\overline{\dim}_B \mathcal{C} = \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^{k-1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Por outro lado, usando a construção de $\mathcal{C}$ temos que qualquer intervalo de comprimento ϵ com $3^{-k-1} \leq \epsilon \leq 3^{-k}$ intercepta no máximo um dos intervalos C_k de comprimento 3^{-k} , mas existem 2^k intervalos C_k e portanto pelo menos 2^k intervalos de comprimento ϵ são necessários para cobrir $\mathcal{C}$. Logo $N(\epsilon) \geq 2^k$ e conseqüentemente $\underline{\dim}_B \mathcal{C} \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$ ■

Exemplo 2.11 *O conjunto $E = \{0\} \cup \{1/k; k \in \mathbb{N}\}$ tem dimensão por contagem de caixas é $1/2$.*

De fato, dado $\epsilon > 0$. Note que a distância entre $1/k$ e $1/(k+1)$ satisfaz

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} > \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Assim, escolhendo n tal que $\frac{1}{(n+2)^2} < \epsilon < \frac{1}{(n+1)^2}$ vemos que para cobrir os pontos $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ são necessários pelo menos n intervalos de comprimento ϵ . Logo,

$$N(\epsilon) \geq n \geq \frac{1}{\epsilon^2} - 2,$$

o que implica $\dim_B E \geq 1/2$.

Por outro lado, escolhendo n tal que $\frac{1}{n^2} < \epsilon < \frac{1}{(n-1)^2}$ cobrimos o intervalo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ com n intervalos de comprimento ϵ e cobrimos os pontos restantes $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}$ com $n-1$ intervalos. Então,

$$N(\epsilon) \leq n + (n-1) = 2n - 1 \leq 2\left(\frac{1}{\epsilon^{1/2}} + 1\right) - 1 = \frac{2}{\epsilon^{1/2}} + 1,$$

o que implica $\overline{\dim}_B E \leq 1/2$. ■

O exemplo (2.11) ilustra uma indesejável propriedade da dimensão por contagem de caixas: um conjunto enumerável não ter dimensão zero.

A função $\overline{\dim}_B$ satisfaz as condições estabelecidas na nossa definição de dimensão quando substituímos a propriedade de “estabilidade enumerável” por “estabilidade finita” e a propriedade de invariância é obtida na subclasse das funções bi-Lipschitz.

Como já foi mencionado, não é muito fácil calcularmos a dimensão Hausdorff de um conjunto, mas é possível obter estimativas bastante interessantes usando a dimensão por contagem de caixas. Por exemplo, se considerarmos apenas coberturas por bolas de diâmetros iguais obtemos a seguinte estimativa:

Proposição 2.1 Se $E \subset \mathbb{R}^n$ então $\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E$.

Prova: Escolha uma seqüência $\epsilon_k \rightarrow 0$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln N(\epsilon_k)}{\ln(1/\epsilon_k)} \right) = \underline{\dim}_B E.$$

Se $s > \underline{\dim}_B E$ então $N(\epsilon_k) \leq \left(\frac{1}{\epsilon_k}\right)^s$ para k suficientemente grande. Seja $\{B_i\}$ uma

cobertura de E de $N(\epsilon_k)$ bolas de diâmetros ϵ_k então

$$\mathcal{H}_{\epsilon_k}^s(E) \leq \sum |B_i|^s = \epsilon_k^s N(\epsilon_k) \leq 1,$$

logo quando $k \rightarrow \infty$ tem-se $\mathcal{H}^s(E) \leq 1$. Como isto vale para qualquer $s > \underline{\dim}_B E$, segue que $\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E$. ■

2.5 Dimensão Hausdorff de gráficos de funções

Uma importante classe de fractais estudada atualmente é a dos gráficos de funções reais contínuas. A maior parte dos exemplos estudados atualmente é formada por funções que são descritas através de séries de funções absolutamente convergentes, como as funções de Weierstrass:

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i t) , \quad (2.9)$$

com $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$.

O cálculo da dimensão Hausdorff de tais gráficos é difícil e em vários casos, como no das funções de Weierstrass, não foi ainda realizado. No entanto, a obtenção da dimensão por contagem de caixas, quando possível, fornece um majorante para a dimensão Hausdorff do gráfico (veja proposição 2.1).

É importante ressaltar que há gráficos considerados fractais ainda que sua dimensão Hausdorff coincida com sua dimensão topológica (que, conforme visto no exemplo 1.11, é igual a 1). É o caso, por exemplo, do gráfico da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i(i-1)-1} \Delta(2^{i(i+1)+1} x) , \quad (2.10)$$

com $\Delta(x) = \inf\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}$ representa distância de x ao inteiro mais próximo (ver Fig. 2.4). Neste caso, pode-se mostrar que, além de o gráfico possuir dimensão Hausdorff 1, ele possui localmente medida unidimensional infinita (veja [14]).

Há exemplos também de funções contínuas cujos gráficos possuem dimensão

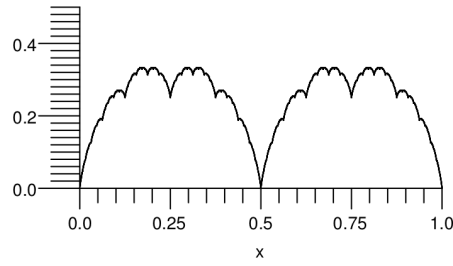


Figura 2.4: Gráfico da função (2.10)
Autor: Marcos Monteiro Diniz

Hausdorff 2, como por exemplo a função (veja [25]).

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \Delta(2^{2^i} x) , \quad (2.11)$$

cujo gráfico é apresentado na Fig. 2.5

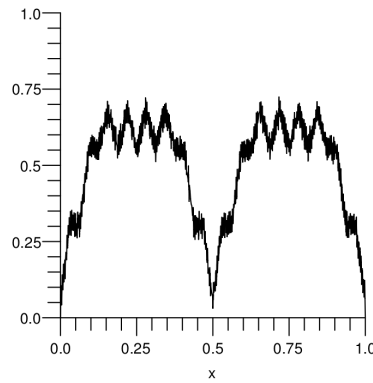


Figura 2.5: Gráfico da função (2.11).
Autor: Marcos Monteiro Diniz

No que segue, apresentamos, sem demonstração, dois resultados sobre funções Hölder-contínuas que têm por consequência a determinação da dimensão por caixas da função de Weierstrass (2.9). Para maiores detalhes consulte [11].

Teorema 2.3 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se existirem $c > 0$, $\delta > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, tais que*

$$|r - t| < \delta \Rightarrow |f(r) - f(t)| \leq c|r - t|^\alpha, \quad (2.12)$$

então

$$\dim_H(\text{Graf}_f) \leq \overline{\dim}_B(\text{Graf}_f) \leq 2 - \alpha.$$

Teorema 2.4 *Sejam $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $c > 0$, $\delta_o > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$, tais que, dados $t \in [0, 1]$ e $0 < \delta \leq \delta_o$, existe $u \in [t - \delta, t + \delta]$ com*

$$|f(t) - f(u)| \geq c\delta^\alpha.$$

Então

$$\underline{\dim}_B(\text{Graf}_f) \geq 2 - \alpha.$$

Uma consequência imediata do Teorema 2.3 é que funções Lipschitzianas (funções para as quais a condição (2.12) vale para $\alpha = 1$) possuem dimensão Hausdorff 1. De fato, o Teorema 2.3 nos diz que em tal caso $\dim_H(\text{Graf}_f) \leq 1$. Como sabemos que toda função Lipschitziana é necessariamente contínua, temos que a dimensão topológica do gráfico coincide com a dimensão do domínio $[0, 1]$, segue portanto que $\dim_H(\text{Graf}_f) \geq \dim_T(\text{Graf}_f) = 1$. Portanto $\dim_H(\text{Graf}_f) = 1$. Em particular, funções diferenciáveis, com derivada limitada, possuem dimensão Hausdorff 1.

Outra decorrência do Teorema 2.3 e do fato de as funções de Weierstrass (2.9) satisfazerem a condição de Hölder (2.12) para $\alpha = 2 - s$ é a seguinte

Proposição 2.2 *Seja $W: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por*

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \text{sen}(\lambda^i t) , \quad (2.13)$$

onde $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$. Então $\overline{\dim}_B(\text{Graf}_W) \leq s$.

Proposição 2.3 *Seja $W: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por*

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \text{sen}(\lambda^i t) ,$$

com $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$. Então, se λ é suficientemente grande, $\underline{\dim}_B(\text{Graf}_W) \geq s$.

Uma consequência imediata dos últimos dois teoremas é a determinação da dimensão por caixas das funções de Weierstrass, para λ suficientemente grande:

Corolário 2.1 Seja $W: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \text{sen}(\lambda^i t) ,$$

com $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$. Então, se λ é suficientemente grande, $\dim_B(\text{Graf}_W) = s$.

Observe que a Proposição 2.2 fornece um majorante para a dimensão Hausdorff do gráfico de uma função de Weierstrass. De fato, como

$$\dim_H(\text{Graf}_W) \leq \underline{\dim}_B(\text{Graf}_W) \leq \overline{\dim}_B(\text{Graf}_W) ,$$

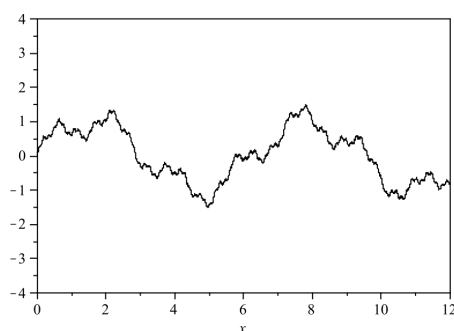
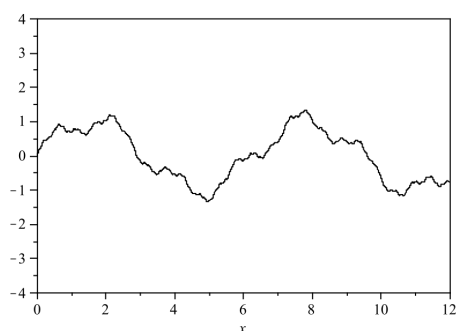
segue que

$$\dim_H(\text{Graf}_W) \leq s .$$

Conjectura-se que a dimensão de Hausdorff de uma função de Weierstrass seja exatamente s , mas até o presente momento as tentativas de demonstração desse resultado não obtiveram êxito. Abaixo são exibidos os gráficos das funções

$$W_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (3,5)^{(s-2)i} \text{sen}((3,5)^i t) ,$$

para $s = 1, 1,3 , 1,5$ e $1,8$.



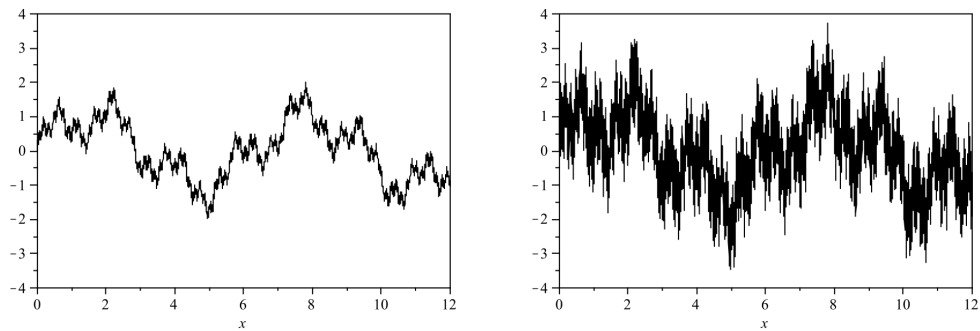
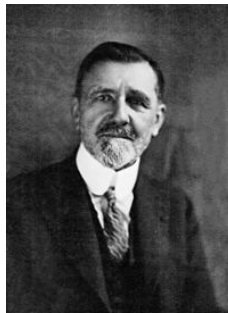


Figura 2.6: Gráfico das funções W_s .
Autor: Marcos Monteiro Diniz

2.6 Linha do tempo



Émile Borel

Fonte: Wikipedia.org

Matemático francês, em 1895 introduziu o conceito de medida para especificar o tamanho de conjuntos.



Henri Lebesgue

Fonte: Wikipedia.org

Matemático francês, em 1901 desenvolveu a teoria da medida como suporte para a teoria de integração.



Constantin Carathéodory

Fonte: Wikipedia.org

Matemático alemão, em 1915 generalizou o trabalho de Lebesgue e introduziu a medida s -dimensional para s inteiro.



Felix Hausdorff

Fonte: Wikipedia.org

Matemático alemão, em 1919 mostrou, em seu famoso artigo, que a medida de Carathéodory fazia sentido para s fracionário e mostrou que o conjunto ternário de Cantor tem medida $(\ln 2 / \ln 3)$ -dimensional finita e positiva. Em sua homenagem tais medidas são chamadas *medidas Hausdorff*.

Neste capítulo usaremos uma propriedade chamada *autossimilaridade* para estimar a dimensão Hausdorff de alguns conjuntos. De um modo muito simples, um conjunto é autossimilar se é formado por *cópias* de si mesmo. Por exemplo, o conjunto de Cantor é a união de duas cópias similares de si mesmo e a curva de Koch é formada por quatro cópias similares.

3.1 Construção por autossimilaridade

Podemos construir um objeto autossimilar reduzindo (ou ampliando), rodando e/ou transladando este objeto. Por exemplo, considere um quadrado Q unitário, se queremos reduzir este quadrado a metade (fator de redução $1/2$) devemos “transformar” todos os pontos deste quadrado em novos pontos cujas coordenadas serão a metade das coordenadas dos pontos originais (veja figura 3.1). Se queremos transladar Q duas unidades a direita da sua posição inicial devemos “transformar” todos os pontos de Q em novos pontos cujas coordenadas serão as coordenadas originais mais duas unidades. Como podemos descrever estas transformações?



Figura 3.1: Redução
Autora: Giordanna De Gregoriis

Por exemplo, se $P = (x, y)$ é um ponto de Q , para reduzirmos Q a metade trans-

formaremos $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $x_1 = \frac{x}{2}$ e $y_1 = \frac{y}{2}$. Podemos representar esta transformação do seguinte modo: $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

O mesmo vale para a translação. Transformaremos o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $x_1 = x + 2$ e $y_1 = y$. Esta transformação tem a seguinte representação: $f_2(x, y) = (x + 2, y)$.

Agora, se quisermos rodar Q um ângulo θ° no sentido anti-horário, cada ponto $P = (x, y)$ de Q deve ser transformado no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$ e $y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta$ (veja figura 3.2). Esta transformação tem a seguinte representação: $f_3(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.



Figura 3.2: Rotação
Autora: Giordanna De Gregoriis

Triângulo de Sierpiński

Vamos construir o triângulo de Sierpiński usando transformações autossimilares.

Seja S_0 a região triangular formada por um triângulo equilátero com vértices $(0, 0)$, $(1/2, 1)$ e $(1, 0)$ e o seu interior. Observe que S_1 é formado por três cópias de S_0 do seguinte modo:

- i) 1ª cópia: S_0 reduzido a metade;
- ii) 2ª cópia: S_0 reduzido a metade e transladado $\frac{1}{2}$ para a direita;
- iii) 3ª cópia: S_0 reduzido a metade e translado $\frac{1}{4}$ para a direita e $\frac{\sqrt{3}}{4}$ para cima.

Se $P = (x, y)$ são pontos do S_0 , podemos representar a regra de iteração por:

$$\begin{aligned}
 i) 1^a \text{ cópia : } & f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right); \\
 ii) 2^a \text{ cópia : } & f_2(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right); \\
 iii) 3^a \text{ cópia : } & f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aplicando as etapas acima recursivamente construiremos uma sequência $\{\mathcal{S}_k, k \in \mathbb{N}\}$ de figuras. Chamaremos as etapas (i), (ii) e (iii) de "regra de iteração".

Note que cada figura da sequência $\{\mathcal{S}_k, k \in \mathbb{N}\}$ é formada por três cópias reduzidas da figura anterior. Se $\mathcal{S}_k$ é a figura gerada na k -ésima iteração temos que

$$\mathcal{S}_{k+1} = f_1(\mathcal{S}_k) \cup f_2(\mathcal{S}_k) \cup f_3(\mathcal{S}_k).$$

Por exemplo, $\mathcal{S}_2 = f_1(\mathcal{S}_1) \cup f_2(\mathcal{S}_1) \cup f_3(\mathcal{S}_1)$.

Curva de Koch

Vamos construir a curva de Koch usando transformações autossimilares.

Seja I_0 um segmento unitário e a seguinte regra de iteração:

- i) 1ª cópia: I_0 reduzido $\frac{1}{3}$;
- ii) 2ª cópia: I_0 reduzido $\frac{1}{3}$, girado 60° no sentido anti-horário e transladado $\frac{1}{3}$ para a direita;
- iii) 3ª cópia: I_0 reduzido $\frac{1}{3}$, girado 60° no sentido horário, transladado $\frac{1}{2}$ para a direita e $\frac{\sqrt{3}}{6}$ para cima;
- iv) 4ª cópia: I_0 reduzido $\frac{1}{3}$ e transladado $\frac{2}{3}$ para a direita.

Se $P = (x, y)$ são pontos de I_0 , podemos representar a regra de iteração por:

- i) 1ª cópia: $f_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y)$;
- ii) 2ª cópia:

$$f_2(x, y) = \frac{1}{3} \left(x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) + \left(\frac{1}{3}, 0\right);$$
- iii) 3ª cópia:

$$f_3(x, y) = \frac{1}{3} \left(x \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - y \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), x \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right);$$
- iv) 4ª cópia: $f_4(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Aplicando a regra de iteração da curva de Koch recursivamente construiremos uma sequência $\{\mathcal{K}_j, j \in \mathbb{N}\}$ de figuras.

Observe que cada figura da sequência $\{\mathcal{K}_j, j \in \mathbb{N}\}$ é formada por quatro cópias reduzidas da figura anterior. Por exemplo, $\mathcal{K}_2$ tem quatro cópias de $\mathcal{K}_1$, e portanto,

é formada por 4^2 segmentos de comprimento $\frac{1}{3^2}$. Também $\mathcal{K}_3$ tem quatro cópias de $\mathcal{K}_2$ (ou 4^2 cópias de $\mathcal{K}_1$) e é formada por 4^3 segmentos de comprimento $\frac{1}{3^3}$. A figura limite desta sequência é chamada *curva de Koch*.

As funções f_i que formam a regra de iteração da curva de Koch ou do triângulo de Sierpiński são chamadas *sistema de funções iteradas-IFS* com fator de redução c_i ($1/2$ para o triângulo de Sierpiński e $1/4$ para a curva de Koch). A figura limite de um sistema de funções iteradas é chamada *atrator* ou *conjunto autossimilar*.

3.2 Sistema de funções iteradas

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada *contração* se existe uma constante $0 < c < 1$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Em outras palavras, uma função é uma contração se é Lipschitz (de grau 1) com constante c menor do que 1.

Se a igualdade é válida, f é chamada *similaridade* e c é chamada de *razão* da similaridade f . Uma consequência imediata de f ser uma similaridade é que preserva distâncias. Isto por sua vez implica que, qualquer que seja $s > 0$, $\mathcal{H}^s(f(E)) = c \mathcal{H}^s(E)$.

Uma família finita de similaridades $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, com $m \geq 2$, é chamada um *sistema de funções iteradas* (representaremos por IFS). Um subconjunto compacto e não-vazio K de $\mathbb{R}^n$ é **autossimilar** (ou *atrator* ou *conjunto invariante* para IFS) se

$$K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K).$$

A propriedade fundamental que um IFS é que tem um único atrator. Isto significa que o conjunto autossimilar K é completamente caracterizado como o atrator do sistema de funções $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Esta propriedade é enunciada no seguinte resultado (veja prova em [10] p.124, teorema 9.1)

Teorema 3.1 Dada uma família de m similaridades $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, $m \geq 2$, então existe um único conjunto autossimilar K .

Por exemplo, o triângulo de Sierpiński S dado por

$$S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S),$$

é o atrator para as IFS $\{f_1, f_2, f_3\}$ dadas em (3.1).

3.3 Dimensão por similaridade

Nosso interesse nesta seção é determinar a dimensão Hausdorff de conjuntos autossimilares. Para isto vamos definir a *dimensão por similaridade* de um IFS e determinar sua relação com a medida Hausdorff.

Dado um sistema de funções iteradas $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, $m \geq 2$ como razões de similaridade c_i , $1 \leq i \leq m$, a **dimensão por similaridade** do correspondente conjunto autossimilar K é a raiz positiva da equação

$$\sum_{i=1}^m c_i^d = 1. \quad (3.2)$$

Representaremos esta raiz por $\dim_S K$. Embora $\dim_S K$ seja chamada de dimensão, não define uma dimensão no sentido que adotamos neste texto. Usaremos este nome por que, sob certas condições, este valor será maior do que a dimensão Hausdorff do atrator K .

Por outro lado, sendo a função $d \mapsto \sum_{i=1}^m c_i^d$ estritamente decrescente (sua derivada $d \mapsto \sum_{i=1}^m c_i^d \ln c_i$ é função estritamente negativa), a equação (3.2) determina d univocamente.

A dimensão por similaridade está relacionada com a dimensão Hausdorff do seguinte modo:

Teorema 3.2 Se K é um conjunto autossimilar então $\dim_H K \leq \dim_S K$.

Como mencionamos anteriormente, obter uma cota superior da dimensão Hausdorff não é muito complicado, o problema encontra-se na determinação da cota inferior. Neste sentido, é muito importante sabermos quando a igualdade dada no teorema (3.2) é satisfeita. Para isto, suponha que $d = \dim_H K$, $0 < \mathcal{H}^d(K) < \infty$ e existe uma “certa condição” (que depois será esclarecida) tal que

$$\mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d\left(\bigcup_{i=1}^m f_i(K)\right) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^d(f_i(K)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d(K) \sum_{i=1}^m c_i^d. \quad (3.3)$$

Logo, equação (3.3) implicará que $\dim_H K$ deverá necessariamente satisfazer a equação (3.2). Portanto, a dimensão Hausdorff que, em geral, é difícil de ser obtida, pode ser calculada resolvendo-se a equação (3.2).

Embora o cálculo efetivo da raiz positiva d de (3.2), em geral, seja complicado, pelo menos em teoria, é apenas uma questão computacional obtermos boas aproximações deste valor.

A condição necessária para obtermos esta igualdade chama-se *condição de conjunto aberto* e é a seguinte: dizemos que o conjunto de similaridades $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ satisfaz a *condição de conjunto aberto* se existe um conjunto não vazio e limitado V tal que

$$V \supset \bigcup_{i=1}^m f_i(V) \text{ e } f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset, i \neq j.$$

A condição de conjunto aberto “controla as interseções” das imagens $f_i(V)$ das similaridades e garante que estas interseções “não são muitas”. Em resumo,

Teorema 3.3 *Para o conjunto autossimilar K definido por um sistema de funções iteradas que satisfaz a condição de conjunto aberto temos que $\dim_H K = \dim_S K$.*

3.3.1 Calculando Dimensão por autossimilaridade

Agora, calcularemos a dimensão Hausdorff de alguns fractais aplicando o teorema (3.3).

O conjunto de Cantor ternário

Considere o segmento unitário $\mathcal{C}_0$, então para gerarmos o conjunto de Cantor por construção de auto-similaridade usamos a seguinte regra de iteração:

- i) 1ª cópia: $\mathcal{C}_0$ reduzido $\frac{1}{3}$;
- ii) 2ª cópia: $\mathcal{C}_0$ reduzido $\frac{1}{3}$ e transladado $\frac{2}{3}$ a direita.

Então, as funções de similaridades do conjunto de Cantor são

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \text{ e } f_2(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Observe inicialmente que a imagem do intervalo $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$ por f_1 e f_2 são respectivamente $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$, exatamente os dois intervalos disjuntos cuja reunião fornece o conjunto $\mathcal{C}_1$, de modo que $\mathcal{C}_1 = f_1(\mathcal{C}_0) \cup f_2(\mathcal{C}_0)$. É fácil ver também que $f_1(\mathcal{C}_1) = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3]$ e que $f_2(\mathcal{C}_1) = [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, de modo que $\mathcal{C}_2 = f_1(\mathcal{C}_1) \cup f_2(\mathcal{C}_1)$. Essas identidades sugerem a identidade geral (veja prova em [8])

$$\mathcal{C}_{i+1} = f_1(\mathcal{C}_i) \cup f_2(\mathcal{C}_i). \quad (3.4)$$

Pode-se mostrar também a autossimilaridade do conjunto ternário de Cantor (veja [8] p. 6):

$$\mathcal{C} = f_1(\mathcal{C}) \cup f_2(\mathcal{C}).$$

É fácil verificar que o aberto $V = (0, 1)$ satisfaz a condição *conjunto aberto* e portanto a dimensão Hausdorff de $\mathcal{C}$ coincide com sua dimensão por similaridade. Como f_1 e f_2 são ambas similaridades de razão $1/3$, a dimensão é dada pela equação

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$.

O Tapete de Cantor

O tapete de Cantor é o produto cartesiano de duas cópias do conjunto triádico de Cantor. Sua construção é similar à do tapete de Sierpiński, iniciando-se com uma região quadrada $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$, que é dividida em 9 regiões quadradas menores cujos lados medem $1/3$ do lado de $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ (Figura 2.1). A diferença se dá no fato de que retiramos não apenas o quadrado menor central, mas também os outros quatro quadrados menores que “não se encontram nos cantos” de $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$. Obtém-se assim $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$, que é formada então por 4 quadrados menores (exatamente “os dos cantos”). Em cada um desses quadrados menores, repete-se a mesma operação para se obter $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$, que é constituída por 16 quadrados com lados que medem $1/27$ do lado de $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$. Procedendo-se recursivamente, obtém-se uma seqüência

$$\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \supset \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \supset \cdots ,$$

com cada $\mathcal{C}_i \times \mathcal{C}_i$ é formado por 4^i regiões quadradas, similares à região inicial, cujos lados medem $1/3^i$ da medida do lado do quadrado inicial $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$. O limite desta seqüência

$$\mathcal{C}_\infty \times \mathcal{C}_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i \times \mathcal{C}_i$$

é o tapete de Cantor.

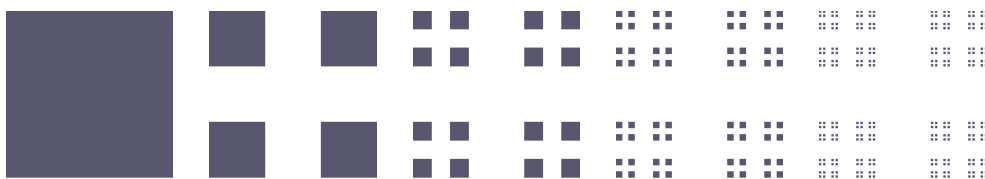


Figura 3.3: Etapas da construção do tapete de Cantor
Autor: Edilson Neri Junior

O tapete de Cantor $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ é o conjunto autossimilar determinado pelo sistema de funções iteradas $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, com f_i dadas por

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) \\ f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3}\right) \\ f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

Como o aberto $(0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição de *conjunto aberto* e o sistema de funções iteradas é constituído por quatro similaridades de razão $1/3$, segue do teorema [3.3](#) que a dimensão Hausdorff é dada pela equação

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2619$.

O Triângulo de Sierpiński

O Triângulo de Sierpiński é o atrator determinado pelas três seguintes similaridades de razão $1/2$:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ f_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right) \\ f_3(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

É fácil verificar que o interior do triângulo inicial S_0 da construção do Triângulo de Sierpiński (veja seção [1.2.1](#)) é um aberto que satisfaz a condição de *conjunto aberto* e que portanto a dimensão Hausdorff é dada pela equação

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850$.

O Tapete de Sierpiński

O Tapete de Sierpiński é o atrator determinado pelas oito seguintes similaridades de razão $1/3$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right); & f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(0, \frac{1}{3} \right); \\ f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(0, \frac{2}{3} \right); & f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right); \\ f_5(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); & f_6(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right); \\ f_7(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right); & f_8(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right). \end{array} \right.$$

É fácil verificar que o interior do quadrado inicial da construção do Tapete de Sierpiński (veja seção [2.1.4](#)) é um aberto que satisfaz a condição de *conjunto aberto* e que portanto a dimensão Hausdorff é dada pela equação

$$8 \left(\frac{1}{3} \right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,892$.

O Tetraedro de Sierpiński

O Tetraedro de Sierpiński é o atrator determinado pelas quatro seguintes similaridades de razão $1/2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) \\ f_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) \\ f_3(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}, \frac{z}{2} \right) \\ f_4(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right). \end{array} \right.$$

Como o interior do tetraedro inicial $\mathcal{T}_0$ um aberto que satisfaz a condição de *conjunto aberto* temos que $\dim_H \mathcal{T}$ é dada pela equação

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = 2$ e é inteira!

Observe que apesar da dimensão Hausdorff de $\mathcal{T}$ ser um número inteiro, satisfaz a condição de Mandelbrot de que a dimensão Hausdorff seja estritamente maior que a dimensão topológica (pois a dimensão topológica do Tetraedro é 1).

A curva de Koch

A curva de Koch é o atrator do sistema de funções iteradas dado pelas similaridades

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) \\ f_2(x, y) = \left(\frac{x - y\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}x + y}{6}\right) \\ f_3(x, y) = \left(\frac{x + y\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}, \frac{-x\sqrt{3} + y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3}\right). \end{array} \right.$$

Seja V o interior do losango cujos vértices são $(0,0)$, $(1/2, \sqrt{3}/6)$, $(1,0)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/6)$. Verifica-se facilmente que V satisfaz a condição de *conjunto aberto*. Como o sistema é formado por quatro similaridades de razão $1/3$ temos a dimensão Hausdorff é dada pela equação

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2619$.

A esponja de Menger

A Esponja de Menger é o atrator do sistema de funções iteradas

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right); & f_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z+1}{3} \right); \\ f_3(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z+2}{3} \right); & f_4(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y+1}{3}, \frac{z}{3} \right); \\ f_5(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y+1}{3}, \frac{z+2}{3} \right); & f_6(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z}{3} \right); \\ \\ f_7(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z+1}{3} \right); & f_8(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z+2}{3} \right); \\ f_9(x, y, z) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right); & f_{10}(x, y, z) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z+2}{3} \right); \\ f_{11}(x, y, z) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z}{3} \right); & f_{12}(x, y, z) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z+2}{3} \right); \\ f_{13}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right); & f_{14}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z+1}{3} \right); \\ f_{15}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z+2}{3} \right); & f_{16}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y+1}{3}, \frac{z}{3} \right); \\ f_{17}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y+1}{3}, \frac{z+2}{3} \right); & f_{18}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z}{3} \right); \\ f_{19}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z+1}{3} \right); & f_{20}(x, y, z) = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y+2}{3}, \frac{z+2}{3} \right). \end{array} \right.$$

Trata-se de um sistema com vinte similaridades de razão $1/3$ cada. É fácil verificar que o interior do cubo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(0,1,1)$ satisfaz a condição de *conjunto aberto* e portanto a dimensão Hausdorff é dada pela equação

$$20\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

cuja solução é $s = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,7268$.

Koch-Neri

Agora daremos um exemplo de uma variação da curva de Koch para qual a equação [3.2](#) não tem solução direta. Este fractal foi apresentado por Edilson Neri, aluno

da turma de 2006 do curso de Licenciatura em Matemática da UFPA, no seu trabalho de conclusão de curso [18] e chama-se *Koch-Neri* em sua homenagem.

A curva de Koch-Neri é o atrator do sistema de funções iteradas dado pelas similaridades

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right); \\ f_2(x,y) = \left(\frac{-y}{6}, \frac{x}{6} \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right); \\ f_3(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right); \\ f_4(x,y) = \left(\frac{-y}{6}, \frac{x}{6} \right) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right); \\ f_5(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right). \end{array} \right.$$

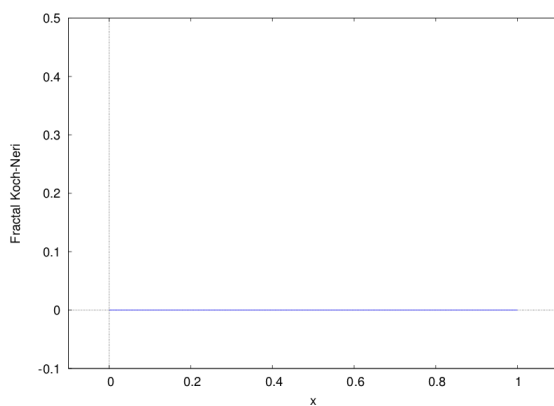


Figura 3.4: $\mathcal{N}_0$

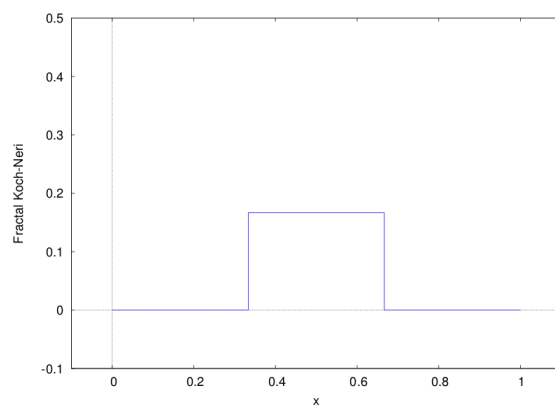


Figura 3.5: $\mathcal{N}_1$

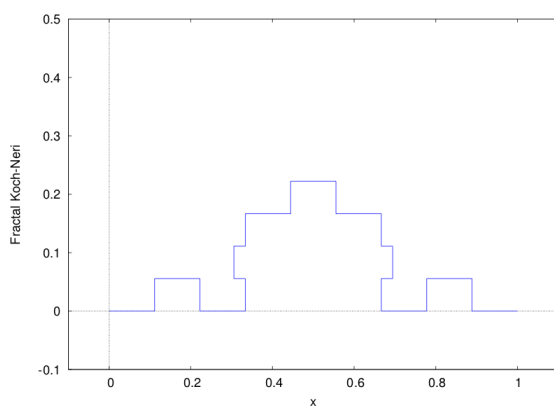


Figura 3.6: $\mathcal{N}_2$

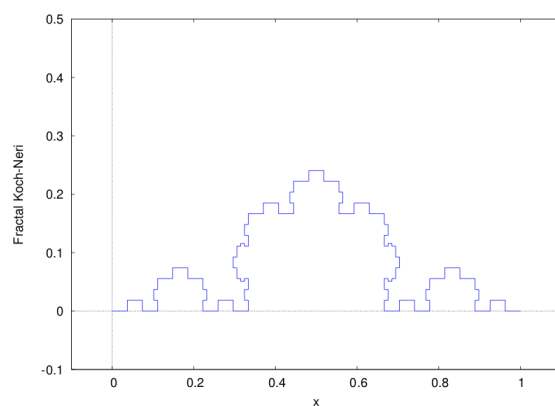


Figura 3.7: $\mathcal{N}_3$

Seja V o interior do losango cujos vértices são $(0,0)$, $(1/2, 1/4)$, $(1,0)$ e $(1/2, -1/4)$. Verifica-se facilmente que V satisfaz a condição de *conjunto aberto*.

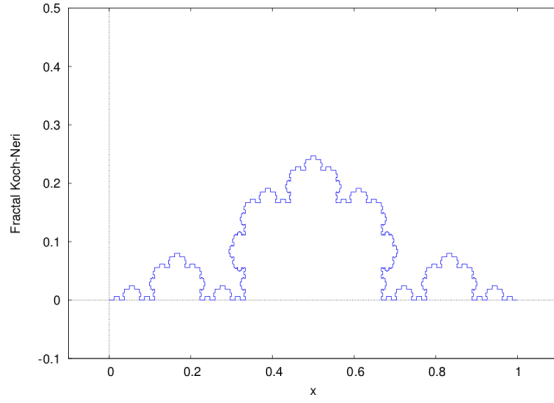


Figura 3.8: $\mathcal{N}_4$

Autor: Edilson Neri Juniro

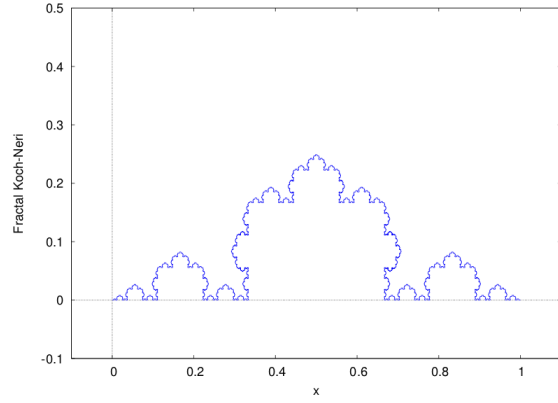


Figura 3.9: $\mathcal{N}_5$

Como o sistema é formado por três similaridades de razão $1/3$ e duas similaridades de razão $1/6$ temos que a dimensão Hausdorff é dada pela equação

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{6}\right)^s + \left(\frac{1}{6}\right)^s = 1.$$

A equação acima pode ser resolvida numericamente por qualquer aplicativo matemático, como por exemplo o aplicativo *MAXIMA*. A sua solução é $s \approx 1,2279$.

Na tabela abaixo (veja [20], p. 317)) daremos os parâmetros das transformações de similaridade de alguns fractais muito interessantes. Estamos considerando o sistema de transformações iteradas na forma matricial:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

a	b	c	d	e	f
0.0	-0.5	0.5	0.0	0.5	0.0
0.0	0.5	-0.5	0.0	0.5	0.5
0.5	0.0	0.0	0.5	0.25	0.5
0.0	0.577	-0.577	0.0	0.0951	0.5893
0.0	0.577	-0.577	0.0	0.4413	0.7893
0.0	0.577	-0.577	0.0	0.0952	0.9893
0.333	0.0	0.0	0.333	0.333	0.666
0.0	0.333	1.0	0.0	0.666	0.0
0.0	-0.333	1.0	0.0	0.333	0.0
0.387	0.430	0.430	-0.387	0.256	0.522
0.441	-0.091	-0.009	-0.322	0.4219	0.5059
-0.468	0.020	-0.113	0.015	0.4	0.4

0.255	0.0	0.430	0.255	0.3726	0.6714
0.255	0.0	-0.009	0.255	0.1146	0.2232
0.255	0.0	-0.113	0.255	0.6306	0.2232
0.370	0.642	-0.113	0.370	0.6306	-0.0061
0.849	0.037	-0.037	0.849	0.075	0.183
0.197	-0.226	0.226	0.197	0.4	0.049
-0.150	0.283	0.260	0.237	0.575	-0.0840
0.0	0.0	0.0	0.166	0.5	0.0
0.195	-0.488	0.344	0.443	0.4431	0.2452
0.462	0.414	-0.252	0.361	0.2511	0.5692
-0.058	-0.070	0.453	-0.111	0.5976	0.0969
-0.035	0.070	-0.469	-0.022	0.4889	0.5069
-0.637	0.0	0.0	0.501	.8562	0.2513

Por exemplo, o sistema de funções iteradas formado pelas quatro transformações dadas na quinta linha da tabela acima tem como atrator a seguinte *folha de Samambaia*:

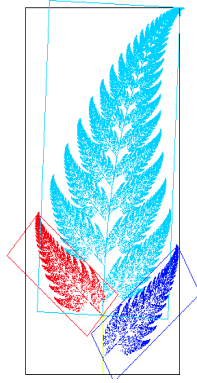


Figura 3.10: Folha de Samambaia
Fonte: Wikipedia.org

3.3.2 Variação da dimensão Hausdorff

Agora vamos ilustrar como obter vários fractais variando a dimensão Hausdorff entre 1 e 2. Para isto variaremos o fator de redução da curva de Koch.

Seja $\alpha \in (1/4, 1/2)$ o fator de redução e $\mathcal{K}_1$ a primeira figura da construção da curva de Koch (veja seção 1.3) dada pelos segmentos I_1 com pontos extremos $(0,0)$ e $(\alpha,0)$, I_2 com pontos extremos $(\alpha,0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}\right)$, I_3 com pontos extremos $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}\right)$ e $(1-\alpha,0)$ e I_4 com pontos extremos $(1-\alpha,0)$ e $(1,0)$.

O sistema de funções iteradas desta família de atratores é o seguinte:

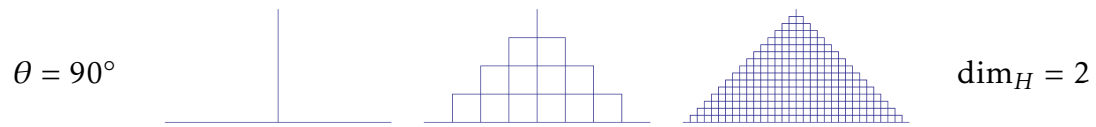
$$\begin{cases} f_1(x,y) = \alpha(x,y); \\ f_2(x,y) = \alpha(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) + (\alpha, 0); \\ f_3(x,y) = \alpha(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) + \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}\right); \\ f_4(x,y) = \alpha(x,y) + (1-\alpha, 0), \end{cases}$$

com $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}$.

Sejam $\mathcal{K}_\alpha$ os atratores do sistema de funções iteradas acima e V o interior do losango cujos vértices são $(0,0)$, $(1/2, \sqrt{\alpha - 1/4})$, $(1,0)$ e $(1/2, -\sqrt{\alpha - 1/4})$. Verifica-se facilmente que V satisfaz a condição de *conjunto aberto*. Como o sistema é formado por quatro similaridades de razão α temos a dimensão Hausdorff é dada

pela equação $4\alpha^s = 1$, cuja solução é $s = -\frac{\ln 4}{\ln \alpha}$.

Alguns exemplos



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. G. Bartle, **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**, John Wiley & Sons, 1995.
- [2] L.E.J. Brouwer, **J. Reine Angew. Math.**, 142 (1913), 146-152.
- [3] L.E.J. Brouwer, **J. Reine Angew. Math.**, 153 (1924), 253.
- [4] C. Vaz e M. Diniz, **Calculando a dimensão topológica de alguns conjuntos**, preprint, 2008.
- [5] F.U.Coelho e M.L. Lourenço, **Um curso de Álgebra Linear**, Editora Universitária de São Paulo, 2001.
- [6] E.L.Lima, **Espaço Métricos**, Projeto Euclides, IMPA, 1983.
- [7] E.L.Lima, **Por que o espaço tem três dimensões?**. Revista do professor de Matemática, 35, 1997.
- [8] Edgar, G.A., **Mesure, Topology and Fractal Geometry**, Springer - Verlag, 1992.
- [9] G. Edgar, **Integral, Probability, and Fractal Measure**, Springer, 1996.
- [10] Falconer, K., **Techniques in Fractal Geometry**, John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [11] Falconer, K., **Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications**, John Wiley and Sons, Chichester, 2003.
- [12] Falconer, K., **The Geometry of Fractal sets**, Cambridge-University Press, 1985.
- [13] W.Hurewicz and H.Wallman **Dimension Theory**, Princeton Univ. Press 1948.
- [14] Liu, Y.-Y., **A function whose graph is of dimension 1 and has locally an infinite one-dimensional Hausdorff measure**. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332,

- Série I, p. 19-23, 2001.
- [15] B. Mandelbrot, **The Fractal Geometry of Nature**, W.H. Freeman, San Francisco 1982.
 - [16] G.E. Martin, **The foundations of Geometry and the Non-euclidean Plane**, Springer-Verlag, New York, Inc. 1975.
 - [17] K. Menger, **Dimensions Theorie**, Leipzig and Berlin, B. G. Teubner, 1928.
 - [18] E. P. Neri Jr, **Elementos da Geometria Fractal**, Trabalho de Conclusão de Curso - TCC, UFPA. 2010.
 - [19] G. Peano, **Sur une courbe qui remplit toute une aire plane**, Math. Annin, 36, 157-160, 1890.
 - [20] Peitgen, Jürgens and Saupe, **Fractal for the Classroom**, Springer - Verlag. 1992.
 - [21] H. Poincaré, **Reveu de Métaphysique et de Morale**, 20 (1912), 483-504.
 - [22] A.C. Roger, **Hausdorff Measure**, Cambridge University Press, 1998.
 - [23] H. Sagan, *Space-Filling curves*, Springer-Verlag, 1994.
 - [24] J. Starret, **Dimension**, notas.
 - [25] Wingren P., **Concerning a real-valued continuous function on the interval with Hausdorff dimension 2**, L'Einsegn. Math. 41 (1995) 103-110.
 - [26] M. Yamaguti, M. Hata e J. Kigami, **Mathematical of Fractais**, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1997.



editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA