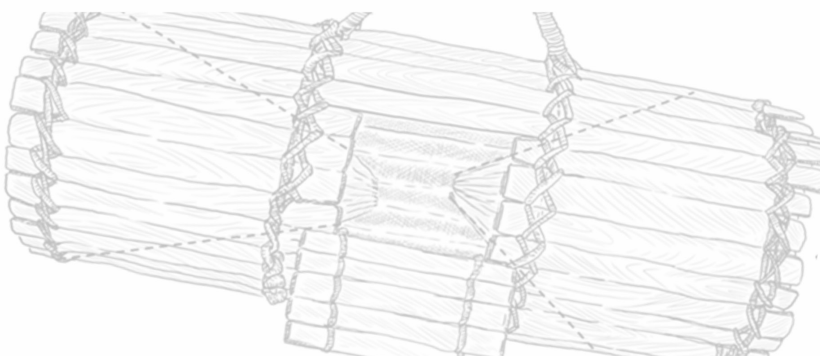
TEMAS EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA
práticas e reflexões na Amazônia

Rubenvaldo Monteiro Pereira
Daniele Esteves Pereira Smith
Organizadores

Campus Universitário do Tocantins/Cametá
UFPA

FAMAT
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CUNTINS / CAMETÁ

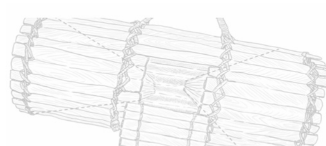
TEMAS EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA



TEMAS EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

práticas e reflexões na Amazônia

Rubenvaldo Monteiro Pereira
Daniele Esteves Pereira Smith
Organizadores



Campus Universitário do Tocantins/Cametá-UFPA
Faculdade de Matemática

Capa
Árison André Rocha de Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Biblioteca Universitária "Salomão Larêdo" / CUNTINS

E59e Temas em Ensino de Matemática na Educação Básica [recurso eletrônico] / organizado por Rubenvaldo Monteiro Pereira, Daniele Esteves Pereira Smith. _ Cametá: UFPA/CUNTINS/FAMAT, 2022.
445 p. : il.

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader
Inclui bibliografias
ISBN 978-65-88140-05-5

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores – Formação. 3. Prática de ensino. 4. Educação básica. I. Pereira, Rubenvaldo Monteiro, org. II. Smith, Daniele Esteves Pereira, org. III. Título.
CDD 23. ed. – 510.7

Elaborado por Éder Antônio Sousa Ferreira – CRB-2/1276

Faculdade de Matemática (FAMAT/Campus de Cametá-UFPA)
Trav. Pe. Antônio Franco, 2617, Bairro do Matinha
CEP 68400-000 Cametá-PA, Brasil

e-mail: famatcuntins@ufpa.br

Apresentação

Este livro reúne os resultados dos trabalhos de pesquisa oriundos do *Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico*, ofertado pela Faculdade de Matemática do Campus Universitário do Tocantins/Cametá da Universidade Federal do Pará.

Tema sempre desafiador, o ensino de Matemática está no centro das reflexões e inquietações de um coletivo de docentes de nossa instituição, que desenvolve atividades de formação de professores.

Este tema foi escolhido, obviamente, por ser a vocação do curso de graduação de nossa Faculdade, a Licenciatura em Matemática, mas não somente por isso, também pelo olhar atento e sensível à necessidade de debates de qualidade sobre ensino de Matemática, capazes de contribuir com a formação continuada de um conjunto de professores graduados da região do Baixo Tocantins e, consequentemente, com o desenvolvimento qualificado da Educação Básica.

Importante destacar que o somatório dessas forças motivadoras conduziu à elaboração do projeto de pós-graduação *lato sensu*, bem como à sua implementação. Foram anos intensos, desde a concepção, seleção dos cursistas e início do curso, passando pelas disciplinas, diga-se de passagem, ministradas por um grupo de professores do mais alto nível — Daniele Esteves Pereira, Denivaldo Pantoja da Silva, Fábio Colins da Silva, Iran Abreu Mendes, Jorge Domingues Lopes, José Renato Ferreira Alves da Cunha, Osvaldo dos Santos Barros, Rubenvaldo Monteiro Pereira —; até a produção dos trabalhos de conclusão de curso, as sessões de defesa das pesquisas realizadas e a publicação dos artigos.

Publicar este livro significa, portanto, a possibilidade de socializar, em cada um de seus textos, os esforços, os sonhos, as potencialidades e a pessoalidades de todos os atores envolvidos. É dar voz a histórias de vidas inquietas, que ousam discutir educação Matemática de ponta, com a propriedade que o tema exige. É, enfim, o resultado de pesquisas... pesquisas sim, pois ribeirinhos também pesquisam a sua realidade.

Se este não foi o primeiro curso de especialização que tive o privilégio de coordenar, certamente é o Curso que ficará em minhas memórias como uma experiência singular e gratificante em pós-graduação, trilhado com humildade, dedicação e sempre disposto a aprender.

Espero que a leitura destes artigos possa, de alguma maneira, acrescentar conhecimento, transformar concepções sobre as temáticas relacionadas ao ensino de Matemática, provocando, despertando e inquietando outros a plantar e a colher bons frutos nas férteis terras do conhecimento.

Prof. Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira

Sumário

TEMAS EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Práticas e reflexões na Amazônia

A duplicação do cubo no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci:
problematizações para a Educação Básica

Adriana Nonato dos Santos
Jeová Pereira Martins

Resumo

O presente trabalho apresenta resultados de um estudo investigativo cujo objetivo principal foi obter subsídios que possibilitassem a proposição de atividades para o ensino de geometria na Educação Básica por meio da problematização do tema referente à duplicação do cubo, tomando como base desenhos expressos em imagens identificadas no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci. O problema referente à duplicação do cubo, aparece registrado na história da Matemática grega, com origem por volta do século V a.C., causando certa revolução acerca dos conceitos de números e de determinados aspectos relacionados à geometria Euclidiana, pois o desafio proposto era que esse problema só deveria ser resolvido por meio de geometria prática com auxílio de régua (esquadros) e compasso. Diversas foram as tentativas dos estudiosos para solucionar o problema ao longo de séculos. Dentre as personalidades que tentaram resolver o problema, está Leonardo da Vinci, cujas informações a esse respeito estão anotadas em folhas do seu Códice Atlântico. A partir do estudo dos desenhos e anotações de Da Vinci elaboramos atividades para o ensino de geometria na Educação Básica, fundamentadas nas Unidades Básicas de Problematizações (UBP) propostas por Miguel e Mendes (2010), visando apontar contribuições didáticas para as aulas de Matemática.

Palavras-chave

Duplicação do cubo. Unidades Básicas de Problematizações. Códice Atlântico. Leonardo da Vinci.

Considerações iniciais

Há séculos a matemática tem sido estudada e desenvolvida por estudiosos que veem nela um desafio a ser superado. Parte dos conhecimentos matemáticos surgiram das necessidades de contar, numerar, medir e quantificar, bem como por meio da busca incessante por seu desenvolvimento e solidificação como um corpo de conhecimentos cientificamente reconhecidos. Assim desde a época do homem primitivo a matemática vem desenvolvendo-se historicamente no tempo e no espaço e se constituindo como uma ciência norteadora de outras áreas do conhecimento.

Atualmente, os problemas matemáticos e geométricos do passado e da contemporaneidade podem ser resolvidos por meio de ferramentas computacionais, softwares, calculadoras cientificas entre outras tecnologias que facilitam a resolução e compreensão de fenômenos matemáticos. Porém todo esse avanço tecnológico foi possibilitado pelo fato de que, historicamente, estudiosos apropriaram-se de axiomas e teoremas da matemática que se estabeleceram ao longo do tempo e que foram estudados por matemáticos de todas as épocas. Dentre os fatos e problemas históricos da matemática que contribuíram para o seu desenvolvimento, destrancam-se três problemas da geometria antiga: a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo.

Neste trabalho focamos o problema da duplicação do cubo, também conhecido como problema Deliano, e destacamos as tentativas de solução por Hipócrates de Chios (440 a.C), Hierão de Alexandria (século I d.C.) e Leonardo da Vinci (1452 – 1519). As tentativas de Da Vinci estão registradas no Códice Atlântico, um manuscrito com 1119 folhas de desenhos e anotações feitos por Da Vinci sobre temas como arquitetura, óptica, anatomia e geometria, este último, nosso foco neste trabalho. Tomamos como objeto de estudo uma edição do referido códice publicada no Brasil com 10 volumes com as folhas de 1 a 602 dentre as quais selecionamos a folha 161rv que trata da duplicação do cubo por Leonardo da Vinci (SÁNCHEZ; ALMARZA, 2008).

Diante disso, este trabalho tem como objetivo obter subsídios que possibilitem a proposição de atividades para o ensino de geometria na Educação Básica por meio da problematização da duplicação do cubo, tomando como base desenhos expressos em imagens identificadas no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci. As atividades têm o formato das Unidades Básicas de Problematizações (UBP) nos termos de Miguel e Mendes (2010). Para tal propósito realizamos estudos exploratórios, por meio de revisão bibliográfica sobre os conceitos balizadores do trabalho, quais sejam: problematizações, práticas socioculturais e Unidades Básicas de Problematização segundo os estudos de Miguel e Mendes (2010), Farias e Mendes (2014) e Mendes (2014). Além disso, buscou-se pela literatura sobre as tentativas de duplicação do cubo, inclusive no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci.

O problema da duplicação do cubo

A duplicação do cubo é um problema geométrico que envolve construções utilizando somente régua não graduada e compasso. Este problema junto a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo desafiou o poder inventivo de inúmeros matemáticos durante mais de dois mil anos. O "compasso" e a "régua não numerada" eram geralmente chamados de instrumentos ideais ou euclidianos e durante muitos séculos diversos matemáticos tentaram solucionar tais problemas usando esses instrumentos, pois essa era a regra vigente para tal solução (FREITAS, 2014).

Uma possível origem do problema é carta enviada ao rei do Egito, Ptolomeu III. Naquele documento o matemático Erastóstenes, celebre matemático e astrônomo do século III a.C., narrava que o Rei Minos ao verificar as dimensões exíguas do tumulo que encomendava para seu filho Glauco, dissera: "pequeno espaço para sepulcro de um rei! Dupliquem-no, conservando-lhe a forma!". E assim, ordenou que se dobrassem as arestas do sepulcro, porém ao cumprir as ordens obteve-se o óctuplo do volume do sepulcro (BRITO, 2009).

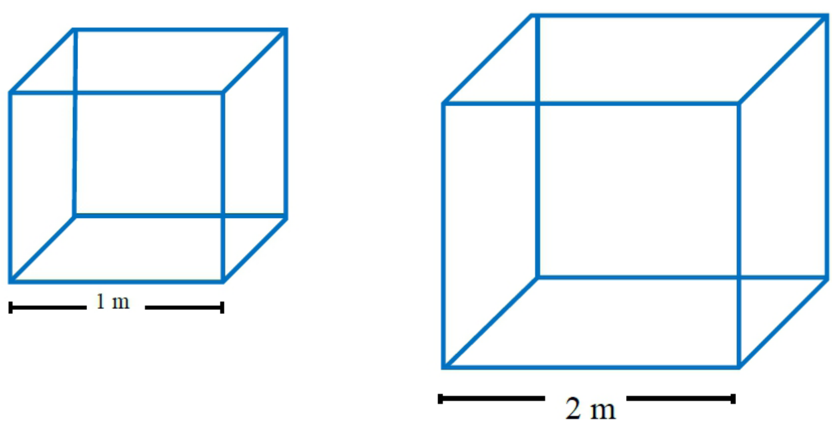
Outra origem desse problema não se sabe ao certo, segundo Cajori (2007), uma peste que se acredita tenha ocorrido no século V a.C. e que matou um quarto da população de Atenas. Um grupo preocupado com a peste que se espalhava, teria procurado o oráculo de Apolo (o deus do sol), na cidade de Delos, para encontrar alguma forma de acabar com a peste. Assim, o oráculo enunciou que era necessário dobrar o volume do cubo base de sustento da estátua de Apolo. Os atenienses ao tentarem resolver o problema dobram as dimensões do altar, e perceberam que ao fazer isto não realizaram o que se pediu. Apresentamos, a seguir, alguns esclarecimentos a esse respeito:

I. Dado um cubo de aresta a, medindo 1 m, seu volume é: $V = a.\ a.\ a = 1 \ .\ 1 \ .\ 1 = 1\ m^3$

II. Ao tentar duplicar os atenienses da época duplicavam suas arestas, ou seja, passara a ser 2 m de aresta, e seu volume: $V = a^3 = 2^3 = 8\ m^3$.

Observaram assim que eles não duplicaram a base e sim, octuplicaram o volume do altar.

Figura 1 – Cubo de aresta 1 m e cubo de aresta 2 m



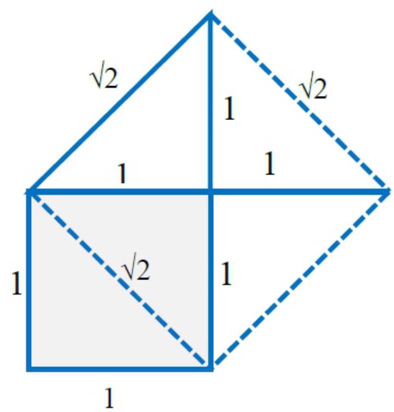
Fonte: Construção dos autores

Mesmo não conseguindo resolver os problemas com os dois instrumentos mencionados, estudiosos gregos e de outros lugares do mundo desenvolveram soluções para os problemas usando outros tipos de instrumentos, é o caso por exemplo de dois discípulos de Platão na academia Dinostrato e Menecmo que enquanto tentava resolver o problema da duplicação do cubo acabou desenvolvendo estudos que originaram as cônicas: elipse, hipérbole e parábola (BRITO, 2009).

Tentativas de Resolução no tempo e espaço

As tentativas de solução do problema se deram por, aproximadamente, 2 mil anos. Dentre elas podemos citar a de Hipócrates (440 a.C.), com a inserção de meias proporcionais, Arquitas (400 a.C.), Platão, com seu esquadro, Macnaemos (350 a.C.), com interseções cônicas, Eratóstenes (230 a.C.), com a construção de mesolabos e Diócles (180 a.C.), com a curva cissóide. Mesmo sem satisfazer a condição estabelecida, essas soluções trouxeram avanços para a geometria. Duplicar um segmento de reta era tarefa elementar na época, sendo um quadrado de lado igual a 1, observe como se obtém a sua duplicação:

Figura 2 – Duplicação de um Quadrado de lado 1



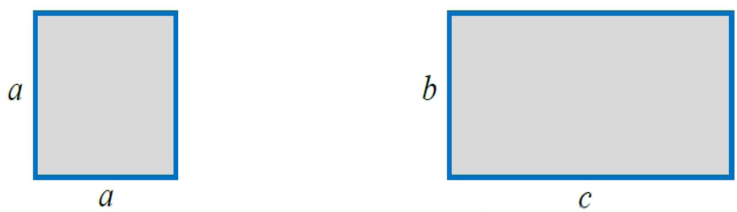
Fonte: Construção dos autores

O problema resume-se a achar um segmento de reta de comprimento igual a $\sqrt{2}$, porém esse segmento nada mais é que a sua própria diagonal. No entanto, duplicar um quadrado no plano parecia uma tarefa simples e já no espaço é impossível! Por que?

Hoje essa resposta é facilmente encontrada. O fato que para duplicar o volume do cubo era preciso encontrar uma aresta a ou um número que satisfaça a condição: $a \,.\, a \,.\, a = 2$ ou $a^3 = 2$ $a = \sqrt[3]{2}$. Daí, conclui-se que $a = 1{,}2$ é pequena e $a = 1{,}3$ é grande demais. Logo teríamos que provar a impossibilidade de se obter o comprimento desta aresta, ou seja, mostrar que o número em questão fazia parte de um outro conjunto, até então desconhecido: Os Irracionais.

A repercussão do problema chegou à academia de Platão, onde foram sugeridas soluções geométricas por Eudóxio, Macnaemos e pelo próprio Platão. Porém os primeiros avanços foram dados por Hipócrates 440 a.C., que trabalhou com meias proporcionais entre dois segmentos, além de Arquimedes, Papus de Alexandria (300 a.C.), Nicomedes, que usou a *conchoide* entre outros matemáticos, inclusive do século XVII como Cristian Huygens, René Descartes, Grégoire de Santi-Vicent e Isaac Newton, que também propuseram resoluções, porém muito mais complicadas. Vejam a solução por Hipócrates de Chios 440 a.C.:

Figura 3 – Quadrado de lado a e retângulo de lados b e c



Fonte: Construção dos autores

Considere o retângulo de lados b e c, e um quadrado de lado a com as mesmas áreas: $a \,.\, a = b \,.\, c \rightarrow a^2 = b \,.\, c \rightarrow a = \sqrt{b.c}$

Onde $\sqrt{b.c}$ é chamado média geométrica ou média proporcional entre b e c. Desta forma e tendo os segmentos a e b pode-se encontrar outros dois segmentos x e y, tais que: $a/x = x/y = y/b$, em que x e y são as médias proporcionais entre a e b.

Hipócrates percebeu que se fizesse $b = 2.a$ teria a solução do problema. Assim:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2.a} \quad \text{da igualdade} \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{2.a} \rightarrow y^2 = 2.a.x \quad (I)$$

$$\text{De } \frac{a}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow x^2 = a.y \rightarrow (x^2)^2 = (a.y)^2 \rightarrow x^4 = a^2.y^2 \rightarrow$$

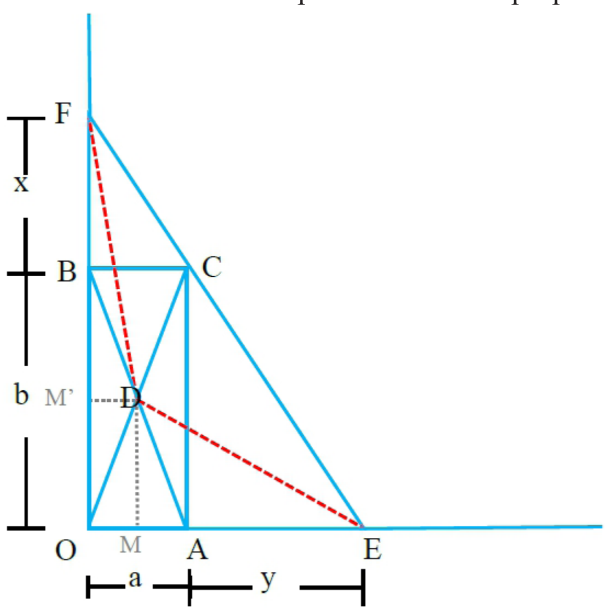
$$y^2 = \frac{x^4}{a^2} \quad \text{(II). Igualando (I) e (II), temos,}$$

$$2ax = \frac{x^4}{a^2} \rightarrow \frac{x^4}{x} = 2.a^2.a \rightarrow x^3 = 2a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}\,a$$

Conclui-se que se x é a aresta de um cubo, então x^3 será seu volume, que é precisamente o dobro do volume do cubo da aresta a e volume a^3 solucionando o problema. Com as médias proporcionais Hipócrates transformou o problema original em outro que serviu de base para as soluções seguintes, e, embora as soluções apresentassem diferentes ideias, todas recaíam nas proporções inicialmente pensadas por ele.

Vejamos agora uma outra tentativa que foi a de Hierão de Alexandria, matemático e físico grego que possivelmente teria vivido no século I d.C. (FREITAS, 2014). Hierão tentou achar duas meias proporcionais entre os segmentos a e b.

Figura 4 – Método de Hierão para achar meias proporcionais



Fonte: Construção dos autores a partir de Freitas (2014)

Construa o retângulo OABC, no qual AO = a e OB = b. Seja D o centro do retângulo: tome uma régua que passa por C e sejam E e F seus pontos de intersecção com as retas definidas por AO e OB, respectivamente. Faça a régua girar até o ponto DF = DE. Afirmamos então que BF = x e AE = y, são as duas meias proporcionais entre a e b.

Desta forma, usando a semelhança a semelhança dos triângulos FBC, CAE e FOE, temos que:

$$a/x = y/b = (a+b)/(b+x), \text{ ou seja, } a/x = x/y = y/b$$

Para demonstrarmos tais fatos, devemos usar a propriedade II do livro IV dos *Elementos* de Euclides, cujo o enunciado diz o seguinte:

“Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta é adicionada, prolongando- a, o retângulo determinado pela linha reta e pela linha adicionada é igual, se lhe for adicionada o quadrado sobre a metade da reta, ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada”.

Considere M o ponto médio de a, ou seja, M=MA=1/2a. E ainda M’ o ponto médio de M’B=1/2b. Aplicando a proposição II do livro VI citada acima e sabendo que DE² = DF², é possível afirmar:

$$\left(y+\frac{1}{2}\,a\right)^2+(\frac{1}{2}\,b)^2=\left(x+\frac{1}{2}\,b\right)^2\ \ +(\frac{1}{2}\,a)^2,$$

segue daí $(y+\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{4}b^2=\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{1}{4}a^{\,2},$

do qual obtemos $\mathrm{y}(a+y)=x\,(b+x)$,

desta última igualdade vê-se que:

$\frac{x}{y}=\frac{a+b}{b+x}=\frac{a}{x}=\frac{y}{b}$ e daí imediatamente que, $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$

A maioria das tentativas dos primeiros matemáticos da época baseavam-se em encontrar as meias geométricas propostas inicialmente por Hipócrates, ou seja, tinham por base a construção de um certo ponto de intersecção de duas cônicas. De fato, tomando as proporções $a/x = x/y = y/b$ e assumindo a como aresta do cubo dado, consideramos que a tenha valor 1 e consequentemente $b = 2$ (uma vez que $b = 2a$) e sejam x e y as duas médias proporcionais entre a e b. Teremos duas parábolas de equações $x^2 = a.y$ e $y^2 = b.x$, porém como $a = 1$ e $b = 2$, teremos $y = x^2$ e $x = y^2/2$ e sua intersecção será o ponto P (fora da origem) e essa construção não pode ser feita com régua e compasso.

A duplicação do cubo no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci foi um polímata, pois desenvolveu estudos em diferentes áreas de conhecimento como a óptica, anatomia, balística, arquitetura e matemática. Célebre desde sua juventude até hoje, após cinco séculos de sua morte, é um dos artistas sobre quem mais se escreveu. Engenheiro, pintor, cientista, matemático, arquiteto, escultor, inventor e poeta italiano que nasceu em 15 de abril de 1452 e faleceu em maio de 1519, é um símbolo do homem de conhecimentos em várias áreas. (ISAACSON, 2017).

Leonardo dedicou muitos anos de sua vida para os estudos sobre as transformações geométricas com destaque para a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Desta forma suas obras eram repletas de estudos sobre matemática e, principalmente, geometria por ser uma parte da matemática que remete aos desenhos, técnica que Leonardo dominava como exímio artista que era.

O objetivo de nosso trabalho, com os estudos que fizemos sobre a duplicação do cubo e, especialmente, as tentativas de Leonardo da Vinci em resolver tal problema, é mobilizar as informações contidas nas tentativas de Leonardo para o ensino de geometria na Educação Básica. Para isso, selecionamos a folha 161rv[1] do Códice Atlântico na qual Leonardo faz a duplicação do cubo. Assim, fizemos uma descrição da folha e de seu conteúdo para, em seguida, elaborar atividades de ensino de geometria para a Educação Básica no formato de Unidades Básicas de Problematizações (UBP), de acordo com Miguel e Mendes (2010).

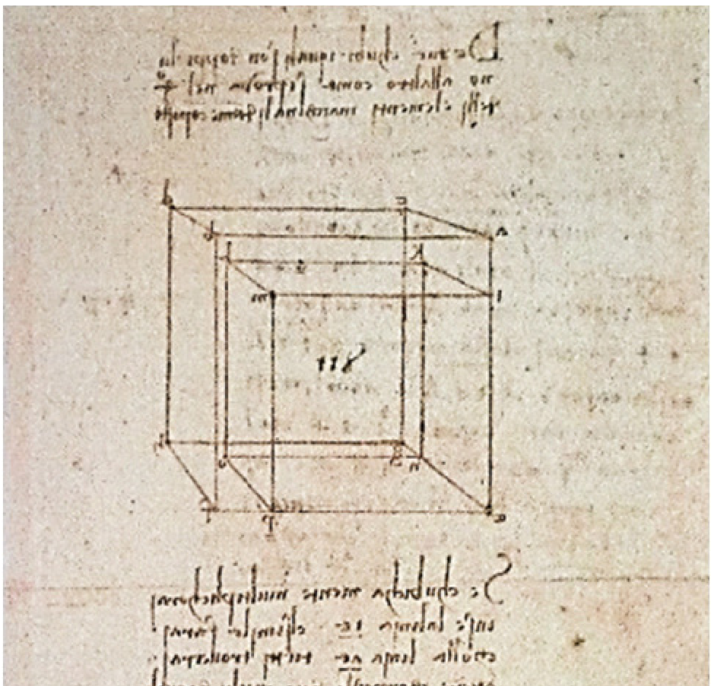
A folha 161r (Figura 5) trata da duplicação do cubo e nela, Leonardo constrói dois cubos um dentro do outro. A aresta de um é um pouco maior que a aresta daquele que lhe é interno e no centro dos cubos Leonardo coloca o número 128. No texto escrito na folha (do qual fizemos uma tradução livre) Leonardo escreve “Se você multiplicar cubicamente a linha IE fizer o mesmo com a linha AE, encontrará dois compostos sendo que a quantidade de um, duplicada, é a quantidade do outro”[2] (SÀNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 176).

[1] Cada folha do Códice Atlântico possui reto (r), que é a frente, e verso (v), ou seja, na verdade temos duas folhas se forem consideradas as duas partes.

[2] Se cubicamente multiplicherai in sè la linia i e. e’l simili farai colla linia a e tu ti torverrai composti duebi de’ quali la quantità dell’uno fia dupla ala quantità dell’altro.

As linhas a que Leonardo se refere são as arestas de cada cubo que, no desenho, são os seguimentos verticais direitos que estão sobrepostos. O vértice inferior direito (comum aos dois cubos) é ponto E, o vértice superior direito (do cubo maior) é o ponto A e o ponto que está sobre AE é o ponto I (que é vértice do cubo menor). Assim, a medida do seguimento AE é a aresta do cubo maior e a medida do seguimento IE é a aresta do cubo menor.

Figura 5 – Folha 161r do Códice Atlântico



Fonte: Sànchez e Almarza (2008, p 57).

O texto de Leonardo diz que, se você elevar a medida de IE ao cubo e depois fizer o mesmo com AE, obterá dois cubos, cujo volume do maior é o dobro do volume do menor. Para completar o seu raciocínio, Leonardo exemplifica: “Se a linha IE fosse 4, a linha AE seria 5 e, a partir disso, uma certa minúcia indizível, que com facilidade é feita e com dificuldade é dita"[3]. Esse valor é a solução do problema da duplicação do cubo, pois o valor será o tamanho da aresta do cubo, cujo volume é o dobro do volume daquele que tem aresta 4. Como o volume do cubo é calculado pelo valor da aresta elevado ao cubo ($v = a^3$), o volume do cubo de aresta 4 é $4^3 = 64$, assim, duplicá-lo, corresponde a encontrar um cubo cujo volume seja o dobro, ou seja, 2 x 64 = 128, cuja raiz cúbica é, aproximadamente, 5,039 (SÀNCHEZ; ALMARZA, 2008, p. 176).

A tentativa de Leonardo remete a Grécia Antiga, época em que houve o surgimento dos números irracionais em um primeiro momento descobertos pelos pitagóricos a partir da necessidade de calcular a diagonal de um quadrado de lado 1. A aceitação destes números na época teria custado a vida de Hipasus de Metapontum[4], que viveu no século V a.C., por ter revelado a irracionalidade de $\sqrt{2}$, negando a filosofia pitagórica de que os fenômenos do universo poderiam ser escritos na forma de fração, ou seja, na forma de racionais. Depois de um intervalo de tempo, esse mesmo grupo de números teria aparecido em outros problemas como na duplicação do cubo, uma vez que para dobrar o volume de uma forma cúbica de aresta 1m e volume $1m^3$ era necessário encontrar um cubo de aresta ***a*** cujo o volume fosse o dobro do volume do primeiro, assim $V_1 = 1m^3 \rightarrow V_2 = 2m^3$, ou seja, $a^3 = 2.V_1 \rightarrow a^3 = 2.1 \rightarrow a^3 = 2.1$ que resulta em $a = \sqrt[3]{2}$ (TRZASKACZ; HRENTCHECHEM, 2017)**.**

A demonstração que esse número não poderia ser escrito na forma racional, era supor que, se $a^3 = 2$ fosse racional, poderíamos escrevê-lo sob a forma irredutível $a = m/n$ ou seja, m e n são primos entre si, logo , $(m/n)^3 \rightarrow m^3/n^3 = 2 \rightarrow m^3 = 2n^3$.

Desta forma, vemos que $2n^3$ é um número par (pois o fator 2 garante isso), portanto m deve ser par (já que uma potência de número par é sempre par). Por outro lado, se m é par, n é ímpar, pois é irredutível. Se m é par, então pode ser escrito sob a forma $m = 2p$, e a equação ficará na forma $(2p)^3 = 2n^3$ ou $4p^3 = n^3$.

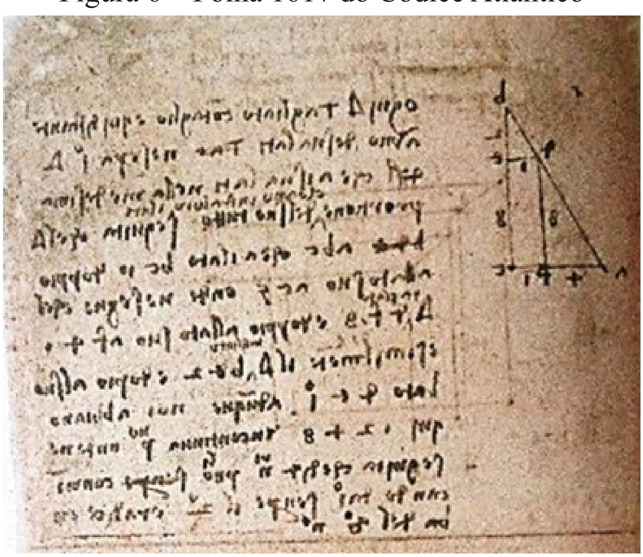
[3] Se la linia i e fussi 4 la linia a e sarebbe 5 e outre a di questo una certa minuzia indicibile, la quale con comoditá si fa e com difficultâ si disse.

[4] Teria vivido, aproximadamente, no final do século V a.C. contemporâneo de Filolaus. Teria sido pitagórico que foi expulso da confraria, uma vez que a descoberta dos irracionais, provocou uma crise nos fundamentos da matemática grega e na escola pitagórica. Fonte: Trzaskacz e Hrentchechem (2017).

Daí verifica-se que $4p^3$ é um número par, logo n é obrigatoriamente par. Assim, n é um número par e ímpar ao mesmo tempo, o que é um absurdo. Confirma-se, então que “raiz cúbica de 2” não pode assumir a forma m/n e que, portanto, não é racional. Aí estava uma grande descoberta: a existência dos números irracionais, sendo esta considerada a contribuição mais importante atribuída aos pitagóricos (TRZASKACZ; HRENTCHECHEM *apud* CAJORI, 2007).

Quando Leonardo fala que a resposta do problema seria 5 mais uma quantidade fácil de se obter porém difícil de se dizer, infere-se que na sua época, ainda havia a dificuldades em trabalhar com os irracionais, nesse caso, o número “raiz cúbica de 128”. Ocorre que Leonardo não deixa claro o método que ele utilizou para chegar a esse resultado pois, tanto o desenho, quanto o texto que ele escreve na folha 161r, não explicitam o método o que leva a inferir que esse desenho seria o resultado de tentativas anteriores. Isso nos fez recorremos ao verso da folha 161, que é a folha 161v (Figura 6), para verificar se Leonardo fez alguma menção ao seu método desenvolvido ou utilizado para a duplicação do cubo que apresenta no reto da folha.

Figura 6 – Folha 161v do Códice Atlântico



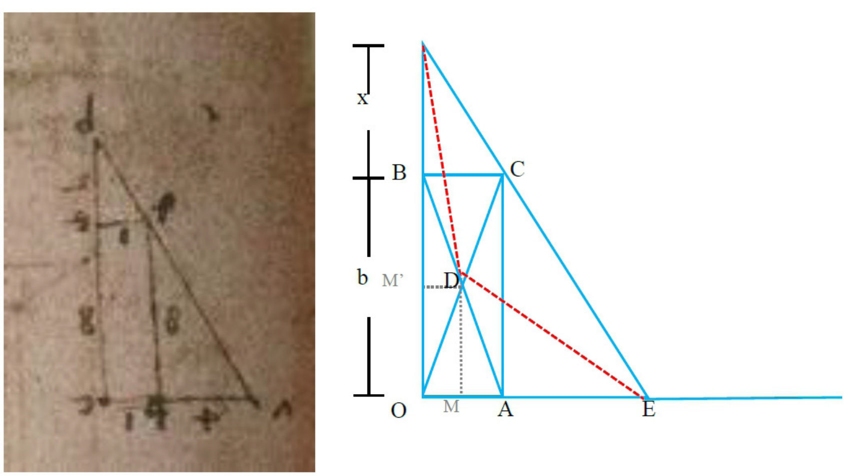
Fonte: Sànchez e Almarza (2008, p. 58)

A folha 161v tem uma coluna de texto e um desenho que pode ser descrito como um triângulo retângulo com um retângulo inscrito. A descrição da folha, menciona que Leonardo baseia-se na proposição 6 do II dos *Elementos* de Euclides que diz:

> Se uma linha reta é dividida em duas partes iguais e se uma outra linha reta lhe é adicionada, prolongando-a, o retângulo determinado pela linha reta e pela reta adicionada é igual se lhe for adicionada o quadrado sobre a metade da reta ao quadrado sobre a reta formada pela metade e pela reta adicionada (EUCLIDES, 2009, p. 140)

Leonardo usou esta proposição para tentar fazer a duplicação do cubo. Comparando a tentativa que Hierão propôs e a de Leonardo (Figura 7), percebe-se que ambos baseavam-se suas soluções na geometria Euclidiana, para desta forma achar as meias proporcionais propostas por Hipocátes. Tanto Leonardo quanto Hierão conseguiram mostrar uma solução usando as proposições de Euclides mas, não conseguiram resolver o problema de acordo com as regras de construção por régua e compasso, ou seja, usando somente régua não graduada e compasso.

Figura 7 – Correspondência entre o método de Leonardo e o de Hierão



Fonte: Adaptado de Sànchez e Almarza (2008, p. 58)

Como podemos observar Leonardo da Vinci não fazia nada sem primeiramente ter um consistente embasamento teórico. Ele, como um artista fascinado por aprender, fazia estudos minuciosos de obras dos matemáticos antigos para depois usá-las em suas obras. Mas afinal o que Da Vinci queria ao estudar a duplicação do volume no cubo? Como já foi mencionado, ao estudar e tentar resolver o problema da duplicação do volume do cubo, estaria fazendo uma relação com a conservação do volume de corpos para assim remeter esses estudos ao movimento do corpo nas suas pinturas como, por exemplo, reproduzir expressões fisionômicas tão perfeitas e ao mesmo tempo misteriosas, como na obra Mona Lisa (ISAACSON, 2017).

Assim, Leonardo da Vinci, estudou e mobilizou informações da geometria para sua atividade artística, principalmente suas pinturas. Neste trabalho nosso exercício é para mobilizar (a exemplo de Leonardo da Vinci) os estudos da duplicação do cubo para nossa atividade profissional, qual seja o ensino de matemática e o fizemos por meio da problematização dos estudos de Da Vinci sobre a duplicação do cubo, que se materializaram em atividades de ensino relatadas no capítulo seguinte.

Problematizações para a Educação Básica

Baseando-se em Freire (1987), destacamos que a problematização aborda uma dimensão que vai muito além da pedagógica, uma vez que pode contribuir para aumentar a capacidade de sensibilidade crítica do sujeito. Para Freire (1987), a problematização faz-se por meio do diálogo e o ponto de partida para que ela aconteça é a análise crítica e reflexiva que os sujeitos conscientes exercem sobre uma dimensão significativa da realidade concreta, apresentada a eles como um problema para o qual eles podem construir respostas.

Uma variante da problematização é a Unidade Básica de Problematização, ou simplesmente UBP, em que a partir de sua criação, os estudantes da Educação Básica possam praticar exercícios de busca por respostas, ou seja, soluções para as problematizações. Para Miguel e Mendes (2010, p. 386),

> Uma UBP nada mais é do que um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade (ou desejo) que teria se manifestado a um ou mais integrante de uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história (tradução livre).

Dessa forma uma UBP pode ser elaborada a partir de qualquer contexto histórico, não necessariamente que esteja ligado diretamente à matemática, mas sim com qualquer elo que represente um traço cultural, uma produção material e imaterial de um povo ou região ou até mesmo uma manifestação social de épocas diferentes que tragam uma reflexão sobre sociedade, formação de valores e representatividade do ser humano. Para Martins (2017, p. 111):

> Uma UBP é materializada por um texto sucinto e claro que descreve uma pratica sociocultural, preservando seus aspectos históricos e técnicos, bem como a autoria de tais técnicas. O professor elaborará questionamentos que façam emergir a matemática dentro de tais práticas históricas e relacionem com o contexto escolar.

Logo podemos ver que as UBPs podem problematizar qualquer prática histórica e sociocultural e não apenas da história da matemática. Assim, neste trabalho apontamos uma passibilidade, "com vistas a construir significados para a matemática escolar, sob novos enfoques epistemológicos como suporte para sua abordagem didática na educação básica" (MENDES, 2014, p. 123).

Neste trabalho a prática que tomamos a ser problematizada é o problema da Duplicação do cubo que foi tema de estudo de várias pessoas ligadas a matemática ou áreas correlatas durante um longo período (aproximadamente 2000 anos). Tomamos esse problema como uma prática ou como o elemento que provocou o surgimento de uma prática, qual seja, aquela de tentar resolver tal problema, ou seja, o problema em si não é uma prática, mas disparou uma prática materializada nas tentativas de solução ao longo do tempo.

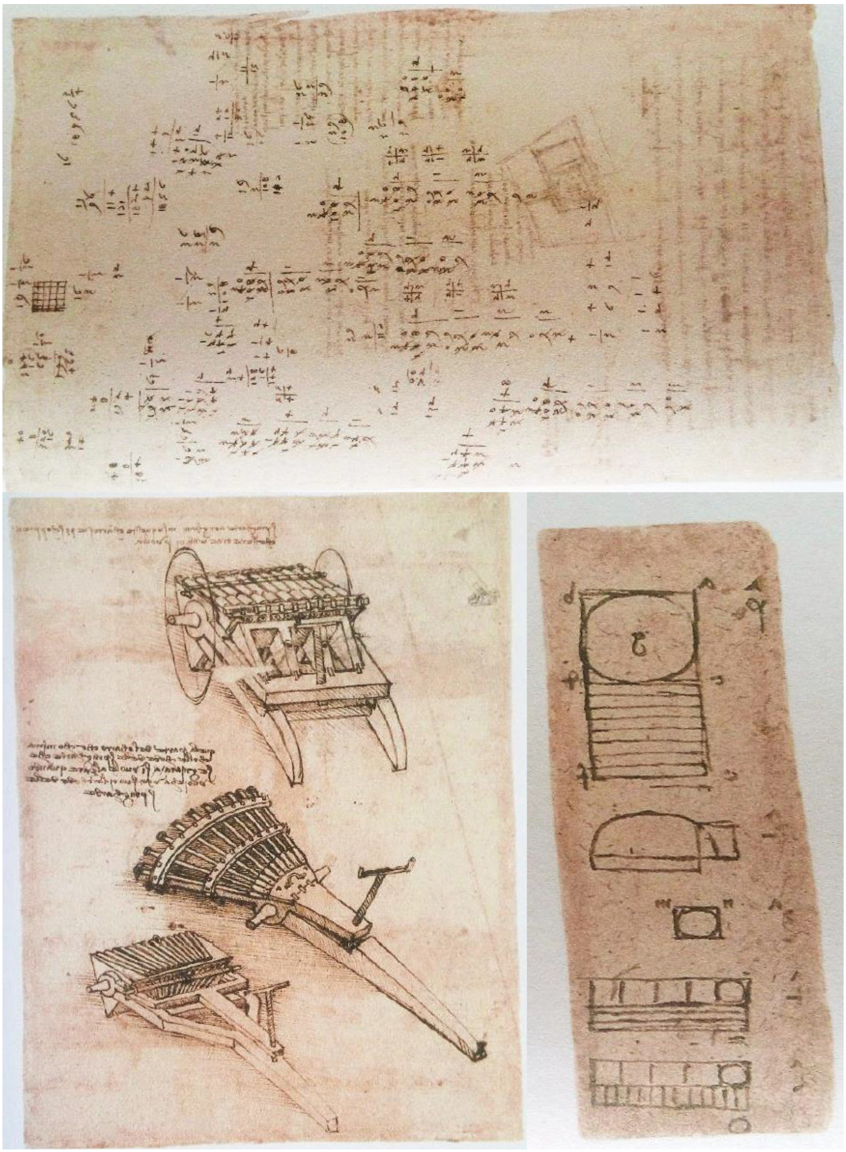
A Educação Básica Brasileira, que é composta pelo Ensino Fundamental de 9 anos e o Ensino Médio de 3 anos é o nível que antecede o ingresso nas Universidades, a Educação superior. Tem papel importante na formação educacional geral dos estudantes por ser nesse nível em que eles têm contato com conhecimentos das diferentes áreas. Neste apresentamos contribuições didáticas para as aulas de Matemática materializada em atividades no formato de problematizações (MIGUEL; MENDES, 2010) que poderão servir como subsídio didático para os professores de matemática da Educação Básica.

UBP 1. Leonardo da Vinci e o Códice Atlântico

Leonardo Da Vinci, considerado um gênio, quis compreender o mundo como um todo. Nascido em 15 de abril de 1452, em Vinci na região italiana da Toscana, foi um homem de muitos interesses e que se destacou, entre outros talentos, pela beleza e qualidade de suas pinturas como a Última Ceia, A virgem dos rochedos e a Moa Lisa. Leonardo além de um pintor de renome, fez estudos científicos em algumas áreas como anatomia, botânica, engenharia, óptica e matemática, especialmente geometria. Seus estudos foram registrados em folhas soltas por meio de desenhos e anotações que totalizavam algo em torno de 13 mil páginas. Uma parte delas foi extraviada e, aproximadamente 7 mil encontram-se, atualmente, em coleções como o Códice Atlântico que é a maior delas e reúne 1119 folhas desse total.

No referido Códice há escritos sobre construção de máquinas para voar, moinhos movidos pela água e pela força do ar, armas de guerra, projetos arquitetônicos, estudos sobre a luz e sombra, estudos sobre anatomia e estudos sobre matemática, dentre outros. Em matemática se destacam a aritmética e a geometria que ocupam boa parte das anotações de Leonardo no Códice Atlântico. A figura 8 destaca três folhas do Códice Atlântico de Leonardo da Vinci. A folha 184r (a primeira de cima para baixo) apresenta cálculos aritméticos, geralmente usados por Leonardo para registrar suas despesas e orçamentos para compra de materiais necessários à sua atividade de artista; a folha 157r trata do projeto de uma metralhadora a ser usada em batalhas e; a folha 206br na qual Leonardo fez alguns desenhos geométricos.

Figura 8 – Folhas 184r, 157r e 206r do Códice Atlântico



Fonte: Sànchez e Almarza (2008).

a) Que características históricas do período em que Leonardo viveu na Itália você destacaria?

b) Como ficou conhecido esse período histórico?

c) Esse contexto pode ter relação com as obras de arte e os estudos científicos de Leonardo da Vinci?

d) Cite algumas das áreas de interesse de Leonardo, além da pintura? Quais dentre essas áreas lhe interessam e por que?

e) No texto fala sobre algumas Obras de Arte feitas por Leonardo da Vinci. Você já havia escutado falar nelas? Que outras obras do pintor, também, são bastante conhecidas?

f) Leonardo fazia estudos sore temas relacionados às Ciências que hoje conhecemos como física, matemática, geografia e engenharia. Parte desses estudos de Leonardo hoje se encontram em Códices. Pesquise sobre tais Códices e diga: quantos existem e onde se encontram?

g) Um dos códices mencionados é o Atlântico. Por que ele recebe esse nome? Quem o organizou e quando? Onde está o Códice Atlântico original?

h) O Códice Atlântico reúne escritos das mais variadas áreas do conhecimento como as retratadas na Figura 8. Pesquisa por folhas do códice Atlântico e diga: de que temas elas tratam? Quais lhe chamaram mais a atenção e por quê?

i) Dentre as folhas do Códice Atlântico há aquelas que tratam de matemática. Faça uma pesquisa e selecione 4 folhas sobre matemática e diga: de que matemática cada uma delas trata? Essa matemática lembra a matemática da escola? Qual?

j) Pesquise por folhas do Códice Atlântico que tratam especificamente de geometria. Que geometria é abordada nas folhas? Essa geometria lembra a que você estudou na Escola? Qual?

k) Na sua opinião, porque Leonardo da Vinci fez estudos sobre geometria?

UBP 2. Sobre o problema da duplicação do cubo

Durante o século V a.C. na Grécia, surgiu um problema que provocou uma grande mudança na geometria Grega: A duplicação do cubo. Este é um dos três problemas clássicos da Geometria que durante muitos anos desafiou matemáticos de épocas diferentes a buscarem resoluções, porém usando apenas uma régua não graduada e um compasso que são conhecidos como instrumentos Euclidianos. As diversas tentativas de solucionar o problema contribuíram para que ocorressem avanços no campo da matemática como as cônicas que teriam sido descobertas em uma dessas tentativas.

O problema perdurou na comunidade de matemáticos por mais de 2 mil anos e dentre os que tentaram o resolver estão Hipócrates, Hierão, Platão, Parménion e o gênio italiano Leonardo da Vinci. Algumas dessas tentativas falharam, outras deram certo mas não, somente, com o uso de régua não graduada e compasso. Somente no século XVIII ficou provado que era impossível resolver o problema usando, somente, os instrumentos euclidianos.

a) Quais eram os três problemas Clássicos da geometria Antiga?

b) Qual a origem da duplicação do cubo proposta no século V a.C.? Do que se trata?

c) Quais estudiosos tentaram resolver o problema da duplicação do cubo? Destaque dois destes e diga: qual foi o procedimento adotado por eles?

d) Para resolver o problema da duplicação do cubo era necessário seguir algumas condições. Quais?

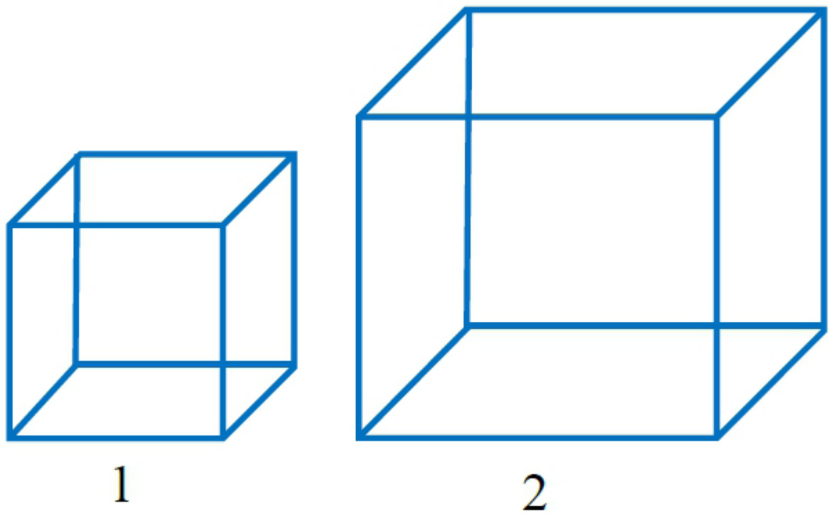
e) Foi possível resolver o problema com a condição imposta? Por que?

f) Pesquise brevemente sobre a vida de Leonardo da Vinci. Qual a sua relação com a geometria e com a duplicação do cubo?

g) Você já pesquisou acima no que consistia a duplicação do cubo. Agora vamos tentar refazer a mesma experiência que os antigos matemáticos do século V a.C. fizeram:
    - Use um pedaço de madeira (sem marcações) como régua e um compasso;
    - Desenhe um cubo de aresta qualquer;
    - Agora tente, com os instrumentos específicos, fazer

um cubo que tenha aresta igual ao dobro do cubo que você fez inicialmente;

Figura 9 – Cubos 1 e 2



Fonte: Construção dos autores.

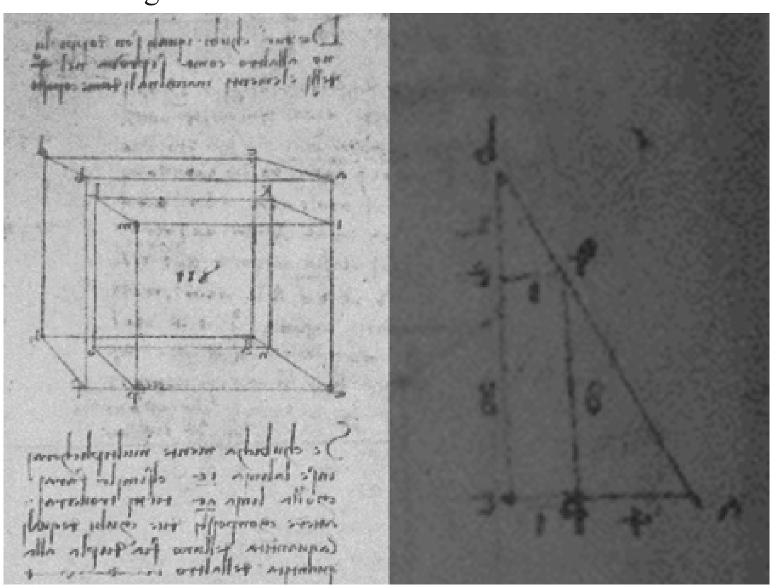
- Você acha que o segundo cubo está com o dobro do volume do primeiro? Para verificar sua resposta adote a aresta do primeiro cubo como se fosse 2, ou seja, $a^1 = 2$, e calcule seu volume usando a relação $V = a^3$;
- Dobre a aresta do primeiro cubo para assim obter a aresta do cubo 2, ou seja, $a^2 = 4$. Agora calcule o volume do segundo cubo.
- Ao dobrar o comprimento da aresta foi duplicado o volume do cubo 1? O que de fato aconteceu?
- Qual teria que ser a medida da aresta do segundo cubo para que este tenha o dobro do volume do primeiro?

UBP 4. O problema da duplicação do cubo no Códice Atlântico de Leonardo da Vinci

O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci contém registros dos estudos que Da Vinci fez por um período de aproximadamente 40 anos de sua vida. Dentre esses estudos estão aqueles sobre geometria que envolvem tanto a geometria plana como a geometria espacial ou sólida. Dentre os estudos sobre geometria sólida, destacamos aqueles sobre as tentativas de duplicar o volume do cubo.

O problema pode ser enunciado da seguinte maneira: dado um cubo *A* de aresta *a* e volume V_1, qual seria a medida da aresta *b* de um cubo *B* de volume V_2 de modo que $V_2 = 2V_1$? Parece ser um problema de simples solução, mas a depender do modo como ele é resolvido, pode ser bastante complexo. Esse problema está registrado em algumas páginas do Códice Atlântico de Da Vinci que tentou resolvê-lo de maneiras diferentes. Uma dessas tentativas de resolução encontra-se na folha 161, composta por reto (r) e verso (v), na qual ele fez desenhos e anotações sobre o tema. Um recorte da folha está retratado na figura 10. À esquerda está parte do reto e à direita parte do verso.

Figura 10 – Folha 161r do Códice Atlântico



Fonte: Sánchez e Almarza, 2008

a) Observe o desenho contido na folha 161r. Observe o desenho e diga como você o descreve? O que você está conseguindo visualizar?

b) O desenho parece ser de um cubo, ou melhor, trata-se de dois cubos de forma que o menor parece estar dentro ou contido no maior. Visualmente que tipo de relação é possível estabelecer entre esses cubos?

c) Refaça o desenho em estudo e diga que seguimento corresponde a aresta do cubo maior? E do cubo menor? Que relação pode-se estabelecer entre essas arestas?

d) Segundo as anotações de Leonardo nessa folha, o cubo menor tem aresta de tamanho 4, qual seria o seu volume?

e) O número que aparece no desenho é 128 que, segundo Leonardo, corresponde ao volume do cubo maior. Que relação o volume do cubo maior tem com o volume do cubo menor?

f) Considerando que o volume de um cubo é determinado pela relação $V = a^3$, na qual V é o volume e a é a aresta, qual será o valor da aresta do cubo de volume 128?

g) é possível relacionar o valor das arestas dos dois cubos? De que maneira?

h) O volume do cubo maior é o dobro do volume do cubo menor? Se isso é verdade, implica que a aresta do cubo maior é o dobro da aresta do cubo menor? Justifique sua resposta!

i) Observe o desenho da folha 161v. Refaça o desenho e diga, como você o descreveria? Há triângulos, retângulos, números?

j) Esse desenho do verso é uma tentativa de Da Vinci de encontrar o valor da aresta do cubo com volume duplicado. Você consegue estabelecer alguma relação entre os desenhos do reto e do verso?

k) Faça uma pesquisa sobre as tentativas de duplicação do cubo por Leonardo da Vinci e tente responder, que tipo de demonstração Da Vinci fez na folha 161v?

l) É possível que Leonardo tenha feito essa demonstração a partir de outras que foram feitas anteriormente como, por exemplo, a demonstração feita por Hierão de Alexandria. Faça uma pesquisa sobre esse método de Hierão e diga, há correlação entre esse método e o de Da Vinci? Como eles se relacionam? A partir desse resultado é possível correlacionar os desenhos da folha 161r e 161v?

Considerações finais

Ao fazer levantamento e leitura das fontes pesquisadas para a realização deste trabalho, observou-se como o conhecimento matemático geométrico está fortemente presente nos desenhos e anotações de Leonardo da Vinci e que hoje, podem ser encontrados no Códice Atlântico. Suas tentativas de solucionar o problema da Duplicação do Cubo nos fazem ver como o conhecimento perpassa por várias gerações, épocas e contextos sem nunca perder seu valor.

Entre outras metodologias de ensino, as UBPs são um instrumento no processo de ensino-aprendizagem trazendo consigo uma valorização da cultura, sociedade e matemática, que pode fazer com que o aluno se insira em diferentes contextos para absorver de forma mais concreta todo conhecimento a ser ensinado. Neste trabalho o problema da duplicação do cubo por Leonardo Da Vinci foi mobilizado para o ensino por meio das UBPs que podem ser postas em prática em sala de aula pelos professores de matemática. Portanto a realização desta pesquisa contribui como uma proposta metodológica no ensino de matemática por meio de um problema histórico com uma grande riqueza cultural e matemática, que pode ser direcionada para o ensino de conhecimentos de áreas diversas.

As UBPs devem ser tidas como um estímulo ao estudante na busca de conhecimento fora e dentro do campo da matemática o que deve ser feito tanto por alunos quanto por professores de matemática. O trabalho com as problematizações deve acontecer de forma dinâmica, criativa e reflexiva para ambos os envolvidos, de forma que o aluno não aprenda somente a matemática que está presente na referida prática cultural, artefato ou obra histórica, mas sim entenda todo o contexto social e/ou histórico que gerou aquele conhecimento, contribuindo assim na formação de um ser atuante de forma positiva na sociedade em todas as suas competências.

Apresentamos este trabalho como uma possibilidade que poderá ser implementada pelo professor de matemática na sala de aula da Educação Básica, como tal, não deve ser tomada como um exemplo a ser seguido à risca, mas sim como um exemplo que possa fazer com que o professor reflita sobre a proposta e possa se lançar em uma investigação que o leve a elaborar a sua própria atividade considerando as particularidades do contexto de sua escola, sala de aula e alunos.

Para por essa proposta em prática, sugerimos alguns encaminhamentos aos professores iniciando com a busca por práticas socioculturais históricas ou atuais, artefatos ou livros que contenham relatos de alguma prática que possa ser relacionada aos temas de matemática da escola. Essa busca pode ser feita na internet ou mesmo na sua cidade, pois há praticas locais que podem ser problematizadas como, por exemplo, aquelas ligadas a arte, artesanato, e atividades produtivas como o comércio, agricultura familiar e etc.

Localizada a prática, o professor deve escrever um texto sucinto que a descreve, e nesse texto, inserir e destacar os aspectos que deseja que sejam percebidos e aprendidos pelos estudantes, ou seja, o texto que descreve a prática já deve ser elaborado intencionalmente pelo professor para que se adeque aos seus alunos e ao tema escolar que deseja que eles aprendam. Esse texto pode conter imagens, gráficos, tabelas, dentre outros recursos que ajudem a torná-lo o mais compreensível possível.

Após a elaboração do texto, o professor deve elaborar as problematizações, as perguntas, que devem seguir um encadeamento, uma sequência que objetive conduzir o estudante ao aprendizado. Nossa sugestão é que as perguntas iniciem falando do contexto geral da prática em estudo (histórico, social e etc.) e que vá se aproximando do contexto matemático aos poucos até se referirem de maneira direta ao tema de matemática que o professor pretende ensinar. Isso é importante para que o estudante perceba que a matemática também se origina de um contexto mais amplo que têm relação com a cultura e coma a sociedade na qual está inserida. Isso pode estimular o estudante a ver a matemática como um saber humano e não como algo "de outro mundo" e um saber para poucos de difícil acesso pela maioria das pessoas.

Esse um fator que evidencia o caráter indisciplinar de uma UBP, pois, como já mencionamos neste trabalho, as práticas tomadas com base para a elaboração das problematizações, geralmente, não foram desenvolvidas com objetivos relacionados ao ensino. Por isso, tais práticas possuem elementos que se referem ao seu contexto histórico, social, geográfico, cultural bem como aspectos que podem ser mobilizados e relacionados ao ensino, no nosso caso o ensino de matemática na Educação Básica. Por esse motivo, as questões elaboradas pelo professor devem levar em conta esse aspecto indisciplinar para, em seguida, tratar diretamente do tema de matemática a ser relacionado ao contexto da prática.

No momento do desenvolvimento da atividade na sala de aula é importante que o professor tenha mente que não se trata de uma lista de exercícios com perguntas fechadas e respostas previsíveis, pois as problematizações abrem espaço para que os estudantes sejam criativos e elaborem respostas inesperadas pelo professor, ou seja, as respostas dos estudantes poderão ser as mais variadas possíveis e cabe ao professor conduzir para que o objetivo estabelecido seja alcançado. Uma sugestão é que o professor fomente o debate na turma para que se possa discutir as respostas afim de se chegar a um consenso ou a uma resposta mais próxima possível do que se pretende com a questão proposta.

Essas sugestões que acabamos de colocar são para que o professor possa ter mais algumas informações sobre uma possível implementação da metodologia proposta na sala de aula de matemática da Escola Básica. Com isso espera-se que este trabalho sirva de base para que o professor possa efetivar e inserir essa metodologia dentre aquelas que lança mão no seu cotidiano escolar e que possa ser visto como uma possibilidade de ensino cujo foco é um aprendizado em matemática mais completo no que se refere a aspectos sociais, históricos e culturais da matemática pouco explorados nas aulas de matemáticas da Escola Básica, mas que podem passar a ser por meio da metodologia das Unidades Básicas de Problematização.

Referências

BRITO, B. S. *O Problema da Duplicação do Cubo*, 2016. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Belém, 2016.

CAJORI, F. *Uma história da Matemática. Rio de Janeiro*: Editora Ciência Moderna, 2007.

FARIAS, C. A.; MENDES, I. A.; Farias C. A. *As culturas são as marcas das sociedades humanas*. In: MENDES, I. A; FARIAS C. A. (org.). *Praticas Socioculturais e educação matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 20.ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. 29.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREITAS, J. M. *Os Três Problemas da Matemática Grega*, 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2014.

ISAACSON, W. *Leonardo da Vinci*. Tradução de André Czarnobai. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2017.

MARTINS, J. P. *Ensino de Simetria por meio de problematização sociocultural*. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Matemática, Belém, 2017.

MENDES, I. A. *Investigação Histórica no Ensino da Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, I. A. *Práticas Sociais históricas no ensino de Matemática*. In: MENDES, I. A.; FARIAS, C. A. (org.). *Práticas socioculturais e Educação Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Coleção Contextos da Ciência)

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices and discursive game. *ZDM mathematics Education*, v. 42, 2010.

SÁNCHEZ, J. L.; ALMARZA, M. *O Códice Atlântico de Leonardo da Vinci*. Barcelona: Fólio, 2008. (Coleção O códice Atlântico de Leonardo da Vinci - 10 volumes)

TRZASKACZ, A. J.; HRENTCHCHEN, K. R. S. Irracionais na História da Matemática. *Revista SPACIOS*, v. 38, n. 60, 2017.

A Teoria de Van Hiele no estudo de quadriláteros e triângulos:

uma proposta didática utilizando o Geogebra e o Geoplano

Edilson Pinheiro de Souza

Rubenvaldo Monteiro Pereira

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta didática sobre o estudo da Geometria no ensino dos quadriláteros e triângulos pautados na Teoria de Van Hiele. A Teoria de Van Hiele descreve um modelo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, em uma sequência de níveis de compreensão e fases de aprendizagem. O objetivo desta proposta é desenvolver o pensamento geométrico para a compreensão e aplicação de conceitos e propriedades dos quadriláteros e triângulos, através de atividades pautadas na Teoria de Van Hiele. Submetem-se os alunos a um pré-teste, em seguida aplica-se a intervenção pedagógica com atividades e estratégias que combinam materiais manipuláveis com softwares de geometria dinâmica, estabelecendo relações entre as propriedades e conceitos das figuras planas. É possível que a aplicação desta proposta aprimore a prática pedagógica do professor e consequentemente a aprendizagem dos alunos, minimizando a defasagem de conceitos geométricos por eles apresentados, e proporcione um avanço nos níveis do pensamento geométrico.

Palavras-chave

Van Hiele. Geometria. Ensino aprendizagem.

Introdução

É indiscutível para a formação do estudante a importância de se trabalhar a Geometria em sala de aula de forma bem estruturada. Isso pode ser feito por meio de atividades que envolvam situações do dia a dia do aluno. Onde seja possível a visualização e a manipulação através do concreto, facilitando a aprendizagem, e ajudando posteriormente a resolver problemas matemáticos e principalmente do meio social em que está inserido.

Dentre as unidades temáticas a serem estudadas e compreendidas pelos alunos na área de Matemática, temos a Geometria, por ter papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático e na resolução de problemas. É através dela que podemos observar, interpretar e representar os espaços e formas que se encontram no mundo. Neste sentido, Bulos (2011) enfatiza que,

> A geometria pode ser o caminho para desenvolvermos habilidades e competências necessárias para a resolução de problemas do nosso cotidiano, visto que o seu entendimento nos proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair (BULOS, 2011, p.5).

Há alguns trabalhos realizados no Brasil que abordam o estudo de Geometria segundo a Teoria de Van Hiele, como: “A teoria de Van Hiele no estudo de áreas de polígonos e poliedros”, Santos (2015), mas não trabalha com o *software* Geogebra e difere também ao trabalhar com o 9º ano. E o trabalho intitulado: “Ensino e aprendizagem da Geometria e a teoria de Van Hiele: via de mão dupla para o desenvolvimento do pensamento geométrico”, Longato (2016), que apresenta pontos distintos, quando não se utiliza o Geoplano e tecnologias.

A matriz curricular do Estado do Pará (2019, p. 270), menciona que na Teoria de Van Hiele cada nível corresponde a uma etapa do desenvolvimento geométrico do aluno, desse modo, ela pode ser utilizada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Embasado nessa informação e nas dificuldades e problemas enfrentados ao longo de minha prática docente no Ensino Fundamental em escola publica, sinto necessidade e motivação pela busca de alternativas didáticas que viabilize ao aluno a possibilidade de compreender e elaborar conceitos geométricos, partindo de experiência concreta ou de interação durante as aulas.

Assim, tem-se neste trabalho como proposta de ensino, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto pelo casal Van Hiele, para o desenvolvimento do conteúdo curricular no tema: Conceitos e propriedades de quadriláteros e triângulos. Elenca-se o problema para esta proposta representado por meio da seguinte questão: Que contribuições as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) e materiais manipuláveis, aliados à Teoria de Van Hiele, oferecem ao ensino aprendizagem de conceitos e propriedades de quadriláteros e triângulos?

Como objetivo principal a ser alcançado com este trabalho, tem-se: Desenvolver o pensamento geométrico para a compreensão e aplicação de conceitos e propriedades dos quadriláteros e triângulos, através de atividades pautadas na Teoria de Van Hiele. Para que o aluno consiga compreender conceitos importantes da Matemática, é necessário ao professor, por exemplo, oferecer-lhes atividades que exemplifique sua realidade, onde consigam relacionar o que é ensinado na escola com seu cotidiano.

Fundamentação teórica

A geometria é muito importante para o desenvolvimento social de nossos alunos, pois está presente em seu cotidiano, envolvendo além do reconhecimento de figuras e formas geométricas ao seu redor, mas também as relações e transformações que podem existir entre elas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), tem-se que

> [...] os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p. 39)

Isso nos remete que ensinar geometria não é só aplicar ensinamentos contidos em livros didáticos, listas de exercícios para fixação e utilização de fórmulas. Mas fazer relações com o mundo que nos rodeia, envolvendo os diferentes elementos do espaço, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa que estimule nos estudantes a curiosidade e a busca do conhecimento.

Ainda de acordo com os PCNs:

> Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos etc. (BRASIL, 1997, p. 83)

Se trabalhadas atividades que envolvam situações de elementos que estão presentes na vida do aluno, isso pode facilitar o estudo da Geometria. E ainda levar os discentes a compreenderem o espaço social em que habitam e, com isso, participarem ativamente na sociedade.

De acordo com o Pacto Nacional de Alfabetização na Idade Certa:

> Estar no mundo nos coloca em interação com as pessoas e objetos também presentes nele e, ao mesmo tempo, nossos movimentos provocam a necessidade de que desenvolvamos uma linguagem associada à localização, visualização, representação e construção de imagens mentais e gráficas sobre as quais falamos e escrevemos para nos comunicar uns com os outros. (BRASIL, 2014, p. 7)

Desta forma, é fundamental aos alunos o estudo das linguagens e dos conceitos geométricos, pois assim serão capazes de compreender, descrever e representar o ambiente que os rodeia. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a geometria

> Envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade

> temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. (BRASIL, 2018, p. 271)

Daí a importância do desenvolvimento, em sala de aula, de atividades facilitadoras da aprendizagem, como as pautadas na teoria de Van Hiele. Atividades essas que levem os alunos a construir e reconstruir figuras planas, a fim de que compreendam seus conceitos e propriedades. E assim os permitam obter o pensamento geométrico, quesito fundamental aos estudantes para a compreensão da Geometria. Neste sentido, a BNCC, nos orienta que

> a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2018, p. 272)

É importante que o professor possibilite ao aluno o contato com situações de interação no seu meio social, como exemplo, desenvolver atividades que exemplifique seu cotidiano, como através de desenhos ou maquetes, por exemplo, mostrar o que há de geometria em sua comunidade. Com isso, a Geometria e a Matemática farão sentido ao aluno, e consequentemente facilitará a compreensão do objeto de conhecimento em estudo, ocasionando o desenvolvimento de sua aprendizagem e o avanço nos níveis de escolarização.

É possível visualizar a geometria na natureza, nos objetos pessoais e em diferentes construções humanas. Com isso, os alunos podem compreendê-la, e representá-la por meio de desenhos, explorando as propriedades e os conceitos geométricos. Vivenciando atividades práticas, que leve a experimentação, é possível desenvolverem o pensamento geométrico.

A teoria de Van Hiele, que também pode ser considerada como um modelo de ensino e aprendizagem de Geometria tem como finalidade o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, o qual descreve a evolução que os alunos podem obter, passando de uma simples visualização e reconhecimento de figuras geométricas, até a compreensão de demonstrações e teoremas geométricos.

Esta teoria foi criada pelo casal holandês, Pierre Marie van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, em 1950, em suas teses de doutorado, onde observaram as dificuldades que seus alunos apresentavam na assimilação de conhecimento em Geometria. Segundo o casal, eram tantas as dificuldades nos alunos, que ao expuserem suas aulas, pareciam que estavam falando em outra língua, os discentes não entendiam quase nada.

Então, por meio de pesquisas realizadas, o casal criou um novo método para trabalhar a Geometria, fundamentado no desenvolvimento do pensamento geométrico. O qual concebeu a existência de diferentes níveis de pensamento e fases de aprendizagem sobre conceitos geométricos. Sugerindo que os estudantes durante seus estudos passem por estes níveis, sendo que a evolução de um nível para outro não depende de sua idade cronológica, mas sim da vivência de atividades propícias, organizadas pelo professor.

Ao se referir à teoria, Nasser e Sant'anna (2010, p. 6) afirmam que

> A teoria de van Hiele estabelece cinco níveis hierárquicos, no sentido de que o aluno só atinge determinado nível de raciocínio após dominar os níveis anteriores. Esta pode ser uma explicação para as dificuldades apresentadas pelos alunos, quando são engajados num curso sistemático de geometria, sem a necessária vivência prévia de experiências nos níveis anteriores.

Faz-se necessário ofertar atividades adequadas a cada nível, que proporcione ao aluno compreender os conceitos geométricos estabelecidos ao nível em que se encontra, para que consiga evoluir com sucesso ao nível seguinte.

O casal Van Hiele estabeleceu cinco níveis a serem perpassados pelos alunos, que segundo eles é necessário para que os educandos consigam desenvolver o pensamento geométrico. O Quadro 1 indica os níveis de Van Hiele e suas características.

Para que os discentes consigam evoluir de um nível ao outro, é necessário que o professor os ofereça atividades adequadas, que favoreçam a passagem dos níveis. E ainda identifique em que níveis do raciocínio geométrico seus alunos estão, pois só o fato de todos eles estarem no mesmo ano escolar, não garante que estão no mesmo nível.

Quadro 1 – Níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria

Nível de Van Hiele	Característica	Exemplo
1º Nível (Básico) Reconhecimento	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.	Classificação de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra: argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição do quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º Nível Rigor	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma Geometria finita.

Fonte: Adaptado de NASSER, L. SANT'ANNA, N.F.P (1997).

Segundo os Van Hiele, para ocorrer um progresso de nível é necessário que o aluno passe por cinco fases de aprendizagem. Sendo assim, o Quadro 2 indica as fases de aprendizagem do modelo de Van Hiele e suas características.

Quadro 2 – Fases de Aprendizagem do modelo de Van Hiele

Fases de Aprendizagem	Características
Fase 1 Questionamento ou informação	-Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; -Apresentação de vocabulário do nível a ser atingido; -O professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.
Fase 2 Orientação Direta	-Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; -As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
Fase 3 Explicitação	-O papel do professor é o de observador; -Os alunos trocam experiências, os pontos de vista diferentes contribuirão para cada um analisar suas ideias.
Fase 4 Orientação Livre	-Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia.
Fase 5 Integração	-O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes ideias.

Fonte: Alves e Sampaio (2010, p. 71).

Segundo Nasser (2010), o progresso do aluno nos níveis não ocorre rapidamente, e isso dependerá mais de sua aprendizagem do que da idade ou maturidade. É necessário que o discente compreenda a linguagem característica de cada nível.

Pode ocorrer caso onde um aluno que esteja em determinado nível de conhecimento, acerte questão de um nível mais avançado. Sendo assim, a passagem de um nível ao outro vai depender do número de aulas de geometria, das atividades selecionadas e principalmente de uma análise minuciosa do professor.

Para cada nível o aluno deve passar pelas cinco fases de aprendizagem, por isso, é necessário que o professor através de testes ou atividades descubra em quais níveis de raciocínio geométrico seus alunos se encontram. E assim elabore atividades que diminuam essa discrepância de níveis diferentes que pode ocorrer em uma mesma turma.

E para consolidar a teoria de Van Hiele, têm-se as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), as quais são todas as tecnologias pertencentes aos processos informacionais e comunicativos da sociedade. Estão presentes nas empresas, nas faculdades, no campo, nas cidades, nos transportes e em todos os seguimentos da humanidade.

As crianças hoje já nascem com essas novas tecnologias presente em suas vidas, assimilam tudo muito rápido. Os novos alunos percebem facilmente a inserção dessas práticas no cotidiano das salas de aula. As TDICs são eficazes e ajudam bastante no desenvolvimento da atividade escolar.

A BNCC determina que o aluno além de compreender e utilizar, também deve criar tecnologias digitais de informação e comunicação. Para utilizá-la reflexivamente em seu ambiente social. E com isso consiga se comunicar, produzir conhecimentos, resolver problemas e atuar com protagonismo na vida em coletividade. E o professor precisa ofertar metodologias que envolvam as TDICs, para que o discente consiga desenvolver esta competência.

Ainda segundo a BNCC é importante utilizar diferentes recursos didáticos como a história da Matemática, malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, com intuito de despertar interesse e seja significativo a todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. E como forma de auxilio a esse processo, existe o *software* de geometria dinâmico Geogebra. O Geogebra é um *software* de Matemática dinâmico gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabela, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

Contribuindo para a efetivação da aplicação da metodologia de Van Hiele, têm-se os materiais manipuláveis, que, segundo Ochi et al. (1997, p. 9), é preciso levar os alunos a explorar, representar, construir e discutir, para que ele consiga fazer investigações, descobertas, descrições e percepções de propriedades. Daí a importância de utilizar materiais manipuláveis nas aulas de Geometria, para tornar o processo de ensino e aprendizagem eficiente através do palpável.

Como material manipulável há o Geoplano, que é um tabuleiro quadrado, e leva pregos formando uma malha. Para utilizá-lo, são necessários elásticos coloridos, que servirão para a construção dos polígonos. Segundo Costa, Pereira e Mafra (2011), o Geoplano permite aos alunos o manuseio de figuras planas, auxiliando na compreensão de seus conceitos e propriedades, proporcionando participação ativa. Isso fará com que os discentes se envolvam no processo de ensino e aprendizagem, e os conceitos sejam compreendidos e significativos.

Desta forma, com a utilização de matérias manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica, aliados a teoria de Van Hiele, é possível ao professor como mediador, auxiliar o processo de ensino e aprendizagem. Tornando assim, o ensino mais interessante e atrativo ao aluno, oportunizando o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Proposta de intervenção didática

O trabalho é para ser desenvolvido em escola do Ensino Fundamental, mais precisamente em turmas do 7º ano. A escolha deste nível de ensino é pelo fato de o primeiro autor atuar como professor neste nível e, também, pela necessidade de fazer um trabalho inovador e motivador no processo de ensino e aprendizagem em geometria.

Propõe-se como instrumentos de trabalho, o teste dos níveis de aprendizagem de Van Hiele, a serem elaborados pelo aplicador. Este constará de 15 questões, distribuídas em três blocos, cada um deles corresponderá a um dos níveis de Van Hiele. Tendo como objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno.

O primeiro bloco de questões será referente ao nível básico. Esse nível caracteriza-se pela capacidade de identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas com base em sua aparência global. Com essas cinco questões, busca-se verificar as habilidades dos alunos em reconhecer, comparar e nomear símbolos geométricos.

As questões de 6 a 10 serão referentes ao nível 1, que tem como característica a análise dos componentes de uma figura geométrica, o reconhecimento de suas propriedades e o uso dessas propriedades para resolver problemas.

O terceiro bloco de questões será para avaliar habilidades pertinentes ao nível 2, segundo a teoria de Van Hiele. Esse nível caracteriza-se pelas seguintes capacidades: percepção da necessidade de uma definição precisa; percepção de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.

Os testes serão compostos de questões sobre conceitos e propriedades de triângulos e quadriláteros, denominados primeiramente pré-teste (a ser aplicado antes do início das atividades) e, posteriormente, pós-teste, a ser aplicado no final da realização das atividades. Estas ações servirão para comprovar se as atividades propostas e realizadas contribuíram para a aprendizagem dos objetos de conhecimento em estudo no projeto.

Os sujeitos do trabalho, os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, serão submetidos às propostas de atividades, em virtude dos estudos sobre quadriláteros e triângulos serem parte integrante e necessária do currículo para este nível de escolaridade.

A proposta de intervenção didática prioriza o tema conceitos e propriedades de quadriláteros e triângulos, que são parte integrante e essencial do currículo para o 7º ano do Ensino Fundamental.

A sequência didática proposta se dará em quatro etapas, que são:

1. Aplicação do pré-teste de Van Hiele, específico sobre conceitos e propriedades de triângulos e quadriláteros;

2. Realização de atividades com o uso das TDICs utilizando o *software* Geogebra (através de *datashow* e também de aplicativo no celular ou tablete do aluno), envolvendo conceitos e propriedades de triângulos e quadriláteros;

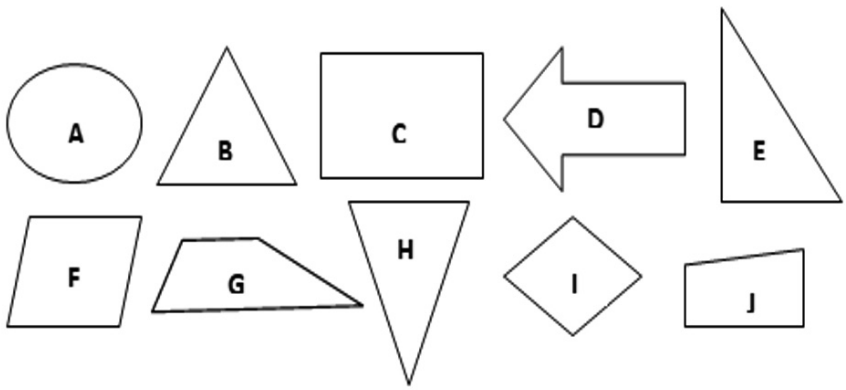
3. Realização de atividades com materiais manipuláveis utilizando o Geoplano e jogos, envolvendo conceitos e propriedades de triângulos e quadriláteros;

4. Aplicação do pós-teste contendo questões com conceitos e propriedades de triângulos e quadriláteros.

Os trabalhos deverão ser desenvolvidos em quatro encontros com os alunos. No primeiro encontro, de início, será aplicado um pré-teste para verificar o nível de conhecimento geométrico segundo Van Hiele. Tem-se exemplos de questões a serem utilizadas (por meio do pré-teste), com intuito de verificar em qual nível, segundo os Van Hiele, um aluno se encontra.

Figura 1 – Questão nível 1: Reconhecimento – teste Van Hiele

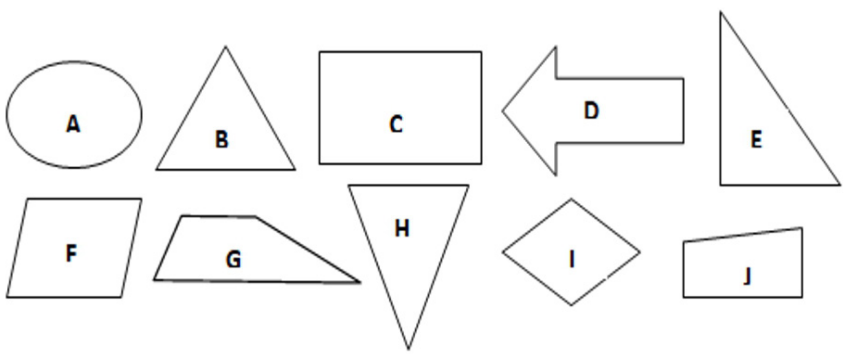
Dentre as figuras planas abaixo, quais são triangulares?



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Figura 2 – Questão nível 2: Análise – teste Van Hiele

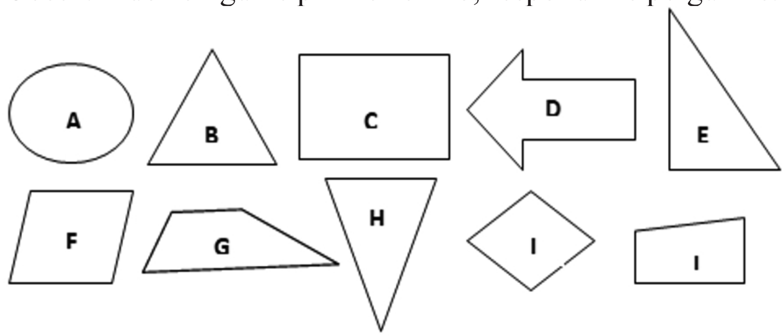
Dentre as figuras planas abaixo, quais são triângulos isósceles?



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Figura 3 – Questão nível 3: Dedução informal – teste Van Hiele

Observando as figuras planas abaixo, responda as perguntas:

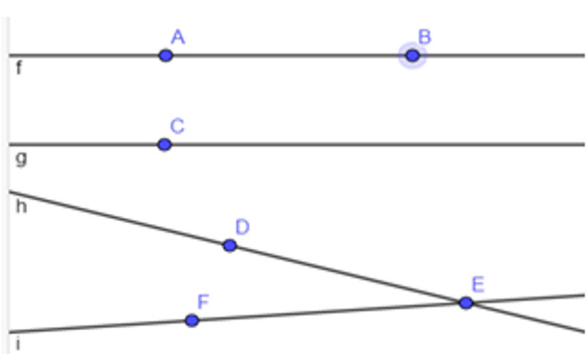


a) Quais dessas figuras geométricas são consideradas quadriláteras?
b) Em quais dessas figuras geométricas a soma de seus ângulos internos é igual a 180º?

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Em seguida, ainda no primeiro encontro, trabalham-se as noções e proposições primitivas de ponto, reta e plano, e as retas paralelas e concorrentes. Isto será desenvolvido através de exposição dialogada, por meio de um vídeo sobre ponto, reta e plano e do *software* Geogebra (onde os alunos terão a oportunidade de visualizar, manusear e experimentar). Aqui são oportunizadas as primeiras atividades da intervenção para que os discentes desenvolvam o pensamento geométrico, e assim evoluam nos níveis de Van Hiele.

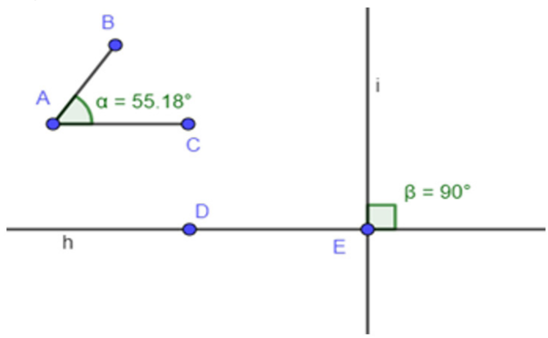
Figura 4 – Retas paralelas e retas concorrentes construídas no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

No segundo dia, propõe-se trabalhar retas e ângulo. No primeiro momento realiza-se um diálogo sobre os assuntos, fazendo relação direta com as vias publicas da cidade. Em seguida oportuniza-se aos educandos a visualização e construção dos objetos de conhecimento em estudo, no Geogebra, com o intuito de motivar através da manipulação e prática, para avançarem na construção de seu raciocínio geométrico.

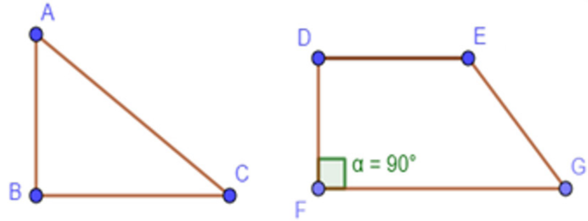
Figura 5 – Ângulo e retas perpendiculares, construídos no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

No terceiro encontro, propõe-se trabalhar triângulos e quadriláteros no Geogebra, pretendendo-se possibilitar aos alunos a construção de tais figuras como forma de consolidar a aprendizagem e promover assim o raciocínio geométrico. As atividades do dia iniciam-se por uma conversa com os alunos sobre os assuntos mencionados. Em seguida reproduz-se um vídeo sobre os quadriláteros.

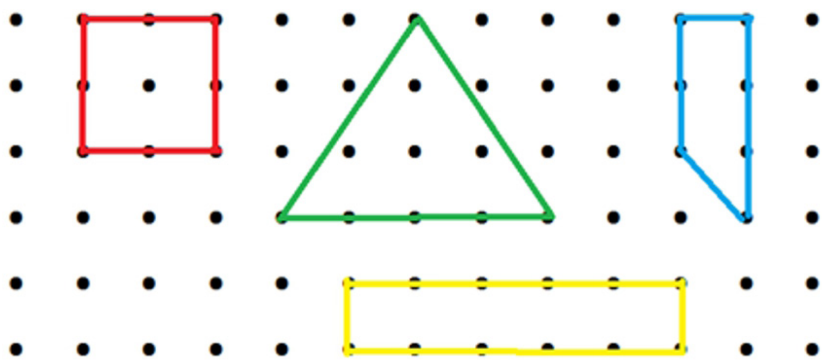
Figura 6 – Construção de triângulo e quadrilátero no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

E por fim, oferecer aos alunos em grupos, o uso do Geoplano, onde utilizando elásticos coloridos, terão oportunidade de construir e reconstruir as figuras em estudo. A finalidade neste momento é desenvolver estímulos visuais e táteis, encontrando desta forma suporte físico para formular seus próprios conceitos geométricos por meio da experimentação, e assim, desenvolver o pensamento geométrico.

Figura 7 – Construção de triângulos e quadriláteros no Geoplano



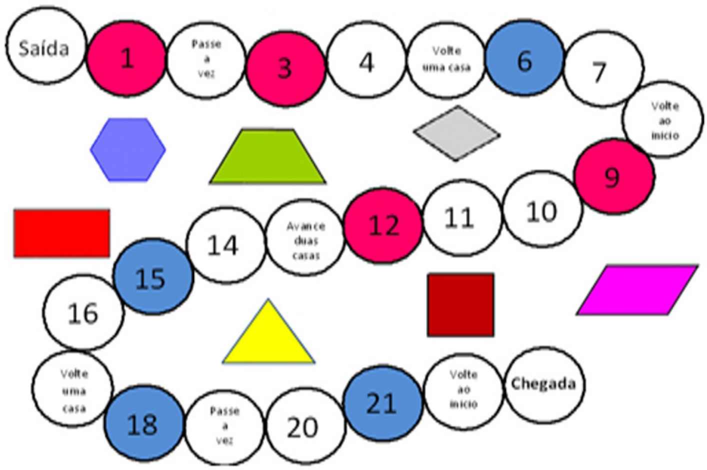
Fonte: ensinandomatematica.com/ensinando-matematica-geoplano

No quarto e ultimo dia da intervenção, propõe-se trabalhar dois jogos. O jogo trilha geométrica com triângulos e quadriláteros e o jogo trilha dos quadriláteros com o objetivo de que a ludicidade contribua para que os estudantes compreendam os assuntos trabalhados. E finaliza-se a intervenção com um pós-teste, a fim de verificar se houve progresso no conhecimento dos alunos por meio das atividades aplicadas. Se observado que os discentes obtiveram índice de acerto mais elevado que no pré-teste, isso indicará progresso e, consequentemente, a ocorrência do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo os Van Hiele.

Considerações finais

O ensino da Geometria, assim como da Matemática, requer uma boa estratégia didática por parte do professor. É preciso que o docente associe o objeto de conhecimento com o dia a dia do aluno. Evitando que o aprendizado se reduza em apenas aulas ex-

Figura 8 – Jogo trilha dos quadriláteros



Fonte: conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7546/3800

positivas com resolução de atividades do livro didático, o que por sua vez, pode ocasionar reprovação e aversão pela disciplina.

O professor, por meio de uma pesquisa de campo, por exemplo, pode propor aos alunos enxergar a geometria presente na natureza, nos móveis de uma casa, em edificações humanas de sua cidade. Isso pode facilitar a apropriação dos conceitos básicos de geometria, possibilitando que o aluno perceba a relação entre o aprendizado e seu meio social, contextualizando o saber. Com isso, espera-se que por meio desta proposta didática seja possível ao aluno melhorar seu conhecimento em geometria, pois se propõe um ensino pautado na experimentação concreta.

Assim, o discente será levado a enxergar o conceito aprendido dentro de casa, nas ruas, na televisão, muitas vezes relembrando e mesmo consolidando o conhecimento recebido. Um exercício que vai não apenas facilitar a aprendizagem, ao passo que avançam nos níveis de conhecimento estabelecido pelo casal Van Hiele, mas também permitir ao aluno o gosto pela Matemática.

Pretende-se também, com este trabalho, instigar a pesquisa por novos procedimentos didáticos, no sentido de abrir portas para inovação no processo ensino aprendizagem, pois é necessário que o professor possibilite ao aluno ser construtor de seu conhecimento. Para tanto, é preciso ressignificar o fazer docente a partir de práticas ativas de ensino, e os estudos de Van Hiele abrem inúmeras possibilidades de uma aprendizagem significativa.

Semelhantemente, pretende-se futuramente com a aplicação da proposta didática, proporcionar aos alunos, avanço nos níveis do pensamento geométrico, os quais através das atividades terão oportunidades de aprimorar seus conhecimentos em geometria. Que estes obtenham uma aprendizagem significativa, desenvolvendo autonomia na resolução de situações-problema, levando-os a adquirir novas ferramentas e estratégias aos enfrentamentos do dia a dia.

Referências

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, n. 5, p. 69-76, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática – Anos Iniciais Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC, 1997.

______. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:* Geometria. Brasília, DF: MEC/SEB, 2014.

______. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRUYNE, P. de et al. *Dinâmica da Pesquisa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1991.

BULOS, Adriana Mascarenhas Mattos. O Ensino da Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *In*: XIII CIAEM – IACME, Recife, 2011.

COSTA, Ivana P. L. da. *A utilização do software GEOGEBRA como ferramenta didática no processo de ensino e aprendizagem*: uma aplicação para alunos e professores da rede pública de ensino. Santarém, PA, 2017.

COSTA, D. E.; PEREIRA, M. J.; MAFRA, J. R. e S. Geoplano no ensino de Matemática: Alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemática*, v. 7, n. 14, dez./jan. 2011.

DOBARRO, V. R.; BRITO, M. R. F. Um estudo sobre habilidade matemática na solução de problemas de geometria. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 34-46, 2010.

LONGATO, D. F. *Ensino e aprendizagem da Geometria e a teoria de Van Hiele: via de mão dupla para o desenvolvimento do pensamento geométrico.* Artigo - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Paraná.

MATUOKA J. M. et al. Ensino de quadriláteros com uso de um jogo de trilhas. *In*: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA – ULBRA, Canoas, 2017. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7546/3800. Acesso em: 17 fev. 2020.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. *Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele.* 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

OCHI, F. H. et al. *O uso de quadriculados no ensino da geometria*. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 1997.

PARÁ. *Documento Curricular do Estado do Pará*. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Belém: SEEC, 2019.

PARMEGIANI, Roselice. Ensinando geometria com o geoplano. Disponível em: https://www.ensinandomatematica.com/ensinando-matematica-geoplano/. Acesso em: 15 fev. 2020.

SANTOS, J. M. S. R. dos. *A teoria de Van Hiele no estudo de áreas de polígonos e poliedros.* Dissertação - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, Rio de Janeiro.

História da matemática, tecnologia e investigação matemática:

uma proposta utilizando a *Lettre* II de Leonhard Euler

Ellen Cristian dos Santos Silva

Daniele Esteves Pereira Smith

Resumo

O presente artigo se respalda na perspectiva fruto da articulação entre História da Matemática (HM), Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e Investigação Matemática (IM), que por sua vez está caminhando no campo da educação matemática. O seu objetivo é propor a elaboração de um produto educacional baseado na carta II da obra *Lettres à une Princesse d' Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia) de Leonhard Paul Euler (1707-1783). Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, com abordagem qualitativa na qual se consolidou nas ideias relacionadas a História da Matemática como recurso metodológico em sala de aula, aliada a tecnologia e a investigação. Dessa maneira, as informações relatadas no trabalho podem se tornar suporte na elaboração de outros produtos educacionais que são respaldados pela aliança entre essas três tendências da educação matemática. Por fim, como resultado temos o produto educacional completo, demonstrando os elementos essenciais para produção, bem como a evidência da potencialidade de fontes históricas no ensino de matemática em sala de aula.

Palavras-chave

História da Matemática; Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação; Investigação Matemática.

Introdução

A pesquisa aqui apresentada, teve origem nas inquietações referentes a matemática escolar, especialmente sobre a possibilidade de seu ensino-aprendizagem por meio da história, considerando o uso de obras históricas. Nesse caso, consideramos um clássico literário do século XVIII: *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia) de autoria do matemático e físico Leonhard Paul Euler (1707-1783).

Dessa forma, buscamos na literatura metodologias de ensino que tem a História da Matemática como elemento principal. Assim, tomamos como suporte a articulação entre História da Matemática (HM), Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e Investigação Matemática (IM), que embora seja uma perspectiva nova, se mostra promissora e com excelente potencial didático.

Sendo assim, esse trabalho propõe a elaboração de um produto educacional com articulações entre HM, TDIC e IM baseado em uma das produções contidas na obra *Lettres à une Princesse d' Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* de Euler (1707-1783). Assim, tomamos como indagação norteadora do trabalho o seguinte *questionamento*: como a HM aliada as TDIC podem possibilitar o ensino e aprendizagem nas aulas de matemática? Como conseguinte, determinamos como *objetivo geral* do trabalho a elaboração de uma atividade apoiada na articulação entre HM e TDIC, via IM.

Como metodologia utilizada no trabalho, destacamos a pesquisa bibliográfica, pois nos baseamos em livros e artigos já existentes no ramo da educação matemática, uma vez que, esse tipo de metodologia "[...] é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites [...]" (FONSECA, 2002, p.32).

Além disso, temos como abordagem da pesquisa o cunho qualitativo, debatido por Gil (1999) como uma abordagem que propicia o aprofundamento da investigação das questões relacionadas ao fenômeno de estudos e suas relações.

Assim, o referencial teórico da pesquisa focaliza especialmente trabalhos independentes, que mostram assuntos específicos, como o uso da HM de Miguel e Miorim (2011), as considerações sobre a informática na educação matemática de Borba e Penteado (2016), as colocações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, 2013) sobre investigação, assim como a correspondência científica de Euler a princesa vislumbrada na pesquisa de Pereira (2014). Todavia, o estudo desse conjunto só foi possível na pesquisa, a partir das inquietações provocadas por Sousa (2016, 2020), Silva (2019) e Andrade e Sousa (2016) que despertaram o interesse na escolha da temática, na qual alia História da Matemática e Tecnologia através da Investigação Matemática

Então, a partir do nosso conhecimento sobre as várias cartas de Leonhard Euler e a então possibilidade de aliar a história da matemática a tecnologia por meio da investigação, vimos que a obra histórica de Euler se mostra promissora como instrumento na utilização da aliança.

Como percurso metodológico da pesquisa estruturamos o trabalho em três momentos. O primeiro refere-se ao levantamento bibliográfico, uma vez que foi realizada uma investigação na qual foram extraídos artigos e documentos da internet que consolidaram nosso aporte teórico. O segundo, está ligado ao conhecimento da obra histórica utilizada na construção do produto educacional. Por fim, é apresentada a atividade histórica construída como objetivo geral do trabalho.

Ao enfatizarmos os caminhos metodológicos da pesquisa, é chegado o momento da apresentação da articulação entre essas tendências pedagógicas da educação matemática no potencial uso no ensino-aprendizagem de matemática.

A HM articulada por TDIC e IM

No vasto campo que engloba a educação matemática, destacamos as pesquisas realizadas envolvendo as tendências em educação matemática, que consideram as potencialidades existentes em diferentes contextos. Dentro dessas tendências, estão inclusas a História da Matemática, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação e a Investigação Matemática, nas quais serão trabalhadas em articulação como possível recurso metodológico no ensino-aprendizagem de matemática conforme preconiza Sousa (2020).

Quando se trata da utilização da HM como ferramenta em sala de aula, estamos compreendendo a história por traz dos conceitos e fórmulas matemáticas. Roque (2014, p.169) defende que "a história da matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos matemática"

Dessa forma, Silva (2019, p. 35-36) afirma que:

> [...] a HM proporciona ao aluno a possibilidade de enxergar a Matemática como um instrumento/técnica que vem sendo desenvolvida ao longo dos séculos e sofrendo influências da cultura a qual está inserida, servindo ao propósito a qual foi criada, ou seja, a comunicação, a integração e ao desenvolvimento social.

Do mesmo modo, a utilidade da HM na escola pode estar ligada diretamente com a compreensão de significados que perpassam o tempo. Dessa forma, fazer com que a história faça parte do processo de produção do conhecimento dentro de sala de aula, se torna uma ponte na compressão dos assuntos que podem ser abordados, assim como da construção do seu significado.

De acordo com Miguel e Miorim (2011) podemos destacar como argumento favorável ao uso de HM no ensino, fontes que possibilitam a desmitificação da matemática, que geralmente estão ligadas a conhecimentos prontos e acabados com uma infinidade de exercícios, assim permite conscientizar o aluno quanto ao conhecimento relacionado a disciplina.

Contudo, em um cenário com desafios constantes e com transformações na sociedade, especialmente com a dependência tecnológica, articulações entre metodologias são bem-vindas, assim como Brasil (2018) defende, sobretudo quando estimulam uma visão crítica e reflexiva. Assim, as TDIC surgem como ferramenta na promoção de ideias, uma vez que

> Na sociedade e no mundo educacional a tecnologia de informação e comunicação se faz cada vez mais presente. Alguns programas de computador voltados para o ensino e aprendizado da Matemática nos permitem dispor de alguns recursos que, usados de forma adequada, se convertem em ferramentas potentes e com enorme funcionalidade (ANDRADE; SOUSA, 2016, p. 48).

Dessa maneira, a introdução das tecnologias no ensino pode atuar como forma de buscar um ambiente em que as mídias e os recursos tecnológicos operem como aliada no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Visto que, as tecnologias digitais têm conquistado espaço na sociedade atual, e na vida dos estudantes, apresentando diferentes possibilidades de exploração que podem certamente facilitar a produção de conhecimento nas aulas de matemática.

> Os softwares educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual da matemática atribuindo um papel importante à visualização na educação matemática, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante [...] (BORBA, 2007, p. 3).

Além disso, Araújo (2005) destaca que a curiosidade inerente aos alunos, principalmente aos mais jovens, faz com que o envolvimento com novas tecnologias aconteça com muita facilidade e, dentro de suas possibilidades, já que esses alunos possuem uma vida já impregnada de tecnologias.

Brasil (2000) ainda salienta de forma coerente, quando menciona que o caminho para o ensino de qualidade em qualquer disciplina, especialmente na matemática, não é único. Assim, desmistifica a ideia de que o ensino só é alcançado com uma única metodologia.

> No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os

> instrumentos para a construção das estratégias de resolução (BRASIL, 2000, p.42).

No entanto, incluir mídia no contexto escolar de acordo com Borba e Penteado (2016) não anula os problemas pedagógicos, assim como não paralisa o debate na prática docente, mas pode ser utilizada como experimentação, visualizações, simulações que aliam o conhecimento teórico ao uso de tecnologias informativas.

De acordo com Sousa (2020) um meio para conexão entre História da Matemática e as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação pode ser via Investigação Matemática. Sobre a IM considera-se a obra de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), entretanto a aliança entre as tendências baseia-se na obra de Sousa (2016, 2020), percussora dessa temática na educação matemática.

A investigação, por sua vez, está na formulação de *questões* que são interessantes, mas as quais não existem respostas prontas e acabadas, é necessário que haja uma procura baseada em concepções concretas, assim é exercido o poder de investigação. Em defesa dessa habilidade, Sousa (2016, p. 4) expõe que:

> [...] é inerente à profissão de matemático e quando trazida ao ensino, é como se estivéssemos simulando tal atividade com nossos alunos, isto é, colocando-os no papel de matemáticos que produzem matemática, conhecimento. Neste sentido, o aluno que investiga, constrói conhecimento e não adquire, assim como, o professor media e não transmite.

Andrade e Sousa (2016) concluem que nessa aliança há possibilidade de potencializar a HM por meio das tecnologias, unindo-as a IM, em prol do ensino e aprendizagem. Ademais, o processo investigativo, reflexivo será essencial na busca de justificativas e porquês, observando que ele próprio pode fazer suas descobertas.

A proposta do trabalho com investigação de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) está fortemente ligada ao estudo de questões, não necessariamente com sofisticação, mas que abordem a produção do conhecimento por meio da formulação de conjecturas/suposições. De modo a apresentar os seguintes momentos:

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Penteado (2005, p. 21)

Levando em consideração todos os momentos descritos no Quadro 1, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) ainda comentam sobre o desenvolvimento da atividade investigativa, em que o professor, inicialmente, deve explicar, apresentar o que foi pensado e deixar claro os objetivos da atividade; desenvolver trabalhos em grupos e interações do grupo e por fim, expor os trabalhos, considerada essa uma etapa essencial, pois mostra o real significado de investigar, assim como desenvolve a capacidade de se comunicar matematicamente.

Sousa (2020) menciona que a aliança entre a HM, TDIC e IM se consolidam pela investigação de problemas, episódios ou temas históricos que podem ser apoiados pelas tecnologias, em vista de um objetivo em comum: ensino e aprendizagem da matemática; que por sua vez, ocorre via *atividades-históricas-com-tecnologias* ou *investigação-histórica-com-tecnologia*.

Diante do exposto até então, para a articulação entre HM e TDIC via IM, consideramos os momentos de uma investigação apresentados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e a proposição de uma proposta pedagógica alinhada à *investigação-histórica-com-tecnologia,* definida como "[...] tarefas que envolvam pesquisa histórica (de problemas) explorada num processo investigativo tal como o matemático do passado (não nos limites do conhecimento) com ou sem tecnologia a fim de produzir conhecimento matemático." (SOUSA, 2020, p.128)

Dessa forma, se mostra crucial apresentarmos qual obra histórica foi utilizada como geradora da elaboração do produto educacional de *investigação-histórica-com-tecnologia*, levando em consideração sua importância como obra literária do século XVIII, com impactos vistos até os dias atuais.

Obra histórica de Leonhard Euler

Lettres à une Princesse d' Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia) de autoria do matemático e físico Leonhard Paul Euler (1707-1783), trata-se de um conjunto de cartas escritas entre os anos 1760 a 1762, com idioma originalmente francês, considerada um clássico da literatura do século XVIII.

Figura 1 – Frontispício do livro original *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Saint-Pétersbourg: Imprimerie de 1'Académie impériale des Sciences

Fonte: www.christies.com

Sua origem se deu a partir de um convite feito a Euler pelo rei da Prússia Frederico II, o Grande (1712-1786), para se tornar tutor da jovem Princesa Anhalt-Dessau (1745-1808), sua sobrinha, episódio que o levou a ministrar aulas sobre os mais variados assuntos. O método utilizado para o ensino da princesa, por correspondência, resultou em uma obra que reuniu de mais de 200 cartas, descritas por Pereira (2014, p. 14) assim:

> A obra reúne um conjunto de 234 epistolas caracterizado por uma gama de conteúdos das mais diferentes áreas, entre elas teoria musical, Filosofia, Mecânica, Óptica, Astronomia, Teologia e Ética divididas em partes quase equivalentes, incorporando exposições sobre vários assuntos pertencentes à Matemática. Revelam ainda as perspectivas religiosas e a própria personalidade de Euler.

Nota-se que as cartas tratam dos temas mais variados, delineando muitos ramos da ciência, todavia, destacamos durante a pesquisa as temáticas direcionadas a matemática, apresentadas por Pereira e Mendes (2013) da seguinte maneira, na Carta I trata-se assuntos sobre a extensão, como: unidades de medida de comprimento e suas relações de equivalência, conversão, frações e cálculo de distâncias; na Carta II temáticas sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais, relação entre medidas de comprimento, assim como a relação entre tempo e distância percorrida; na Carta III temas sobre linhas e cordas; unidades de medida de comprimento, bem como dobro e triplo de números naturais; na Carta IV discussões sobre dobro e triplo de números naturais e proporcionalidade; na Carta V questões sobre dobro, triplo e quádruplo de números naturais, razão e proporção e potenciação, já na Carta VI temáticas sobre dobro, triplo e quádruplo de números naturais, razão e proporção, grandezas diretamente proporcionais, regra de três simples, potenciação, P.A e P.G e séries numéricas.

Ademais, o trabalho descrito em Pereira (2014) mostra a tradução para o português do primeiro tomo de cartas, contendo 79 correspondências que seguiam uma temática central, também confirmada por Pérez (1990), na qual em sua tradução em espanhol da obra, identificou temáticas centrais e suas classificações em blocos da seguinte forma:

- Cartas I e II tratam de movimento, velocidade e distância;
- Cartas III a VIII sobre teoria musical;
- A partir da carta IX estudo sobre física e suas ramificações;
- Cartas IX a XIII sobre ar e suas propriedades;
- Carta XIV, XV e XVI falam sobre termologia;
- Cartas XVII a XLIV sobre óptica;
- Cartas XLV a LVIII trata sobre gravidade dos corpos celestes;
- Cartas LIX a LXVIII assuntos sobre astronomia, divididos em:
- Carta LIX e LX falam sobre sistema do mundo;
- Carta LXI fala sobre movimentos dos planetas;
- Cartas LXII a LXVIII trata das marés.
- Carta LXVIII fala sobre gravidade universal;
- Cartas LXIX e LXX tratam de extensão, mobilidade e impenetrabilidade;
- Cartas LXXI a LXXV fala de Movimento, inércia e forças;
- Por fim, Carta LXXIX trata de forca.

Assim, percebemos o quanto as cartas são ricas em conhecimentos de cunho matemático, além dos temas referentes a física, sendo um potencial recurso pedagógico no ensino-aprendizagem de matemática. Dessa forma, tomamos com base para a elaboração da nossa atividade histórica, uma das cartas de Euler que será apresentada e seguir.

Carta II

A obra de Euler no geral é rica no estudo de diferentes ramos da educação, devido apresentar uma quantidade significativa de cartas que tratam dos mais variados temas. Contudo, para produção da nossa atividade histórica selecionamos a Carta II por se tratar de velocidade, assim como por ser fonte de exploração de Grandezas e Medidas, uma das unidades temáticas da área da matemática,

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas

> e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento [...] (BRASIL, 2018, p. 273).

Além disso, Brasil (2018) ainda discorre sobre a utilização de relações entre grandezas como densidade, velocidade, energia e potência. Evidenciando dessa forma, a integração entre a matemática e outras áreas do conhecimento.

Tradução da Carta II: Sobre a velocidade

Com a esperança de que vossa alteza agradecerá a continuação de meus ensinos, das que tomei a liberdade de lhe apresentar uma prova na parte anterior, passarei a desenvolver a ideia de velocidade, uma espécie particular de quantidade, sendo suscetível de mais ou de menos. Quando se transporta uma coisa ou passa de um lugar a outro, se lhe atribui uma velocidade. Se um corredor a cavalo e um mensageiro a pé vão de Berlin a Magdeburgo nos dois casos se admite certa velocidade, mas se diz que a velocidade do primeiro é maior que a do último. Se trata pois, de examinar qual é a diferença que introduzimos entre essas duas velocidades. Não é o caminho, idêntico para o correio e o mensageiro, se não que a diferença se encontra visivelmente no tempo que um e outro empregam em realizar o mesmo recorrido. A velocidade do correio é sem dúvida maior, porque emprega menos tempo em percorrer o caminho de Berlin a Magdeburgo; E a velocidade do mensageiro é menor, pois emprega mais tempo em fazer o mesmo trajeto. Portanto está claro que, para se formar uma ideia adequada da velocidade, é necessário atender a duas espécies de quantidade por vez: o caminho percorrido e o tempo passado. Assim, um corpo que percorre no mesmo tempo o dobro do caminho, tem uma velocidade dobrada; se percorre no mesmo tempo o triplo do caminho, sua velocidade é considerada três vezes maior, e assim sucessivamente. Se conhecerá, em consequência, a velocidade de um corpo quando se sabe o caminho que percorre em um certo tempo. Para conhecer a velocidade de minha caminhada quando vou a Lytzow, tenho observado que realizo 120 *passos em um minuto, mais cada* *um dos meus passos vale dois pés e meio, logo minha velocidade é tal que ando em um minuto um caminho de* 300 *pés. Em uma hora percorro um caminho sessenta vezes maior, isto é* 18.000 *pés; o que não constitui ainda uma milha que, ao conter* 24.000 *pés, exigiria uma hora é* 20 *minutos. Logo, se quisesse caminhar de aqui a Magdeburgo precisaria utilizar* 24 *horas completas. Eis aqui uma ideia exata da velocidade com a que sou capaz de caminhar, a partir dela se compreende facilmente o que é uma maior velocidade ou menor. Assim, se um correio fosse daqui a Magdeburgo em* 12 *horas, sua velocidade seria duas vezes maior que a minha, e se fosse em* 8 *horas sua velocidade seria três vezes maior. Nós observamos grandes diferenças entre as velocidades neste mundo. Uma tartaruga nos dar um exemplo de uma velocidade pequena; se não realiza nada mais que um pé por minuto, sua velocidade é* 300 *vezes menor que a minha, pois eu realizo* 300 *pés em um minuto. Mas conhecemos também velocidades bem maiores. A do vento é muito variável; uma brisa percorre* 10 *pés em um segundo, ou* 600 *pés em um minuto, como resultado caminha duas vezes mais rápido que eu. Um vento que corre* 20 *pés em um segundo, ou* 1.200 *em um minuto já é bastante forte. Um vento que viaja a* 50 *pés em um segundo é extremamente forte, ainda que sua velocidade não seja nada mais que dez vezes maior que a minha e que precise* 2 *horas e* 24 *minutos para ir daqui a Magdeburgo.*

Segue depois a velocidade do som, que caminha 1000 *pés em um segundo e portanto* 60.000 *pés em um minuto. Em consequência é* 200 *vezes maior que a velocidade do meu andar. Se se dispara um canhão em Magdeburgo e fosse possível que o ruído alcançasse até Berlin, chegaria depois de* 7 *minutos de tempo. Uma bala de canhão se move mais ou menos com a mesma velocidade, mas quando se emprega a maior das cargas, bem poderia percorrer* 2.000 *pés em um segundo ou* 120.000 *em um minuto. Essa velocidade nos parece admirável ainda que apenas exceda em* 400 *vezes a de minha caminhada a Lytzow, e é também a maior velocidade que percebemos aqui em baixo, na terra. Mas nos céus existem velocidades muito maiores, ainda que nos pareçam tão lentos os movimentos, vossa alteza sabe que a terra gira ao redor do seu* *eixo no espaço de* 24 *horas, em consequência para cada ponto do equador essa velocidade percorre* 5.400 *milhas em* 24 *horas, em quanto que eu não poderia viajar mais que* 18 *milhas. Essa velocidade é* 300 *vezes maior que a minha, apesar de ser menor que a velocidade máxima de uma bala de canhão. Mas a terra se move ao redor do sol no espaço de um ano e com esta velocidade percorre* 128.250 *milhas em* 24 *horas, logo esta velocidade é dezoito vezes mais rápida que a de uma bala de canhão. A maior velocidade que conhecemos é sem dúvida a da luz, que percorre* 2.000.000 *de milhas a cada minuto e excede a uma bala de canhão em* 400.000 *vezes.*

22*, de abril de* 1760

Elaboração da atividade histórica

Para composição da nossa atividade histórica, além de tomarmos como base a correspondência II de Euler, vamos nos basear na pesquisa de Andrade e Sousa (2016), na qual, concluem que as atividades que aliam a tecnologia e HM devem seguir as seguintes etapas: escolha do conceito matemático/tópico/episódio a ser ensinado/estudado; coleta de informações históricas sobre sua criação, contexto social, histórico, econômico, artístico, reconhecer a situação problema, o uso das informações históricas no processo de recriação investigativo; empregar das tecnologias para otimizar o tempo das (re)criações, aproveitado no auxílio das investigações; e socialização dos resultados e formalização em relatórios.

Além disso, Sousa (2020) discute que "[...] à elaboração de produtos educacionais que se respaldam na aliança e que, de acordo com Gomes e Sousa (2020), são compostos em geral dos seguintes itens: elementos pré-textuais, informações básicas, desenvolvimento da atividade e avaliação".

Produto educacional

É importante salientarmos inicialmente que a proposta de produto educacional descrita pode sofrer modificações dependendo do ambiente e do professor que auxiliará tudo, pois apesar do docente fazer um planejamento preciso das atividades que será desenvolvida, sempre ocorrem situações e questionamentos inesperados que podem ser levados em consideração no desenvolvimento da atividade.

Além disso, algumas orientações precisam ser destacadas, visto que ler as orientações das atividades para os alunos é essencial, pois assim terão conhecimento dos objetivos que atividade propõe, os conhecimentos prévios, a metodologia e o cronograma que se espera seguir. Sendo esse, o passo inicial para execução da atividade. Dessa maneira, vamos iniciar a apresentação do produto que tem como embasamento o trabalho realizado por Silva (2019):

Apresentação: Produto Educacional construído com intuito de estabelecer relações entre medidas de comprimento a partir da carta II da obra Leonhard Euler.
Objetivos: Utilizar a correspondência II para trabalhar relações de medidas de comprimento com auxílio de planilhas eletrônicas.
Recursos: Atividade impressa, recurso multimídia.
Cronograma:

Momentos	Procedimentos
1º momento	Apresentação da atividade, fazendo a organização da turma e esclarecer todas as dúvidas que possam surgir
2º momento	Iniciar a atividade de exploração 1, para conhecimento da fonte histórica utilizada para começar as primeiras investigações
3º momento	Exploração 2 com a inclusão da TDIC previamente selecionada
4º momento	Organizar a dinâmica de socialização para melhor apresentar os resultados obtidos

Atividade de Exploração

A escrita de cartas com intuito de ensino, tiveram suas primeiras manifestações em 100 a.C. através de Cícero, um filósofo, orador e político romano. Entretanto, nosso foco se volta ao século XVIII, onde Leonhard Euler foi convidado por Frederico II, rei da Prússia, para tornar-se tutor de sua sobrinha, a princesa Anhalt-

Dessau. Tal tutoria era comum nessa época, especialmente entre a realeza, não apenas na Alemanha, assim como em outros países da Europa. A forma como Euler conversava com a princesa sobre os mais diversificados temas, era através de trocas de cartas. Todavia, destacamos nessa atividade a correspondência II, que foi lida anteriormente, assim separamos o seguinte trecho:

> Quando se transporta uma coisa ou passa de um lugar para outro, se lhe atribui uma velocidade. Se um corredor a cavalo e um mensageiro a pé vão a Berlin e Magdeburgo nos dois casos se admite uma velocidade, mas se diz que a velocidade do primeiro e maior que a do último. Se trata pois, de examinar qual é a diferença que introduzimos entre essas duas velocidades. Não é o caminho, idêntico para o correio e o mensageiro, se não que a diferença se encontra visivelmente no tempo que um e outro empregam em realizar o mesmo recorrido A velocidade do correio é sem dúvida maior, porque emprega menos tempo em percorrer o caminho de Berlin a Maddebrugo; E a velocidade do mensageiro é menor, pois emprega mais tempo em fazer o mesmo trajeto. Portanto está claro que, para se formar uma ideia adequada da velocidade, é necessário atender a duas espécies de quantidade por vez: o caminho percorrido e o tempo passado. Assim, um corpo que percorre no mesmo tempo o dobro do caminho, tem uma velocidade dobrada; se percorre no mesmo tempo o triplo do caminho, sua velocidade é considerada três vezes maior, e assim sucessivamentes (PEREIRA, 2014, pg. 71).

Observamos no fragmento, a relação entre distanciamento e o tempo decorrido em uma determinada situação, ainda assim, vamos analisar outra parte da carta II.

> Para conhecer a velocidade de minha caminhada quando vou a Lytzow, tenho observado que realizo 120 passos em um minuto, mais cada um dos meus passos vale dois pés e meio, logo minha velocidade é tal que ando em um minuto um caminho de 300 pés. Em uma hora percorro um caminho sessenta vezes maior, isto é 18.000 pés; o que não constitui ainda uma milha que, ao conter 24.00 pés, exigiria uma hora e 20 minutos. Logo, se quisesse caminhar de aqui a Magdeburgo precisaria utilizar 24 horas completas (PEREIRA, 2014, pg. 71).

Exploração 1

Analisando os segmentos da correspondência II, podemos fazer alguns questinamentos no sentido de problematizar o tema para que seja feita uma pesquisa que busque informações para responder:

a) Com a notável contribuição de Euler na educação de uma Princesa da Alemanha, se faz um questionamento: quem foi Euler? Pesquise e resuma sua trajetória.

b) Em sua opinião, o método de ensino utilizado por Euler na educação da Princesa se deu início na história da humanidade como? Pesquise

c) Como você vê essa forma de estudo atualmente? Ainda existe? Ouve alterações ou modificações? Manifeste suas opiniões.

d) De acordo com o texto e os fragmentos da carta, como Euler inicialmente conduz o conceito de velocidade? Em que fala isto é registrado ou pode ser observado?

e) Conforme as palavras de Euler existem variáveis relacionadas a velocidade, com suas palavras, diga quais são elas e explique qual relação existente entre as mesmas.

f) Com o exemplo mostrado por Euler, é evidente a importância da velocidade. Descreva como ela está presente em situações cotidianas.

g) Exemplifique um outro acontecimento que envolveria a comparação de duas ou mais velocidades.

Exploração 2

a) Euler se mostra curioso ao saber qual a velocidade de sua caminhada, assim conclui que dá 120 passos a cada 1 minuto, levando em consideração que um de seus passos equivalem a dois pés e meio. O pé, nesse caso, está relacionado ao quê? Explique.

b) Uma pessoa que tenha seus passos equivalentes a dois pés, consegue andar 120 passos a cada 1 minuto; passados uma hora qual a distância percorrida pela mesma? Qual a diferença em relação a Euler?

c) Faça uma pesquisa e descubra que outras medidas de comprimento além do "pé" existem, fazendo uma tabela no *software* Excel. Para isto:

Procedimentos:

1. Peça para os alunos abrirem o *software* Excel (ou outra planilha eletrônica, como CALC, Online, Geogebra, etc. Fica a critério de quem aplicará a proposta);

2. Mostre as funcionalidades da planilha com exemplos simples;

3. Na célula A1 digite "seu nome";

4. Na célula A2 digite "M1" indicando uma das medidas que estão sendo trabalhadas;

5. Posicione o mouse no canto inferior direito da célula A2 até o ponteiro do mouse virar um sinal de + e arraste para baixo até a célula A11, ficando da seguinte forma:

6. Na célula B2 até a célula B11 digite as medidas de comprimento encontradas.

e) Após verificação dessas medidas, pesquise e debata com os colegas como pode ser realizada conversão dessas unidades.

f) Com o auxílio de uma fita métrica, meça sua altura e faça as conversões necessárias para completar a tabela da questão (c).

g) Provavelmente existem outras unidades de medidas que são utilizadas onde você vive, mas não estão na tabela, quais são elas e como podemos relacioná-las com as pesquisadas anteriormente?

h) Existe um sistema que define a unidade padrão de cada medida? Qual a relevância do mesmo para nossas vidas. Discuta com os colegas sobre.

Dinâmica de Socialização

A dinâmica de socialização da atividade se baseia na apresentação dos resultados para a turma, ficando a critério de quem irá aplicar a atividade. Em nosso caso é sugerido como forma de sorteio as respostas de cada exploração, sendo aleatória a pessoa ou grupo que irá responder, fazendo com que todos participem ativamente de tudo. As tabelas podem ser coladas para PowerPoint para melhor visualização e explicação dos dados que foram coletados.

Considerações finais

Com base na articulação entre História da Matemática, Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e a Investigação Matemática, as reflexões apresentadas tiveram como intuito principal a elaboração do produto educacional designado no artigo como *investigação-histórica-com-tecnologia* para a carta II da obra de Euler e os conceitos que envolvem situação de velocidade, que trabalha a matemática de forma investigativa. Assim, mostramos a potencialidade que uma carta de clássico da literatura do século XVIII, aliada a tecnologia pode ser usada por meio da investigação como recurso no ensino-aprendizagem de matemática.

Após alcance do nosso objetivo, esperamos que essa pesquisa, que se baseia em estudos que ainda estão caminhando no campo da educação matemática, se torne subsídio didático para outras abordagens ligadas a aliança entre HM, TDIC e IM. Assim como, almejamos sua parcela de contribuição na área de estudo dessa perspectiva de ensino da matemática em sala de aula.

No entanto, ressaltamos que tal articulação não resolve as dificuldades referentes a aprendizagem da matemática na escola, assim como não neutraliza o debate na prática docente e os problemas pedagógicos, contudo pode ser utilizada como potencial aliada no ensino, aliando o conhecimento teórico ao uso de tecnologias informativas, permitindo alternativas para prática pedagógica, contribuindo nos processos de ensino e aprendizagem.

Deste modo, ponderar a matemática com uma perspectiva advinda de um texto do século XVIII é desafiador, mas notamos com clareza seu potencial para ser trabalho em dias atuais. Fazendo com que a obra *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* traga possibilidades de serem trabalhadas em articulação com as tecnologias por meio da investigação matemática, sendo possível repensar novas metodologias de ensino nas aulas de matemática, a exemplo da aliança entre HM, TDIC e IM como propõe Sousa (2020).

Referências

ANDRADE, Luciana Vieira; SOUSA, Giselle Costa de. Uma proposta de uso da História da Matemática apoiada pelas TIC e HM para o ensino de função. In: *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 3, n. 7, p. 41-53, 2016.

ARAÚJO, J. L. *Tecnologia na sala de aula: desafios do professor de Matemática*, Minas Gerais, n.3, p. 1-10, fev. 2005.

BORBA, Marcelo de Carvalho. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF: MEC/ SEB, 2018.600 p.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria do Ensino Médio, 2000.

FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A.; *História na Educação Matemática*: proposta e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PEREIRA, D. E. *Correspondências Científicas como uma relação didática entre História e Ensino de Matemática:* O exemplo das Cartas de

Euler a uma Princesa da Alemanha. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

PEREIRA, D. E; MENDES, I. A. Diálogos pedágogicos entre as cartas de Euler a uma princesa alemã e o ensino de matemática. *In*: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideo. *Actas*... Montevideo: CIBEM, 2013. v. 1. p. 1-11.

PÉREZ, C. M. In: EULER, L. *Cartas a uma princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofia.* Zaragoza: Universidad, Prensas Universitarias, 1990.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

ROQUE, Tatiana. Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática? *Revista Brasileira de História da Ciência*, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185, 2014.

SILVA, Alison Luan Ferreira da. *História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o* 8*º ano*. 2019. 247f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre HM, TDIC e IM: fundamentos e aplicações. *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, ano 15, Fluxo Continuo, p. 117-136, jan./dez. 2020. Disponível em: http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p117-136.id239

SOUSA, Giselle Costa de. Uso da História da Matemática e Tecnologias de Informação e da Comunicação: alianças possíveis e potenciais para o ensino de matemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo.

A piscicultura de Cametá e suas relações com a matemática do Ensino Fundamental

Jehny Adrianny Alves Vieira

Jeová Pereira Martins

Resumo

Apresenta-se, nesse trabalho, um estudo da piscicultura como prática sociocultural desenvolvida no município de Cametá enquanto forma de trabalho e produção de renda familiar. Tal prática possui em sua constituição elementos que remetem aos objetos matemáticos ensinados no Ensino Fundamental. Assim, o objetivo deste trabalho é estabelecer relações entre elementos da piscicultura de Cametá e a matemática do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo cujas informações foram obtidas por meio de visitas aos criadouros de peixe em Cametá e por um estudo sobre a literatura referente ao tema. Nos fundamentamos nos estudos de Farias e Mendes (2014) sobre as práticas socioculturais e suas relações com o ensino de matemática com o intuito de identificar aspectos matemáticos envolvidos no processo da criação de peixes, mas também, evidenciar aspectos de outras áreas como cultura, história, meio ambiente e geografia. Os resultados apontam que há relações entre elementos da piscicultura e os objetos matemáticos do Ensino Fundamental, principalmente os aritméticos e geométricos. Com os resultados obtidos na pesquisa foi possível destacar a importância de se conhecer mais sobre a cultura, as maneiras de vivência regionais e de trazer para a sala de aula tais informações para que o aluno tenha uma compreensão melhor do que está em sua volta e relacione esses contextos ao contexto escolar particularmente o contexto da matemática do Ensino Fundamental.

Palavras-chave

Piscicultura. Prática Sociocultural. Matemática. Ensino Fundamental.

Considerações iniciais

O Ensino de Matemática tem passado por transformações ao longo do tempo como o número crescente de propostas metodológicas e estratégias de ensino. Algumas dessas propostas são formuladas no âmbito da Educação Matemática e visam auxiliar os estudantes na compreensão de mundo por meio da conexão da matemática com diferentes culturas, contextos sociais e práticas socioculturais. Neste trabalho abordaremos a piscicultura de Cametá como prática sociocultural que possui em sua constituição elementos que remetem aos objetos matemáticos do Ensino Fundamental. Assim, o trabalho tem como objetivo estabelecer relações entre elementos da piscicultura de Cametá e a matemática do Ensino Fundamental.

Justifica-se a escolha do tema por se considerar que a piscicultura está presente no contexto regional do estudante dessa região, incentivando-o a conhecer sua cultura, suas práticas, visto que a cultura é um fator de humanização importante para o seu desenvolvimento. Daí, a relevância do tema por se entender que a criação de peixes possui elementos que remetem aos objetos da matemática escolar além de aspectos culturais, históricos, ambientais e geográficos que podem ser explorados de forma interdisciplinar para o ensino.

Busca-se, portanto, responder a seguinte questão: Como relacionar elementos da piscicultura de Cametá aos objetos matemáticos do Ensino Fundamental? Com o intuito de problematizar tal prática para evidenciar a matemática nela mobilizada e relacioná-la com a matemática escolar do Ensino Fundamental utilizou-se como fundamento teórico os princípios epistemológicos concernentes às práticas socioculturais e suas relações com a matemática escolar segundo Farias e Mendes (2014).

A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste estudo compreendeu além de pesquisa bibliográfica, também uma pesquisa de campo dentro da área urbana e rural de Cametá, na qual foram produzidos dados por meio de registros escritos, imagens cujas análises resultaram neste texto que relata o estudo.

Assim, este trabalho inicialmente aborda o que é a piscicultura, suas definições, suas faces e suas implicações no contexto do município de Cametá, caracterizando-a como prática sociocultural, ressaltando sua importância para o município e relacionando-a com a matemática escolar no ensino fundamental.

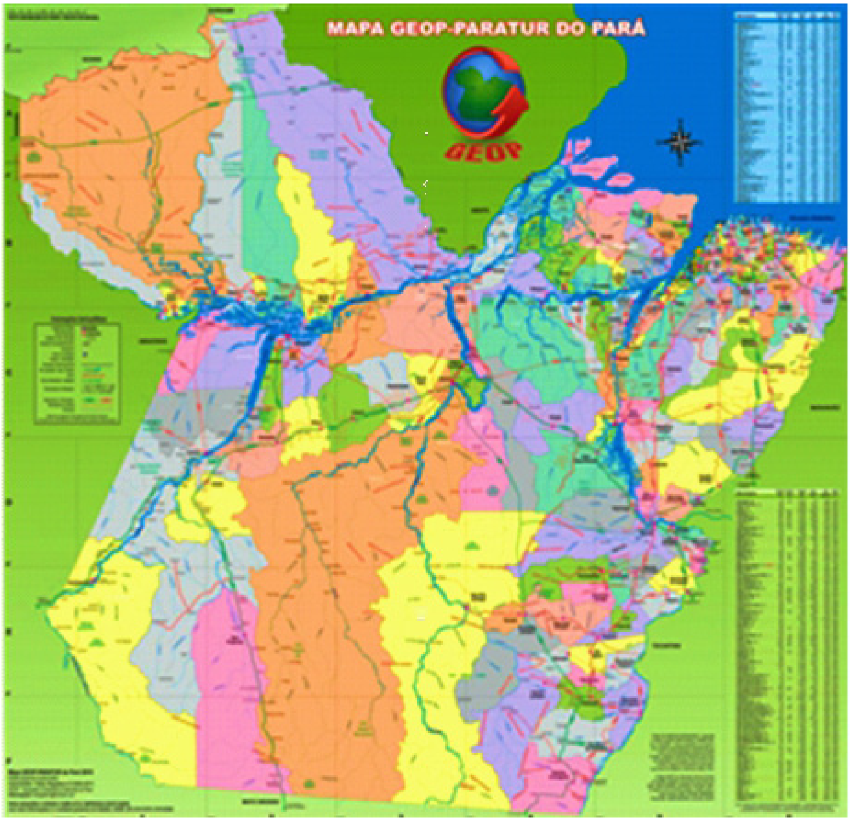
Piscicultura de Cametá

O estado do Pará é o segundo maior do Brasil, em dimensões territoriais. Possui 1,2 milhões de quilômetros quadrados e 144 municípios que se agregam em 6 mesorregiões (Marajó, Metropolitana de Belém, Nordeste, Baixo Amazonas, Sul e Sudeste). Essas mesorregiões são divididas em 22 (vinte e duas) microrregiões. Dentre tais microrregiões a de Cametá é constituída por sete municípios, Abaetetuba, Igarapé-Miri, Limoeiro do Ajuru, Mocajuba, Baião, Oeiras do Pará e Cametá. Esses municípios são cortados pelos rios Tocantins, Moju e Pará, dentre os quais predomina o Tocantins que, com exceção de Oeiras do Pará, abrange todas as demais (ALMEIDA 2010; FANTIM, 2011).

Nosso estudo foca o município de Cametá com uma superfície de 3.112 km², que se localiza na microrregião do Baixo Tocantins, mesorregião do nordeste paraense, entre as coordenadas de 01º55’00” e 02º38’25” de latitude sul e 49º50’34” e 49º11’13” de longitude a Oeste de Greenwich, limitando-se a oeste pelo município de Oeiras do Pará, a leste pelo município de Igarapé-Miri, ao sul pelo município de Baião, e ao norte pelo município de Limoeiro do Ajuru.

Cametá possui um tradicionalismo intrínseco, no qual temos os ribeirinhos como um dos povos característicos do município. Os ribeirinhos constituem os habitantes das ilhas no município de Cametá. Possuem hábitos que são comuns à maioria da população, como o transporte fluvial principalmente nas ilhas que são adjacentes a cidade. Nessas ilhas canoas, lanchas e barcos a motor em geral são usados, com frequência, como principal meio de locomoção entre o ambiente urbano e rural.

Figura 1 – Mapa do Pará



Fonte: Paratur. Acesso em 10/06/2020.

Figura 2 – Município de Cametá no Pará

Fonte: Site da UFPA – Campus Cametá. Fotografia de Jorge Domingues Lopes

No ambiente urbano, por sua vez, a dinâmica é um tanto quanto diferente, haja vista que, a cidade passa por um processo de globalização em vários aspectos de sua sociedade, propiciando, assim, uma diferença marcante nos costumes entre os habitantes da cidade e o povo ribeirinho.

A cidade mescla perfeitamente hábitos tradicionais e atuais, ainda que a maioria da população viva em ambiente rural. No caso dessa parcela específica da população os hábitos de vida, trabalho e produção se materializam em práticas distintas como: produção de farinha de mandioca, frutas, verduras e na atividade pesqueira que ocorre prioritariamente de duas maneiras, a pesca artesanal, na região das ilhas e o cultivo de peixes em cativeiro, a piscicultura, que ocorre tanto na região de terra firme quanto na área ribeirinha (COSTA, 2006; ALMEIDA, 2010).

Na região das ilhas de Cametá encontram-se boa parte dos profissionais da área da pesca, esses trabalhadores baseiam prioritariamente sua renda e alimentação na pesca artesanal. No período chamado de "defeso" a pesca é proibida, pois, é o momento em que ocorre a desova das espécies, é o período de reprodução e a pesca é suspensa para que os filhotes não sejam capturados e para que os peixes possam se reproduzir sem interferências humanas. Após esse período, a pesca é reaberta e os pescadores comemoram essa abertura com uma grande pesca coletiva que reúne pessoas em pontos estratégicos dos rios, onde fazem um cerco, no qual capturam algumas toneladas de peixes, como retratado na figura 3.

Figura 3 – Abertura da pesca em Cametá, localidade de Pindobal Mirim

Fonte: Acervo de Toninho Castro (2020)

A suspensão da pesca no período de defeso e a escassez de pescado causada pela pesca predatória são fatores que implicam na necessidade constante de adaptação dos pescadores e da atividade pesqueira de forma a garantir sua subsistência de maneira sustentável. Uma das alternativas é a criação de peixes em cativeiro, a piscicultura, que foi inserida no município de Cametá como alternativa de manutenção do trabalho, renda e alimento para as famílias, em decorrência dos fatores citados e, em última instância, da necessidade de sobrevivência da espécie humana. Dessa forma, a atividade pesqueira em Cametá, que antes era restrita a pesca artesanal nos rios da região, ganha uma nova modalidade, a piscicultura, que passa a ser praticada na região ribeirinha, na área de terra firme e até na zona urbana da cidade.

O que é piscicultura?

Denomina-se piscicultura o ramo do cultivo aquícola que se destina a criação de peixes e alevinos. A produção de pescados é dividida entre a pesca extrativa e a aquicultura. A pesca é a atividade que se baseia na retirada de recursos pesqueiros do ambiente natural, pode ser artesanal e industrial. A aquicultura é o cultivo, normalmente em um espaço confinado e controlado, de organismos aquáticos de interesse comercial, tais como peixes, crustáceos, moluscos, algas, répteis.

Com construção da Hidrelétrica de Tucuruí, em 1984, houve uma queda na quantidade de peixes na região das ilhas em função da impossibilidade da reprodução dos mesmos devido à barragem, mas também, por conta da pesca predatória. Visto que nas ilhas o peixe é a principal fonte de proteína animal, na Década de 80, a Prelazia de Cametá iniciou a implantação de tanques escavados para que as comunidades locais pudessem produzir algo, visando outra atividade além do extrativismo já prevendo os impactos ambientais da barragem de Tucuruí.

Em Cametá, os incentivos eram por meio de disponibilização de ração, material para escavar, técnicos para explicar como se fazia a criação. Porém, com o passar do tempo os incentivos diminuíram deixando vários tanques desativados. Em 2000, surgiu no município a Associação Paraense de Apoio às Comunidades Carentes (APACC) financiada pela União Europeia, já com o objetivo de trazer cursos de formação, fazendo experimentos com açaí, piscicultura, manejo da floresta (implantação de algumas espécies nativas em extinção), reativando e construindo mais tanques conseguindo catalogar mais de quatrocentos tanques ou viveiros de peixe na cidade.

O munícipio de Cametá, apesar de estar localizado na região do estado que mais produz pescado, não possui grandes criadouros, pois não há, nesse momento, nenhuma unidade de beneficiamento de pescado na região. Sua produção está concentrada na aquicultura familiar destinada ao consumo próprio e ao comércio local e em pequenas exportações para municípios vizinhos. A comercialização ocorre, principalmente, por meio de vendas individuais ou em associações de piscicultores e, ainda, em atividades de entretenimento e lazer como a prática do pesque e pague na qual o cliente pesca no tanque em que estão os peixes, e pode consumir (ou não) o pescado que adquire na pescaria.

Dentre as espécies de peixes criadas em cativeiro, destacam-se o tambaqui (figura 4) e a tilápia, como aqueles mais produzidos o que se deve a fatores como a adaptação dessas espécies à criação em cativeiro, a boa aceitação para o consumo familiar e para o comércio, o custo de produção e à qualidade do pescado produzido. Os peixes retratados na figura 4 têm entre 1 e 2 kg, mas a depender das condições de criação, como o tempo que o peixe permanece em cativeiro até o abate, um tambaqui adulto, criado em cativeiro em Cametá, pode chegar a até 5 kg.

Figura 4 – Tambaqui produzido em cativeiro

Fonte: Acervo dos autores.

Neste trabalho, nosso foco é a piscicultura de Cametá entendida como uma prática sociocultural que pode fornecer elementos a serem relacionados a matemática do Ensino Fundamental. Essa prática que já se faz presente na sociedade cametaense há algum tempo faz parte da cultura local, pois é uma das características pela qual as pessoas do lugar passaram a ser conhecidas.

A piscicultura como prática sociocultural

Práticas socioculturais podem ser entendidas como os saberes e fazeres de grupos sociais com uma cultura específica. São desenvolvidas na busca de soluções para problemas singulares que emergem na pluralidade das várias comunidades humanas. Elas contribuem para o enfrentamento de desafios que se apresentam para as sociedades e podem ser desenvolvidas segundo os interesses individuais e coletivos de acordo com as características culturais do lugar nas quais estão inseridas (FARIAS; MENDES, 2014).

Para Miguel e Mendes (2010, p. 383, tradução livre):

> [...] Uma Prática social é cultural porque mobiliza sempre objetos da cultura. Por outro lado, uma prática social é social porque, mesmo quando é realizada por uma única pessoa, é sempre ligada a atividades humanas desenvolvidas por comunidades socialmente organizadas.

Os saberes vindouros dessas práticas podem sugerir a reorganização de conteúdos mais criativos e interessantes para alunos de realidades sociais como a de Cametá. A escola deve se constituir considerando os diversos contextos socioculturais dos estudantes respeitando e relacionando esses contextos aos conhecimentos escolares. A piscicultura é uma prática sociocultural, pois é praticada por um grupo de pessoas e caracteriza esse grupo quando marca e lhe confere identidade. Essa prática contém elementos que podem ser relacionados aos temas de matemática abordados no Ensino Fundamental.

Dessa forma, as práticas socioculturais como a piscicultura podem fornecer elementos de ligação entre os seus conhecimentos e os conhecimentos matemáticos escolares. Para isso, tais práticas devem ser alvo de múltiplos olhares, por professores na busca de identificar elementos que poderão servir de subsídios aos professores na elaboração de suas atividades de ensino de matemática no Ensino Fundamental. Não podemos olhar as práticas socioculturais, apenas, como parte da identidade cultural de uma comunidade, como um saber estático, mas, como possibilidade de fomentar uma aprendizagem por meio da cultura.

> O olhar do professor, pesquisador para as atividades matematizantes pode oportunizar um exercício de um processo de apreensão cultural para aprender a olhar; aprender a pensar; aprender a imaginar; aprender a (re)criar; aprender (re)ver, e pensar a matemática como um veículo da criatividade humana (FARIAS; MENDES, 2014, p. 42).

Essa apreensão cultural, a que os autores se referem, seria a aprendizagem de uma matemática cultural que busca nas práticas socioculturais de uma comunidade elementos que contribuem para a compreensão, dos conteúdos matemáticos. Para isso, o aluno precisa ser conduzido pelo professor para que perceba por meio do olhar os elementos culturais que têm relação direta com os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental. Ou seja, o professor educa seu olhar para as práticas e seus artefatos e passa a educar o olhar de seus alunos.

Porém um ensino de matemática pautado no enfoque cultural requer que ela seja concebida como uma criação viva fruto dos esforços cognitivos de várias civilizações em compreender os fenômenos naturais e socioculturais, se desenvolver e conviver em sociedade. É preciso que se pense a matemática como uma herança cultural cuja busca por conexões entre práticas socioculturais e tópicos de matemática escolar, é uma forma de mantê-la viva, repassando-a a quem de direito, no nosso caso, os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Conforme as diretrizes presentes nos documentos curriculares oficiais para o ensino da matemática no Ensino Fundamental devem ser priorizados os contextos nos quais os estudantes estão inseridos, de modo a dar significado aos temas estudados. Dentre os diversos contextos o contexto sociocultural pode ser objeto de estudos que objetivem a busca por práticas que possam fornecer elementos a serem relacionados aos temas de matemática ensinados na Educação Básica, aqui especificamente, a prática sociocultural da piscicultura e os elementos que ela pode fornecer para o Ensino Fundamental.

No munícipio de Cametá a piscicultura tem como principal foco ser alternativa de trabalho, fonte de renda familiar e desenvolvimento social. A criação de peixes em cativeiro exige alguns saberes e técnicas especificas na produção dos meios necessários, manutenção dos equipamentos, da criação do peixe em si e do processo de captura do peixe e sua comercialização. Quando adentramos nesse contexto, é possível constatar que para ser um produtor é preciso obter conhecimento de áreas como: construção civil, biologia, matemática, dentre outras envolvidas em todo o processo.

Tudo começa na construção dos criadouros, no estudo do ambiente e da melhor alternativa de criação. Após a escolha é importante que se conheça o animal que está sendo criado, seu ciclo de vida, formato de corpo, hábitos ecológicos, hábitos alimentares, adaptação as variáveis hídricas e ambientais. Nossas idas ao campo em busca de informações se restringiu a zona urbana e zona rural de terra firme, pois não conseguimos nos deslocar até a região ribeirinha por termos dificuldades de acesso. Nas observações, realizadas durante a pesquisa de campo, foi possível identificar diferentes tipos de criação de em cativeiro, em decorrência do lugar onde se encontram: a zona urbana e a rural.

Na zona rural, as propriedades são de tamanho maior em relação a zona urbana e essa extensão maior de terra possibilita e criação em tanques considerados grandes para o contexto do município. A figura 05 retrata um tanque feito na zona rural em formato retangular que mede, aproximadamente, 8 x 16 metros de boca, ou seja, o retângulo feito na terra antes da escavação tem essas medidas aproximadas. Nesse caso, a escavação foi feita com o auxílio de uma máquina (uma retroescavadeira) por ter dimensões que dificultam a escavação manual, o que demandaria um gasto de tempo e energia humana muito grande.

Figura 5 – escavação de tanque para a criação de tambaqui

Fonte: Acervo dos autores

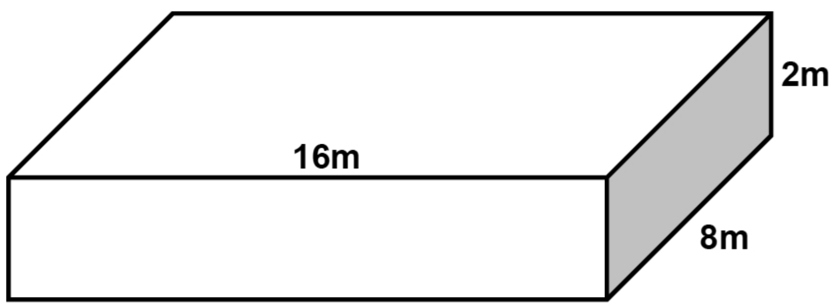
A imagem retrata, ainda, uma pessoa de pé dentro do tanque, segurando uma espécie de vara de madeira, colocada em posição vertical, e que é tomada como uma medida padronizada para determinar a profundidade do tanque, que nesse caso mediu aproximadamente 2 metros. O tanque tem superfície retangular, e em sua forma tridimensional remete a representação geométrica de um paralelepípedo retângulo, cujas arestas têm como medidas 8m de largura, 16m de comprimento e 2m de profundidade.

A partir dessa construção é possível estabelecer relações com a geometria plana e espacial abordada no ensino de matemática do Ensino Fundamental, pois o tanque em estudo remete a um caso particular de poliedro; um prisma que é o paralelepípedo retângulo, caracterizado como um sólido geométrico cujas faces superior, inferior e laterais são todas retangulares.

Sabemos que os objetos da matemática não são concretos como os objetos do mundo físico e que estão presentes somente no plano abstrato da nossa representação mental (simbólica). Por outro lado, alguns elementos dessa matemática são mobilizados e adaptados para o uso nas práticas socioculturais que, por esse motivo, podem apresentar similaridades com a matemática escolar, a exemplo dos objetos da geometria mobilizados na construção do tanque em estudo. Portanto, sabemos que o tanque para criação de tambaqui (em discussão) não é um paralelepípedo retângulo tal qual o da matemática, mas foi feito tendo esse sólido como princípio, inclusive a medida do seu volume, é feita pela utilização das dimensões aproximadas (8 x 16 x 2) e não pelas medidas reais do tanque, que não exatamente essas.

Assim, o tanque escavado na terra remete a um paralelepípedo retângulo como o da figura 06 cujas dimensões representam as do tanque. Seu volume pode ser calculado pelo produto das dimensões, ou seja, . Se for considerada somente a boca do tanque, podemos calcular a área do retângulo característico que tem dimensões 16 x 8 metros. Assim, teremos A definição desses valores é importante pelo fato de que se relacionam à quantidade de peixes que o tanque pode comportar.

Figura 6 – Paralelepípedo Retângulo



Fonte: Elaboração dos autores

O cálculo da quantidade de peixes em cada tanque pode ser feito de maneiras diferentes a depender de alguns fatores como: o tipo de cultivo implementado que pode ser intensivo, semi-intensivo, superintensivo; do tipo de criadouro, dentre os quais o tanque escavado na terra, tanque de concreto, tanque feito com um tipo de tela ou caixa d'água; a espécie de peixe a ser cultivada e; o período de crescimento do peixe. Diante desses fatores, pode ser considerada a área do tanque ou o seu volume, da forma como foram calculados anteriormente. Essa quantidade de peixes por tanque, é chamada densidade de estocagem que para a espécie tambaqui, são recomendados os valores do Quadro 1.

Quadro 1 – Densidade de estocagem do tambaqui

Sistema	Recria (78g a 298g)	Engorda (> 298g a 1,0kg)	Engorda (> 1,5kg)
Semi-intensivo (peixes/m^2)	3 - 10	0,3 - 1	0,4
Intensivo (peixes/m^3)	74 - 300	20 - 75	------

Fonte: Correa, Souza e Martins Jr. (2018).

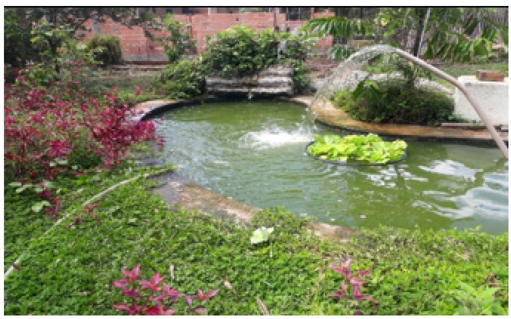
Levando-se em consideração o tanque em estudo, e o *sistema semi-intensivo* no qual se considera a área do tanque (128m^2), teríamos as seguintes densidades de estocagem (D_e). Na fase da recria teríamos: $D_e = 128 \times 3 = 384$ ou $D_e = 128 \times 10 = 1280$. Assim, a densidade de estocagem na fase da recria seria de 384 a 1280 peixes; na primeira engorda teríamos $D_e = 128 \times 0,4 = 51,2$, ou seja, a densidade de estocagem na primeira engorda iria variar de 38 a 128 peixes; já na outra fase de engorda teríamos $D_e = 128 \times 0,4 = 51,2$ que, arredondados, resultariam em 51 peixes acima de 1,5kg nesse tanque.

Ainda considerando o tanque referido anteriormente e o *sistema intensivo* no qual se considera o volume do tanque (256m^3), teríamos as seguintes densidades de estocagem (D_e). Na fase da recria teríamos: $D_e = 256 \times 74 = 18.944$ ou $D_e = 256 \times 300 = 76.800$. Assim, a densidade de estocagem na fase da recria seria de 18.944 a 76.800 peixes no tanque; na primeira engorda teríamos $D_e = 256 \times 20 = 5.120$ ou $D_e = 256 \times 75 = 19.200$, ou seja, a densidade de estocagem na primeira engorda iria variar de 5.120 a 19.200 peixes; já na outra fase de engorda, com peixes acima de 1,5 kg o quadro não prevê valores.

Para um cálculo aproximado da produção (p) desse tanque no sistema semi-intensivo para peixes de até 1,5 teríamos algo entre 57kg e 192kg. Já no sistema intensivo, considerando peixes de até 1,5kg, teríamos uma produção variando de 7.680kg a 28.800kg, pois: $p = 5.120 \times 1,5 = 7.680$ ou $p = 19.200 \times 1,5 = 28.800$. A diferença de produção é elevada entre os sistemas de cultivo, mas os custos com a criação também se elevam do sistema semi-intensivo para o intensivo.

Na zona urbana, como já se sabe, há uma maior aglomeração de casas e pessoas, em decorrência disso, os terrenos dessas casas são de tamanho reduzido. Mesmo com essa restrição, há criações em tanques feitos de concreto que se adaptam ao tamanho do terreno e as condições do espaço, como retratado na Figura 07. Esse tanque tem formato curvo e lembra uma piscina, além disso, percebe-se que há uma preocupação em ornar as laterais do tanque com plantas e até o seu interior com um tipo de vegetação flutuante. Esses tanques possuem um sistema de filtragem e reposição de água, que o diferem do tanque em estudo anteriormente.

Figura 7 – Tanque de concreto na zona urbana



Fonte: Acervo dos autores

Há, ainda, a criação em recipientes industrializados como caixas d'água de tamanho diversos como retratado na Figura 8. Mas é preciso que se verifique a quantidade de estocagem para esse tipo de recipiente que difere daquela para os tanques escavados na terra.

Figura 8 – Criação de peixe em caixa d'água

Fonte: Acervo dos autores

Para que se obtenha sucesso na produção é primordial que se conheça os diferentes modos de criação de peixes e as possibilidades de se obter lucro, afinal nenhum trabalho pode ser desperdiçado, cálculos de custo de transporte, construção do tanque, força de trabalho, manutenção de criadouros, preços de ração, acondicionamento de produto e preço no mercado de vendas são fatores preponderantes nesse contexto.

Todos esses fatores demandam alguns conhecimentos dentre os quais destacamos os conhecimentos de matemática, principalmente, os geométricos e aritméticos que são indispensáveis para quem desenvolve a prática sociocultural da piscicultura. Diante disso o que defendemos neste trabalho é que os conhecimentos sobre geometria e aritmética demandados na prática em discussão poderão ser relacionados aqueles de geometria e aritmética ensinados no Ensino Fundamental, ou seja, a prática sociocultural da piscicultura poderá ser olhada pelo professor de matemática e discutida em sala de aula com os alunos de modo a evidenciar seus aspectos matemáticos em conexão com os temas de matemática do Ensino Fundamental.

A piscicultura e a matemática do Ensino Fundamental

Dentre as diversas áreas necessárias para o desenvolvimento da piscicultura uma das essenciais é a matemática, uma vez que será utilizada desde a construção dos tanques até o cálculo final do preço do pescado, passando ainda pelos modelos numéricos de crescimento do animal, cálculo de quantidade de ração, quantidade de organismos que podem viver em cada local. Temas de matemática como de proporção, regra de três, unidades de medidas (transformação e conversão de medidas), figuras geométricas, média aritmética, área de superfícies planas, e cálculo de volume, sólidos geométricos, são alguns exemplos de conteúdos presentes em nas etapas da produção.

Como exemplo temos o cálculo de povoamento dos viveiros, que influencia diretamente na saúde do animal, esse tipo de avaliação é feita por meio do peso final, com o qual determinamos a quantidade de peixes em uma determinada fase do ciclo de criação.

Isso pode ser feito por meio da relação: Nº peixes = Biomassa final /Peso final, em que o número final de peixes leva em consideração estudos prévios de taxa de sobrevivência de alevinos.

Uma maneira de calcular a biomassa final é fazer a pergunta: Qual a quantidade em quilos de peixes dentro do tanque? A partir daí tira-se uma amostra dos dados como ilustrado no quadro 2, a seguir, supondo um total de 2475 peixes dentro de um tanque.

Quadro 2 – Cálculo de Biomassa final

Coleta	Nº de peixes	Peso balde c/ peixes	Peso do balde	Peso final
01	6	2,65 kg	0,2 kg	2,45 kg
02	8	2,76 kg	0,2 kg	2,56 kg
03	7	2,58 kg	0,2 kg	2,38 kg
Total:	21	7,99 kg	0,2 kg	7,39 kg

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Correa, Souza e Martins Jr. (2018).

Assim, precisa-se fazer a média aritmética do peso final para que tenhamos o valor do peso médio. Na amostra onde obteve-se 21 peixes, o peso médio dá-se por:

Peso Médio = Peso final/ nº peixes da coleta
Peso final = 7,39*kg*
Nº de peixes da coleta = 21
Portanto, substituindo os valores temos:
Peso Médio = 7,39/21 = 0,351 *kg.*

Assim, cada peixe que está no tanque nesse momento da produção tem em média, 0,351kg que pode ser convertido para gramas se for multiplicado por 1000 e irá equivaler a 351g. Como existe a possibilidade de perda ou morte de alevinos por condições naturais ou por não adaptação no tanque, é preciso que se tenha feio um estudo prévio sobre isso. Neste exemplo supomos que essa perda tenha sido de 75 peixes do total inicial dado. Assim, teremos:

Quantidade de peixes = 2475, Perda = 75, 2475 – 75 = 2400. Sendo assim, temos agora um total de peixes igual a 2400 e o peso médio igual a 0,351 kg. Fazendo uso desses valores calculamos a biomassa.

Biomassa = *Quantidade de peixes* × *Peso médio*
Biomassa = 2400 × 0,351
Biomassa = 842,40kg.

Dessa forma, concluímos que a quantidade de quilogramas de peixe dentro do tanque, nessa fase ou etapa de criação, é de 842,40kg, aproximadamente. Esse dado é importante para o criador para que ele tenha parâmetros sobre os custos que teve até esse momento e a produção que está obtendo a partir desses gastos. Isso pode ajudá-lo a manter as estratégias que está adotando com relação a quantidade e tipo de ração, por exemplo, ou a mudá-la para que os peixes possam ganhar mais massa até o final da etapa de criação.

Outra forma de calcular a biomassa é considerar o volume do tanque, como já mencionamos anteriormente. Considerando um tanque retangular com dimensões 5m x 10m x 5m, com filtro, circuito fechado, temos que seu volume é v = 5 × 10 × 5 = 250 m^3. Vamos considerar que a densidade de estocagem máxima para essa espécie é de 10kg por metro cúbico (10kg/m^3), tomando a quantidade de alevinos de tilápia (utilizando o valor para o peso médio de 600 gramas (0,06kg).capacidade de suporte em volume útil é expressa em kg/m^3. Onde um tanque atinge a capacidade máxima quando os peixes param de crescer. A biomassa do tanque será:

Biomassa = 10kg/m^3 x 250m^3 = 2500kg por tanque com essas dimensões.

Nessa determinação podemos observar a utilização de operações básicas em matemática que como soma, subtração, multiplicação e divisão, unidades de medida e cálculo de volume do paralelepípedo retângulo. Além desses temas a prática de piscicultura vai usar noções de matemática financeira e para exemplificar esse uso propomos uma situação em que o produtor calcula o possível lucro obtido. O lucro pode ser calculado pela relação *Lucro = receita total – custos da produção* e a receita total pode ser determinada por *Biomassa final* (*kg*) *x Preço de venda* (*R$/kg*).

Suponha que um piscicultor gastou com ração, construção de tanque, compra de filtros e de 750 alevinos um total R$ 6.000,00. Conseguiu produzir 500 peixes com peso médio de 1,5kg o que irá resultar em uma biomassa total de 750kg. Suponha que ele e obteve um preço de venda de R$12,00 por quilograma de peixe. O piscicultor obteve lucro ou prejuízo? De quanto foi o lucro ou o prejuízo?

Receita total = Biomassa final x preço de venda = 750 *x* 12 = 9000
Lucro = receita total – custos da produção
Lucro = 9000 – 6000 = 3000.

Portanto, nessa suposta situação, o piscicultor obteve um lucro de R$ 3.000,00. Esse cálculo é de suma importância para que o piscicultor possa mensurar se todo o seu investimento, seja financeiro ou força de trabalho, terá uma rentabilidade aceitável, ou seja, ele poderá obter respostas para a questão: valeu à pena todo o investimento financeiro que fiz e todo o trabalho que empreguei nessa produção?

Outra forma de se planejar o lucro é a partir da Biomassa econômica (BE), pois a partir dela pode se decidir pela necessidade de alterações nas estratégias de produção. Para cada fase (alevino, juvenil e engorda) se tem uma biomassa econômica adequada refletida pelo maior ganho de peso e maior lucro naquela fase. Com isso, o maior rendimento, em conversão alimentar ajusta a quantidade de peso ideal para ganhar peso dentro de cada tanque. Observe o Quadro 3 que apresenta a relação entre as biomassas econômicas da tilápia e do tambaqui.

Quadro 3 – Relação entre as biomassas econômicas da tilápia e do tambaqui

BE: Tilápia	40 a 50m³	Mesmo tanque Mesma estratégia, mesma oxigenação.
BE: Tambaqui	30m³	Mesmo tanque Mesma estratégia, mesma oxigenação.

Fonte: Elaboração dos autores

Cada espécie possui a sua biomassa econômica ideal onde se tem o máximo de ganho e lucro possível. Deve ser determinada continuamente e reavaliada dentro de cada empreendimento, seja ele de base familiar ou de grande escala. Outro fator importante para estocagem e lucro é a Densidade de Estocagem (DE) que é dada por:

Densidade econômica = Biomassa econômica (*kg/m³*)*/peso médio final de peixes* (*kg*)
Densidade econômica = peixe/m³
Densidade econômica = 10*kg/*0,06 = 167 *peixes/m³.*

Os cálculos acima foram fornecidos pelos manuais de piscicultura familiar da Embrapa através deles podemos observar que a matemática básica pode ser aplicada nas diversas áreas da nossa sociedade.

Outro manual de suporte da piscicultura familiar é o Livro Tecendo Saberes produzido na cidade de Cametá por agricultores(as) envolvidos(as) no projeto de criação de peixes em cativeiro da APAAC realizado em 2007. Esse livro nos orienta de forma tradicional e simples sobre a piscicultura familiar especificamente aplicada na cidade de Cametá.

No livro Tecendo Saberes – Piscicultura Familiar, tem-se que para uma boa produção de peixes deve-se ter uma boa construção do tanque, uma boa alimentação (Adubo, ração alternativa, frutas, restos de comida), bom manejo do peixe e da água e saber transportar os alevinos.

Dentre os elementos, que compõem a prática sociocultural da piscicultura, identificados até aqui, destacamos os cálculos de: *densidade de estocagem, biomassa Final, lucro, e biomassa econômica*. Tais elementos mobilizam alguns saberes de matemática dentre os quais destacamos alguns sobre geometria e aritmética. No campo da geometria os saberes mobilizados se relacionam a figuras geométricas planas, medição de área de figuras geométricas planas, sólidos geométricos e medição de volumes de sólidos geométricos. No campo da aritmética temos: operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, resolução de problemas envolvendo essas operações, expressões numéricas e noções de matemática financeira.

Esses saberes de geometria e aritmética podem ser relacionados aos temas de geometria e aritmética que são ensinados na Escola no Ensino Fundamental, pois os documentos curriculares oficiais sobre o ensino de matemática e os Livros didáticos de matemática desse Nível, preveem o ensino de tais temas. Para melhor explicitar o que queremos dizer elaboramos o quadro 4, a partir de Brasil (2018), no qual há uma síntese dos temas de geometria e aritmética a serem ensinados nos nove anos do Ensino Fundamental.

O referido quadro evidencia temas que se relacionam diretamente com os conhecimentos geométricos e aritméticos mobilizados pelos piscicultores na prática sociocultural discutida. Os temas de geometria, medição de área e volume se relacionam à determinação da densidade de estocagem, ou seja, estão relacionados ao cálculo da capacidade de cada tanque em relação ao número de peixes em cada fase de criação. Esses temas também se relacionam ao cálculo da densidade econômica que relaciona área ou volume com valores monetários de custo e lucro do pescado.

Quadro 4 – Temas de matemática por ano do Ensino Fundamental

Ano	**Geometria**	**Aritmética**
1º	Figuras geométricas planas e espaciais: reconhecimento e relações com objetos do mundo físico; reconhecimento do formato das faces de figuras espaciais	Construção de fatos básicos da adição
2º	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera). Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo)	Construção de fatos básicos da adição e subtração; Problemas sobre adição e subtração
3º	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera); Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo)	Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades
4º	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): representações, planificações e características	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão

5º	Figuras geométricas planas e espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características	Medidas de comprimento, massa e capacidade usuais e convencionais
6º	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais
7º	Medição de área de figuras planas	Problemas envolvendo medições
8º	Medição de área de figuras planas	----
9º	Determinação do volume de prismas e cilindros	----

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Brasil (2018).

Os temas de aritmética, são mobilizados em todo o processo de produção do peixe em cativeiro. Qualquer cálculo ou medição a ser feita irá necessitar da utilização de números e das operações básicas aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Desde a escavação do terreno ou da compra de viveiros ou caixas d'água para estocagem do peixe, compra de alevinos, compra de ração, cálculo do número de dias necessários para o abate, cálculo do custo e do lucro e etc. todos esses procedimentos que envolvem a piscicultura, se relacionam aos temas de aritmética que estão previstos para serem ensinados no Ensino Fundamental.

Mas como essa relação pode ser estabelecida? Como os conhecimentos matemáticos mobilizados na piscicultura podem ser relacionados aos temas de matemática do Ensino Fundamental? Uma possibilidade é a problematização desses saberes para o ensino de matemática, ou seja, a elaboração de múltiplos questionamentos sobre a piscicultura que possam fazer emergir os temas de matemática que se pretende ensinar no Ensino Fundamental. Outra possibilidade é a elaboração de pequenos projetos sobre a prática da piscicultura que poderão ser desenvolvidos pelo professor de matemática com a participação dos alunos. Nesse projeto os alunos teriam a possibilidade de conhecer a prática da piscicultura e serem conduzidos pelo professor a estabelecer relações da piscicultura com os temas da matemática do Ensino Fundamental.

Considerações finais

É de suma relevância que o professor consiga perceber as possibilidades de ensino mais adequados para seus alunos de acordo com seu contexto para, assim possibilitar ambientes mais interativos de ensino e aprendizagem. No entanto, várias pesquisas mostram que ainda são poucos os professores que conseguem fazer uma docência mais ativa, ajudando os alunos a serem mais autônomos em seu processo de aprendizagem.

O estudante precisa de uma mediação mais presente e eficiente em sala de aula, pois o que os alunos precisam é obter formações conceituais, procedimentais e atitudinais indispensáveis para que contribuam efetivamente na formação cidadã, visto que através da educação o indivíduo consegue conquistar sua autonomia e inclusão social, ajudando em competências e habilidades que facilitam entender a natureza, cultura e a vida.

Assim, ressalto que este trabalho além de apresentar recursos para ser usado em sala com os alunos, poderá servir também como base para formação de professores uma vez que ainda há muito o que ser explorado sobre o tema e concomitantemente possui informação o suficiente para que graduandos ou docentes possam usá-lo como base para pesquisa, estudo e elaboração de atividades de ensino.

Pretendemos dar continuidade a este trabalho futuramente, aprofundando o tema devido sua amplitude e relevância para o ensino de matemática. Esperamos contribuir com a formação de todos aqueles que lerem este texto, objetivando que pensem e repensarem sua prática docente objetivando sua inovação, complementação e/ou ressignificação. De forma pontual esperamos atingir os professores de matemática do Ensino Fundamental com nossas ideias sobre as possíveis relações a serem estabelecidas entre as pratica socioculturais e o ensino de matemática no Ensino Fundamental.

Referências

ALMEIDA, R. *Amazônia, Pará e o mundo das águas do Baixo Tocantins*. Revista Estudos Avançados, São Paulo, v. 24, n. 68, p. 291-319, 2010.

ALVES, R. X. et al. *Tecendo Saberes: Agricultura Familiar com princípios agroecológicos na Amazônia paraense*. Cametá, PA: Graphitte, 2007.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRABO, M. F. *Piscicultura no Estado do Pará:* situação atual e perspectivas. Actapesca, Aracaju, v. 2, n. 1, p. 1-7, 2014.

COSTA, G. S. *Desenvolvimento rural sustentável com base no paradigma da agroecologia*. Belém: NAEA/UFPA, 2006.

CORREA, R. O.; SOUZA, A. R. B.; MARTINS JR., H. *Criação de tambaquis*. Brasília, DF: Embrapa, 2018.

FANTIN, J. T. Projeto Rondon: extensão universitária e Agenda na Amazônia. *Revista Interações*, Campo Grande, v. 12, n. 1 p. 115-124, 2011.

FARIAS, C. A.; MENDES, I. A. (org.). *Práticas socioculturais e educação matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. p. 335-365. (Coleção Contextos da Ciência)

KUBITZA, F.; LOVSHIN, L. L.; ONO, E. A.; SAMPAIO, A. V. *Planejamento da produção de peixes*. 3. ed. Jundiaí, SP: F. Kubitza, 1999.

MARTINS, J. P. *Ensino de Simetria por meio de problematização sociocultural*. 2017. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. *ZDM Mathematics education,* v. 42, p. 381-392, 2010.

ONO, E. A.; KUBITZA, F. *Cultivo de peixes em tanques-rede*. 3. ed. Jundiaí, SP: E. A. Ono, 2003.

SILVA, F. C. da; SILVA, L. J. M. da. *História regional e participação social nas mesorregiões paraenses*. [s.l.]: Virtual Paper, 2008. Disponível em: http://www.ufpa.br/naea/papers.php?mvitem=3.

Estratégia comunicativa visual no ensino de Matemática para aluno surdo

Layana Barros Sousa

Fabio Colins

Resumo

A presente pesquisa tem por objetivo analisar o uso de estratégia comunicativa visual como alternativa no ensino de matemática para aluno surdo na perspectiva da inclusão. Desse modo, a metodologia utilizada buscou abordar a Reta Numérica numa perspectiva visual e autoexplicativa no processo de ensino e aprendizagem de um aluno surdo. A discussão teórica está centrada nos estudos sobre a educação de pessoas Surdas e, principalmente, sobre o ensino da matemática na perspectiva inclusiva. A pesquisa assumiu uma abordagem qualitativa do tipo participativa, ou seja, um estudo em que a pesquisadora se envolveu diretamente com o participante da investigação no ambiente de sala de aula. O processo de observação foi realizado diretamente em sala de aula do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de Oeiras-PA. O participante da pesquisa foi um aluno Surdo incluído na educação regular e que não tinha proficiência da Língua Brasileira de Sinais. O material empírico foi construído a partir de registros da observação participante e de resolução de atividades feitas no caderno do aluno. Os resultados e discussões indicaram que a utilização de estratégia visual é de suma importância para o ensino e aprendizado do aluno Surdo investigado, pois foi a partir do sentido sensorial visual que o aluno conseguiu construir conceitos numéricos na Reta Numérica e, consequentemente, melhorar seu rendimento nas aulas de matemática.

Palavras-chave

Estratégia Visual. Inclusão. Ensino de Matemática. Surdo. Reta Numérica.

Introdução

Com a implementação da modalidade de educação inclusiva na educação básica, surgiram inúmeros desafios para os profissionais da educação, sendo uma delas a dificuldade de interagir e de comunicar-se com alunos Surdos. E no âmbito do ensino de matemática as dificuldades são ainda maiores para o professor de matemática, pois há a necessidade de formação continuada em serviço para esses profissionais. Com isso, faz-se necessário que haja mudanças metodológicas, curriculares e de elaboração do planejamento das aulas de matemática.

Dessa forma, Frias (2008, p. 13) discute sobre "incluir pessoas com necessidades educacionais especiais na escola regular pressupõe uma grande reforma no sistema educacional". Essas mudanças implicam em flexibilização curricular, avaliação da aprendizagem e, principalmente, estratégias metodológicas que considerem à diversidade de alunos com deficiências. Portanto, ao refletir acerca do ensino de matemática para alunos Surdos surgem os seguintes questionamentos: *Como ensinar matemática para alunos Surdos se não possuem a habilidade de oralizar? Como comunicar a aula de matemática diante de uma limitação de sinais em Libras* (*Língua brasileira de sinais*)*? Como ensinar matemática a um aluno Surdo se nem aluno e nem professor dominam a Libras?*

Esses questionamentos mobilizaram o interesse por esse tema de pesquisa. Nesse contexto, esta pesquisa teve como objetivo analisar o uso de estratégia comunicativa visual como alternativa no ensino de matemática para aluno surdo na perspectiva da inclusão. A escolha da temática se deu a partir de experiências vividas durante os estágios de docência e os projetos de extensão.

Os fundamentos teórico-metodológicos da pesquisa foram ancorados em uma abordagem qualitativa e do tipo participativa (OLIVEIRA, 2014), pois a pesquisa se envolveu diretamente como participante da investigação no ambiente de sala de aula. O contexto foi uma escola da rede pública municipal de Oeiras-PA. Participou da pesquisa um aluno Surdo de uma turma do 3º ano do Ensino Fundamental. As informações foram construídas por meio de observações diretas realizadas durante o desenvolvimento das aulas de matemática. Além disso, os registros de atividades feitas no caderno do aluno também foram suporte para as análises. O método de tratamento das informações foi a *Análise de Conteúdo* (BARDIN, 2016).

Os resultados da pesquisa mostraram a importância de explorar nas aulas de matemática estratégias e recursos metodológicos visuais na perspectiva de comunicar os conceitos e procedimentos matemáticos.

Educação de Surdos

Ao discutimos sobre a educação de surdos nos remetemos a uma trajetória histórica, sociocultural, de movimentos surdos, de direitos cívicos e, principalmente, de questões linguísticas.

A educação de surdos se correlacionada desde questão médica patológica oralista às conquistas dos seus direitos. No início, os surdos eram considerados indigentes por sua forma de interagir e sua educação era baseada no modelo clínico oralista, pois se acreditava que esses sujeitos eram capazes de falar. Assim, o ambiente escolar para surdos se parecia mais um espaço de reabilitação do que um espaço socioeducacional (PERLIN & STROBEL, 2006).

A vertente oralista foi fortemente marcada pela sua presença na educação das pessoas surdas, principalmente após o congresso de Milão em 1880 que buscou legitimar oficialmente a linguagem oral no processo de ensino e aprendizagem de surdos e suprimir a linguagem gestual. Foram muitas as lutas para que esses sujeitos fossem reconhecidos como intelectualmente capazes.

Segundo Fernandes (2007, p. 41), "os alunos Surdos foram proibidos de usar sua língua potencial e obrigados a aprender a falar, independentemente de suas possibilidades para alcançar êxito nessa tarefa". Nesse sentido, os professores Surdos também foram proibidos a lecionar, sob o pressuposto de que professores ouvintes seriam o modelo ideal para a vertente oralista.

A prática do oralismo como reabilitação da fala (oralização) não obteve muito sucesso. Devido isso, a vertente fundamentada na ideologia da comunicação total surgiu como uma forma de substituição ao fracasso do oralismo, da qual ressalta Honora (2014) ao afirmar que a Comunicação Total é a prática de usar sinais, leitura orofacial, amplificação e alfabeto digital para fornecer *inputs* linguísticos para estudantes surdos, ao passo que eles podem expressar-se nas modalidades preferidas.

Para Honora (2014, p. 92), a abordagem linguística da Comunicação Total considerava todas as formas possíveis de comunicação, "liberando uso da Língua Brasileira de Sinais, português sinalizado, uso de alfabeto manual, forma de amplificação sonora individual e coletiva, permissão de mímicas, leitura labial etc.".

Desse modo, percebe-se que essa abordagem comunicativa não tinha uma estrutura linguística e comunicacional específica, pois possibilitava toda e qualquer forma de comunicação possível, porém, não tendo proporcionado o desenvolvimento educacional esperado para as pessoas surdas, também caiu em desuso e foi extinto, da maioria das escolas brasileiras, a partir do ano de 2000.

Honora (2014) associa às atribuições que levaram ao fracasso a abordagem da Comunicação Total: "a falta de inserção na Comunidade Surda, da Identidade Surda e do uso adequado da Língua Brasileira de Sinais, como forma efetiva de comunicação das pessoas Surdas" (HONORA, 2014, p. 93).

A comunicação total também negava, de certo modo, a natureza linguística das pessoas surdas. Por isso, em uma das escolas de surdos no Brasil, conhecida atualmente como Instituto Nacional de Educação de Surdos (INES), surgiu a vertente do bilinguismo, na qual se refere ao ensino de duas línguas, a Libras (língua natural do surdo ou L1) e a Língua Portuguesa (língua materna da comunidade ouvinte ou L2 para os surdos).

Nesse sentido, Santos (2013, p. 36) afirma que:

> O bilinguismo nada mais é que a aceitação e a convivência com a diferença, procurando aproximar e facilitar a comunicação entre a criança surda e a família ouvinte, sendo essas famílias na sua maioria ouvintes, o que torna essencial o envolvimento das mesmas na aprendizagem da língua de sinais. O bilinguismo aumenta as capacidades cognitivas e linguísticas do surdo, possibilitando melhores resultados educacionais que os conseguidos sob priorização da língua na modalidade oral.

No entanto, as escolas regulares não adotam essa perspectiva linguística na educação das pessoas surdas. Os professores não procuram comunicar suas aulas em Libras ou as secretarias de educação não oferecem, suficientemente, profissionais intérpretes e tradutores de Libras. Isso dificulta ainda mais, por exemplo, as aulas de matemática.

Nesse contexto, a disciplina de matemática torna-se ainda mais distante dos alunos. A matemática tem uma linguagem própria que precisa ser comunicada aos alunos com clareza e compreensão. No caso dos alunos surdos, o ideal seria comunicar a aula em Libras e explorar os recursos visuais. Ao utilizar essas estratégias, os professores possibilitam aos alunos ter acesso ao conteúdo explorado em sala de aula, torna a aula mais inclusiva. E dessa forma, ajuda a romper com mitos de que o aluno surdo tem comprometimento cognitivo devido a limitação comunicativa de seus professores.

O aluno surdo é um sujeito com potencial para aprender, mas que apresenta dificuldades por não conseguirem comunicar as aulas, não por ser uma pessoa com deficiência. Sobre isso, Arroio et al (2016, p. 251) destacam que:

> para falar do ensino de Matemática para o aluno surdo, é necessário salientar que o surdo não é deficiente, e sim uma pessoa que interage com o mundo de forma diferente da dos ouvintes. Em função desta diferença, apresenta expressão e cultura próprias, se relacionando mais com estruturas visuais, imagéticas, que com estruturas da língua escrita.

Nessa direção, pode-se afirmar que o surdo tem capacidade e potencialidades para aprender matemática, desde que o professor explore aspectos visuais nas suas aulas. Usar mapas mentais ou mapas conceituais é uma forma de facilitar a aprendizagem desses alunos. Independentemente da metodologia utilizada pelo professor, a linguagem matemática precisa ser acessível aos alunos, mas não se tornar uma barreira para a aprendizagem. Borges e Nogueira (2012) afirmam que apesar de a Matemática possuir uma linguagem própria, com termos que não são diretamente traduzidos em sinais específicos de Libras (logaritmos, matrizes, funções etc.), o professor precisa criar contexto de comunicação para facilitar a compreensão dos alunos surdos.

Diante dessa necessidade linguística, surgem as barreiras comunicativas, entre elas a falta de profissionais preparados para dar suporte aos professores e alunos durante as aulas. Desse modo, Bertoli (2012, p. 2) destaca a:

> [...] necessidade de profissionais competentes e capacitados para trabalhar com alunos surdos é muito grande, porém, faltam profissionais para tal. A inclusão social deve ser respeitada e o professor deve estar preparado para enfrentar estes desafios, podendo começar com a busca de formação na sua área específica.

Conforme Bertoli (2012), ao receber esses alunos o professor deve estar apoiado em um tripé educacional composto por língua de sinais, conhecimento matemático e uma metodologia apropriada, tornando assim o processo de ensino e aprendizagem da matemática mais significativa. Para Alberton (2015, p. 52)

> O professor de matemática, para atuar com alunos surdos, precisa de conhecimento sólido tanto da disciplina que vai ensinar como da língua e da cultura surda. A partir da Língua Brasileira de sinais, os conteúdos poderão ser ensinados, mostrando fatos e informações da atualidade, relacionando-os com os temas da aula. Nessa interação entre as duas línguas, o aluno surdo sente-se motivado a descobrir outros conhecimentos, interessando-se por tudo aquilo que o cerca: o mundo, as pessoas, os acontecimentos.

Essas reflexões mostram que o professor precisa estar preparado para enfrentar os desafios da inclusão escolar. Assim, redimensionar suas práticas para uma Educação Matemática humana e inclusiva, que contemple a diversidade sociocultural e linguística na sala de aula. No contexto dos alunos surdos, buscar por ferramentas que explorem a comunicação visual dos conceitos e propriedades matemáticas.

Para Fernandes (2007, p. 123), "desenhos, ilustrações e fotografias auxiliam no esclarecimento de temas abordados em sala ou como pistas na leitura de textos". Desse modo, toda pista visual pictográfica enriquece o conteúdo e é um recurso que contribui para a memória visual dos alunos. Nas aulas de matemática essa é uma estratégia que pode ser bastante explorada em diversos conteúdos do currículo. No ensino de geometria, por exemplo, muitos conceitos e propriedades podem ser explorados por meio de recursos visuais.

E na educação de surdo, a Educação Matemática inclusiva também precisa ser pensada sob a ótica das singularidades comunicativas e linguísticas das pessoas surdas na perspectiva de possibilitar a igualdade de oportunidades educativas. Então, quando o professor de matemática organiza uma aula com elementos visuais e de fácil compreensão, ele está oferecendo caminhos para a aprendizagem de pessoas surdas, além dos ouvintes que são mais visuais.

Sobre essa prática docente, Almeida et al (2007, p. 41) destacam que o:

> [...] elemento visual configura-se como um dos principais facilitadores do desenvolvimento da aprendizagem do Surdo. As estratégias metodológicas utilizadas na educação da criança Surda devem necessariamente privilegiar os recursos visuais como um meio facilitador do pensamento, da criatividade e da linguagem gestual, oral e escrita destas crianças, possibilitando a evolução das funções simbólicas como: jogo, imitação, imagens interiores e externalização dos mesmos através de representações visuais.

O autor dar ênfase a ideia de que a experiência visual é de suma importância para que os alunos surdos tenham sucesso no processo de ensino e aprendizagem. Entre as ferramentas didáticas visuais, podem-se destacar os materiais manipuláveis como recursos potencialmente significativos, entre eles destacam-se o ábaco, o material dourado, a reta numérica etc.

A produção de cartazes ilustrativos também são estratégias visuais que podem facilitar a comunicação da linguagem matemática aos surdos, mesmo que o professor não domine Libras e o aluno não disponha de um intérprete. Mesmo que a realidade de muitas escolas brasileiras seja a de que os professores não dispunham de variados recursos didáticos, há a possibilidade de criar ferramentas e estratégias que facilitem o processo de ensino e aprendizagem da matemática para os alunos surdos, conforme foi realizado nesta pesquisa.

Na próxima parte do texto serão apresentados os fundamentos teórico-metodológicos da pesquisa, o seu desenvolvimento em sala de aula e os materiais utilizados para a comunicação dos conceitos e das propriedades matemáticas ao aluno surdo.

Metodologia da Pesquisa

Esta pesquisa, que teve como objetivo analisar o uso de estratégia comunicativa visual como alternativa no ensino de matemática para aluno surdo na perspectiva da inclusão, assumiu uma abordagem de natureza qualitativa e do tipo participante (OLIVEIRA, 2014). Nesse sentido, para a construção do conhecimento sobre o ensino de matemática para alunos surdos foi necessário que os pesquisadores assumem uma atitude de aprendizagem no sentido de buscar novos conhecimentos, explicações e fundamentos para as dúvidas inerentes ao ato de pesquisar. No desenvolvimento deste estudo ocorreu a participação direta da pesquisadora com o contexto de investigação (sala de aula) e com o sujeito da investigação (aluno surdo).

O contexto foi uma escola de rede pública municipal de Oeiras-PA. A pesquisa foi desenvolvida em uma instituição escolar da rede municipal de ensino em uma turma do 3º ano do Ensino Fundamental. O participante foi um aluno surdo com 8 anos de idade. Seu laudo médico indicou surdez total e a necessidade de profissional para acompanhá-lo no desenvolvimento das atividades escolares. Esse aluno não dominava a Libras e não tinha intérprete e professor de Libras. Outra problemática observada foi o não atendimento educacional especializado. Portanto, esses fatores implicavam para a não aprendizagem dos conteúdos abordados em sala de aula.

A observação direta em sala de aula e os registros das atividades realizadas no caderno do aluno possibilitaram construir as informações necessárias que atendessem ao objetivo da pesquisa. Esta pesquisa foi realizada no segundo semestre de 2019 e teve duração de quatro meses.

O tratamento dado às informações construídas foi realizado conforme o método de Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016).

Nesse sentido, o material empírico passou por um processo de pré-análise que consistiu na seleção dos materiais que atendessem ao objetivo da pesquisa, em seguida, ocorreu a fase da exploração do material no intuito de identificar os aspectos comuns que emergiram das observações e dos registros das atividades do caderno do aluno e, por fim, deu-se o processo de interpretação, segundo a teoria discutida no trabalho, do conteúdo produzido pela pesquisa.

Desse modo, dois aspectos destacaram-se no processo de triangulação das informações construídas: a ausência da Língua Brasileira de Sinais no processo de ensino e aprendizagem; e estratégia visual comunicativa na aula de matemática. Para fins de análise, a pesquisa destacou, além de observações mais gerais, uma experiência de sala de aula com a reta numérica, conforme se dará na próxima parte do texto.

A ausência da Língua Brasileira de Sinais no processo de ensino e aprendizagem

A forma como o professor organiza o ensino pode ser determinante para o processo de aprendizagem do aluno, principalmente se ele for surdo. As orientações curriculares indicam que a aprendizagem do aluno surdo na escola deveria acontecer por meio de sua língua materna (Libras), no entanto, as observações realizadas em sala de aula mostraram que o aluno não tinha de professor de Libras, nem intérprete e, principalmente, sua professora não tinha conhecimento de Libras. Esse fator implicava no não acompanhamento das atividades em sala de aula e seu desempenho em matemática era baixo, pois pouco eram os conceitos e propriedades matemáticas compreendidas pelo aluno surdo.

Essa situação vivenciada durante a observação direta em sala de aula ilustra o fato de o professor propor ordens ou a resolução de problemas que não são compreendidos pelo aluno Surdo, que ignora ou não atinge os objetivos propostos pela tarefa, simplesmente por não entender o conteúdo da mensagem veiculada.

A falta de comunicação em Libras ou a falta de alternativas comunicativas levou o aluno a desistir, no ano passado, do ano letivo. Sua ficha de matrícula indicava desistência. Além disso, durante o período em que estava estudando, eram frequentes as ausências sem justificativa. Sobre essa realidade, Fernandes (2007) alerta para o fato de que a maioria dos professores utilizam uma metodologia de aula expositiva e oral, e como recurso o quadro. Essas escolhas pedagógicas podem, na maioria das vezes, afastar o aluno surdo da escola.

Ao frequentar as aulas de matemática foi possível observar que o aluno apresentava várias dificuldades para aprender os conteúdos propostos pela professora, pois ele não conseguia compreender os conceitos, as explicações e os comandos das atividades de sala de aula. Em atividades de resolução de problemas, por exemplo, os enunciados eram todos na língua portuguesa e oralizados. Então, o surdo não conseguia acompanhar a aula e ficava rabiscando, por horas, seu caderno ou fazendo desenhos.

Para Perlin e Strobel (2006) essa é uma realidade comum nas escolas regulares que não são bilíngues. Por isso, reforçar-se a ideia de que somente a partir da apropriação da Libras, o aluno passará ser orientado na língua portuguesa e o professor pode inserir atividades envolvendo o português como L2 na sua forma escrita por meio de exercícios de escrita e de desenhos.

A prática da professora não atendia as reais necessidades do aluno surdo, pois os conteúdos e as atividades não eram comunicados de maneira que o aluno entendesse. Nesse momento, percebeu-se que o mais importante era que ele conseguisse entender o que a professora estava explicando e não somente executar a atividade. A comunicação entre professora e aluno surdo não corria de maneira satisfatória e todo o processo de ensino e aprendizagem ficava comprometido por essas circunstâncias.

Diante dessa realidade vivenciada no decorrer da pesquisa foi possível inferir que o fato de o aluno ser surdo poderá ter dificuldades na aprendizagem da matemática devido a aula ser comunicada na língua portuguesa oralizada e escrita e que tais dificuldades surgem devido a falta de contato da professora e do aluno com a Libras. Para Fernandes (2007, p. 74), a falta de acesso à Língua de Sinais torna-se “uma aliada à questão do fracasso na escolarização e esta situação está ancorada na inconsistência dos resultados na aprendizagem da língua oral”.

Outro aspecto observado refere-se à importância de o aluno surdo precisar inicialmente de um contato efetivo com a Libras para depois poder ser inserido em um ambiente escolar propício à aprendizagem de atividades em língua portuguesa na modalidade escrita, assim como as atividades precisa ser construídas baseadas em textos contextualizados, trazendo indicações em Libras associadas ao texto em forma escrita. Esse é um exercício que precisa acontecer diariamente.

Foi observado que as atividades não despertavam o interesse do aluno surdo, pois apresentava poucas ou nenhumas ilustrações. Segundo Perlin e Strobel (2006), para despertar o interesse do surdo em atividades pedagógicas faz-se necessário explorar atividades com desenhos ou gravuras sobre o assunto de sua predileção. Assim, o aluno surdo pode ser motivado a ler para alcançar diferentes objetivos da aula.

Portanto, as observações realizadas diretamente em sala de aula possibilitaram perceber que o ponto de partida para a aprendizagem matemática deve ser sempre a Libras e, a partir deste conhecimento, mostrar e começar a fazer associações com os conceitos e propriedades matemáticas na língua portuguesa na modalidade escrita. Além disso, como o aluno surdo tem uma melhor captação de estímulos visuais, por ter apurado sua atenção neste sentido sensorial, caberia à professora da turma regular oferecer materiais ricos de estímulos visuais e usar a Libras. Nesse sentido, foi planejada e desenvolvida uma aula de matemática sobre a reta numérica que possibilitasse a comunicação da linguagem matemática por meio da exploração de estratégias visuais comunicativas, conforme será discutido na próxima parte do texto.

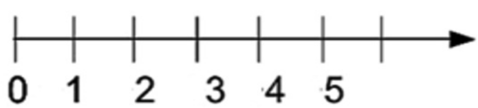
Estratégia visual comunicativa na aula de matemática

A partir das observações e das experiências vividas nos meses de pesquisa em sala de aula, surgiu a necessidade de planejar e desenvolver uma atividade de matemática que alcançasse a compreensão do aluno surdo. No primeiro momento, buscou-se analisar o nível de conhecimento do aluno surdo sobre tal assunto (Reta Numérica) para que fosse possível continuar a atividade e, consequentemente, atender ao objetivo da pesquisa.

Desse modo, percebeu-se que o aluno surdo não conhecia e não sabia trabalhar com a reta numérica, assim como muitos colegas da turma. Então, pensou-se em uma proposta inclusiva que atendesse todos os alunos da turma. Para Lima (2016), essas práticas inclusivas podem ser eficazes, capazes de aceitar a diversidade e assegurar a participação e a aprendizagem de todos os alunos, mas para isso requer um novo perfil docente. Assim, a professora do aluno surdo precisou adequar-se às necessidades do aluno, cabendo a ela preparar aulas mais inclusivas de forma que pudesse incluir todos os alunos com sucesso.

Conforme a necessidade da turma e, principalmente do aluno surdo, foi explicado no quadro, por meio de um desenho da reta numérica, como está organizada a sequência numérica, de acordo com a Figura 1.

Figura 1 – Representação da reta numérica



Fonte: Arquivo dos autores, 2019.

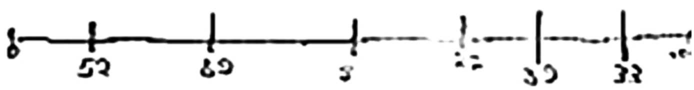
Na ocasião, foi explicada que a reta numérica é uma representação da sequência numérica dos números naturais. Considerando que a turma era de 3º ano do Ensino Fundamental, não foram explorados todos os números reais. E que os números estavam organizados na ordem crescente, da esquerda para a direita. A figura ajudou na compreensão da linguagem matemática. Durante a explicação, a pesquisadora sinalizou o nome dos números em Libras, enquanto a professora explicava (oralizava) para toda a turma, mas indicando e apontando os números na reta.

Essa prática desperta para um ambiente de sala de aula bilíngue, pois o aluno passou a ter acesso às duas línguas (língua portuguesa e Libras). No entanto, uma escola ou ambiente escolar bilíngue requer o conhecimento da Libras por um número maior de pessoas na escola e não apenas pelo aluno surdo e sua professora.

Ao tornar acessível o conteúdo matemático ao aluno surdo, a prática da professora mostrou que a inclusão escolar consiste em reconhecer e aceitar as diferenças na vida em sociedade e nos diversos contextos sociais, como a sala de aula. “Isso implica a garantia de oportunidades a todos. Independente das peculiaridades de cada indivíduo ou grupo social” (LIMA, 2016, p. 52).

Em Libras, foi explicado ao aluno que deveria inserir alguns números de 0 até 100 em uma reta numérica. Os números indicados foram: 0, 8, 22, 33, 52, 89 e 100. A Figura 2 ilustra a resposta do aluno.

Figura 2 – Registro da atividade com a reta numérica

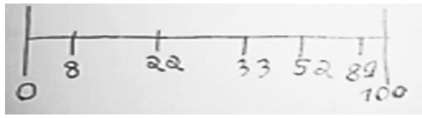


Fonte: Arquivo dos autores, 2019.

O registro na Figura 2 mostra que o aluno surdo, mesmo cursando o 3º ano do Ensino Fundamental, ainda não conseguia organizar em uma reta numérica a sequência numérica de números de até três ordens. Sendo que essa habilidade é esperada, conforme as orientações curriculares, já no 2º ano do Ensino Fundamental. Isso mostra que a falta de comunicação das aulas de matemática prejudicou o processo de aprendizagem do aluno. Nesse contexto, a professora precisava criar estratégias para a inclusão desse aluno, pois a inclusão exige também o uso de metodologias que facilitem a participação e a aprendizagem de todos, sejam alunos com deficiência ou não.

Os resultados da pesquisa apontaram para a necessidade de construir atividades cada vez mais diversificadas e que explorassem os aspectos visuoespaciais. Para garantir o direito à aprendizagem, o aspecto visuoespacial foi explorado mais vezes, mas com graduações na reta numérica para que os numerais fossem colocados, ou seja, foram criadas “pistas” para a aprendizagem. Essas “pistas” serviram como apoio para a inclusão do aluno na atividade proposta, assim ele conseguiu, com base em seu potencial cognitivo, inserir os numerais na reta, conforme mostra a Figura 3.

Figura 3 – Registro de atividade com a reta numérica graduada



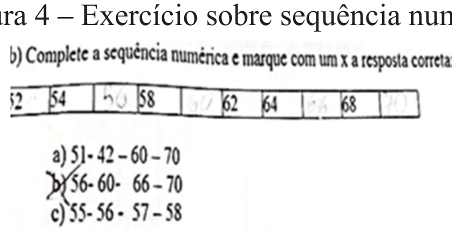
Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora, 2019.

A representação dos numerais na reta numérica foi um recurso importante para a compreensão da sequência numérica. Esse recurso facilitou a comunicação da aula, e experiências como esta podem ser iniciadas com alunos desde o 1º ano do Ensino Fundamental, mas sempre orientada em Libras. Para ampliar a comunicação, o professor pode utilizar outros materiais concretos, como fita métrica, barbante, desenho de uma linha numérica no chão, entre outros.

A representação pictórica da reta numérica tornou a atividade mais inclusiva, tratando-se do trabalho com o aluno surdo. No entanto, aspectos relacionados aos conceitos e propriedades matemáticas precisam ser levados em consideração também. Por exemplo, nas primeiras atividades é relevante destacar o papel do zero no início da reta numérica, alertar os alunos sobre o espaçamento ou graduação na reta que devem representar espaços igualmente proporcionais. Portanto, o trabalho com a reta numérica sobre a ordenação de números naturais é um excelente apoio visual para o aluno surdo, além de contribuir para a compreensão e realização de operações com números naturais.

Para finalizar a atividade com a reta numérica, foi proposto um exercício similar ao que foi explicado no decorrer da aula. Percebeu-se que a estratégia visual conseguiu alcançar o aluno surdo, assim como os demais colegas da turma, pois isso fica evidente no resultado da atividade, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Exercício sobre sequência numérica



Fonte: Arquivo dos autores, 2019.

Percebe-se na Figura 4 que o aluno consegue, com apoio na Libras, inserir números em uma sequência numérica de até duas ordens. Pode-se inferir que isso é resultado do trabalho com a reta numérica acessível. Trabalhos como este possibilitam romper com o mito de que os alunos surdos têm transtornos de aprendizagem. O que esses alunos desenvolvem são dificuldades acentuadas para aprender devido a não comunicação das aulas. Os resultados da investigação mostraram que a utilização de estratégias visuais tem um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem de pessoas surdas.

Para Silva (2013, p. 1), o trabalho com desenhos e imagens

> [...] estimula o discente a se desenvolver e ampliar sua capacidade de percepção cognitiva. São meios estratégicos do educador conduzi-lo a descobertas inovadoras para o seu crescimento cultural e intelectual, além de transmitir o conteúdo curricular e lhe permitir a se localizar e identificar *o* e *com* o seu mundo.

Portanto, a utilização de recursos visuoespaciais pode tornar a aula mais acessível aos alunos surdos. Pensar formas de incluir todos os alunos nas atividades cotidianas de sala de aula também é papel do educador matemático. No entanto, sabe-se o quanto é difícil para o professor, sozinho, assimilar esse conjunto de novas informações e estratégias para a educação do aluno surdo, assim, ele precisa de apoio didático-pedagógico sobre os desafios postos ela inclusão escolar.

Considerações finais

Esta pesquisa possibilitou compreender a importância de comunicar visualmente as aulas para alunos surdos, mesmo diante da não possibilidade de oferecer um ensino em Libras. Ao inserir estratégias visuoespaciais nas aulas, percebe-se que mais do que promover adaptações e pequenas mudanças no currículo escolar, há que se difundir nas escolas, nas salas de aula, nas formações dos professores, novas representações sobre o processo de ensino e aprendizagem da pessoa surda.

Outro aspecto que merece destaque é o pouco investimento na educação dos alunos surdos, pois o aluno participante da pesquisa não tinha professor de Libras, não tinha intérprete, não recebia atendimento educacional especializado e a professora regular não tinha conhecimento sobre Libras. Todos esses fatores contribuíam para a perpetuação da exclusão educacional desse aluno. Isso se contrapõe a exigência legal de que deve ocorrer a difusão da Libras na sociedade e sua utilização nos espaços escolares. Além disso, investir na formação de profissionais bilíngues como professores especializados e intérpretes de língua de sinais, principalmente, o resgate de educadores surdos como mediadores fundamentais para a educação bilíngue.

O trabalho com estratégias para o ensino da reta numérica possibilitou a incorporação da Libras como a primeira língua do aluno surdo e, em seguida, a aprendizagem da linguagem matemática e da língua portuguesa. Nesse sentido, os recursos visuais surgiram como potencializadores pedagógicos em detrimento do aspecto oralista no processo educacional.

Sobre uma proposta de ensino de matemática na perspectiva da inclusão, tem-se percebido com os resultados das observações diretas em sala de aula que mesmo com um investimento significativo em movimentos sociais a favor da inclusão escolar e com as diversas publicações em defesa de uma educação inclusiva, percebeu-se que muitos professores do ensino regular ainda estão à margem da compreensão e do exercício da inclusão educacional, pois nota-se o descaso com a educação das pessoas surdas no que tange a importância da inserção da Libras, de maneira efetiva, nas práticas pedagógicas, além de um total desconhecimento sobre a singularidade linguística das pessoas surdas.

No contexto da educação matemática inclusiva, portanto, a pesquisa propõe a inserção de mais estratégias visuais para a comunicação das aulas de matemática, pois a utilização de estratégia visual é de suma importância para o ensino e aprendizado de aluno surdo, porque é a partir do visual que o aluno consegue assimilar melhor os conteúdos e obter um bom rendimento no seu aprendizado, além disso, pode-se dizer que com pouco recursos pode-se construir um aprendizado da matemática mais significativo.

Referências

ALBERTON, B. F. Antunes. *Discursos Curriculares Sobre educação Matemática para Surdos*. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação e Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

ALMEIDA, M. V. M. et al. O ambiente Logo como elemento facilitador na releitura de significados em uma atividade de Ciências com alunos surdos. *Anais*... São José dos Campos: UNIVAP, 2007.

ARROIO, Richard dos Santos. et al. Ensino de Matemática para o Aluno Surdo: Revendo Concepções e Construindo Paradigmas. *Revista Paranaense de Educação Matemática*. Campo Mourão, PR, v.5, n.9, p. 248-269, jul./dez. 2016.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 2016.

BERTOLI, Vaneila. O Ensino Da Matemática Para Alunos Surdos. *In*: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 3., 2012, Ponta Grossa, PR.

BORGES, Fábio Alexandre; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Entre duas línguas: O ensino e a aprendizagem de Matemática de alunos surdos inclusos. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEM, 6. 2015, Pirenópolis, GO. *Anais*... Brasília, DF: SBEM, 2015.

FERNANDES, Sueli. *Educação de Surdos*. Curitiba: Ibpex, 2007.

FRIAS, Elzabel Maria Alberton. *Inclusão Escolar do Aluno com Necessidades Educacionais Especiais*: Contribuições ao Professor do Ensino Regular. São Paulo: Ática, 2008.

HONORA, Márcia. *Inclusão Educacional de Alunos com Surdez*: concepção e alfabetização. São Paulo: Cortez, 2014.

LIMA, Carlos Augusto Rodrigues. Formação de professores ante a questão da inclusão. *In*: MANRIQUE, Ana Lúcia (org.). *Desafios da Educação Matemática Inclusiva*: formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

OLIVEIRA, Maria Marly de. *Como fazer pesquisa qualitativa*. 6. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

PERLIN, G.; STROBEL, K. *Fundamentos da Educação de Surdos*. Florianópolis: UFSC, 2006.

SANTOS, Suzana Sanches dos. *O bilinguismo como proposta inclusiva para surdos no processo inicial de escolarização*. Monografia. Centro de Ensino Superior do Ceará. Fortaleza, 2013.

SILVA, Reginaldo, A. Os recursos visuais na prática pedagógica de alunos surdos: Benefícios ao Letramento, Alfabetização e à Prática de Leitura. *In*: SIMPÓSIO DA PÓS-GRADUAÇÃO, 6., 2013, Inconfidentes, MG.

Dobraduras de papel e a classificação dos ângulos notáveis

Letícia Gonçalves Mascarenhas

Osvaldo dos Santos Barros

Resumo

O presente estudo trata do uso de alternativas metodológicas para o ensino da matemática escolar. Centramos nossa proposta na confecção de um transferidor elaborado a partir de uma folha de papel tamanho A4 e técnicas simples de dobradura de papel. Nossa proposta traz como objetivo o uso de materiais concretos e atividades lúdicas para introduzir os conceitos de ângulos, trabalhando sua classificação e a medição dos ângulos notáveis.

Palavras-chave

Dobraduras de papel. Estudos dos ângulos. Ensino de Matemática.

Introdução

Na Educação Matemática, são comuns as discussões levantadas acerca dos métodos de ensino e aprendizagem da Matemática Escolar. Constantemente, professores e teóricos da área se dispõem a buscar de metodologias diferenciadas e inovadoras, com objetivo de melhorar a construção do conhecimento matemático do aluno.

Para obter êxito nesse processo, se desenvolvem cada vez mais estudos voltados as dificuldades que os alunos sentem em sala de aula, tentando trazer o conteúdo matemático para mais próximo da realidade em que ele se encontra, possibilitando assim ao educando adquirir o conhecimento de determinado assunto através de variadas situações e dinamizações que são feitas a partir seu cotidiano.

De maneira integrada e harmoniosa, o professor procura fazer com que aluno visualize a matemática ao seu redor, de forma mais concreta, tornando a construção desse conhecimento num processo dialético, onde o educando assimila esse conteúdo de forma significativa, podendo então agir sobre a situação que lhe foi proposta de forma crítica e reflexiva, interpretando, argumentando, relatando suas conclusões, sendo assim capaz de compreender e resolver essas situações.

> "A Situação ensinar/aprender é norteada pela satisfação que o indivíduo sente em usar a ciência para seu ajustamento ao meio, para suavizar suas lutas, para resolvendo problemas dar-lhe maior condição de cidadão. É nessa direção que se providencia a formação de hábitos, atitudes e desenvolvimento de habilidades que lhe possibilitarão ultrapassar barreiras e desfrutar das oportunidades férteis que a vida moderna lhe apresenta" (BRITO, 1984, p. 150)

A partir deste contexto surge, então, vários estudos na área da geometria, que permeiam o uso de materiais concretos, ou seja, materiais didáticos manipuláveis com intuito de fazer-se melhor entender o conteúdo da disciplina. Dessa maneira, a aprendizagem se apresenta como interdisciplinar voltada para o cotidiano do educando. Um exemplo de material didático manipulável para ensino da geometria é o uso das dobraduras de papel.

As dobraduras, quando usada em sala de aula como recurso didático, estimulam o desenvolvimento da criatividade e da investigação, além ser de custo acessível, dispõe ao aluno a possibilidade de conseguir visualizar os resultados e usar o tato para representação dos trabalhos, o que a torna uma alternativa para explorar de forma mais prazerosa os conceitos geométricos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, temos que:

> As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras (BRASIL, 1997, p. 3)

As dobraduras de papel que não utilizam recortes são chamadas de origami. Desenvolvido originalmente no Japão no início do século XVII, o origami tem como significado: *ori* = dobrar e *kami* = papel, essa arte tornou-se parte de diversas culturas ao redor do mundo, geralmente utilizadas em rituais religiosos como forma de ornamentos e pela classe nobre. Mas mesmo sendo uma arte muito antiga, a sua utilidade no meio educativo é mais recente, hoje a geometria vê essa arte como um importante aliado no processo de ensino e aprendizagem. Tradicionalmente, o origami não utiliza recortes e colagens, por conta do custo do papel que chegou a ser um artigo de luxo em algumas civilizações, já nas dobraduras utilizam-se cola e tesoura.

Figura 1 – Dobraduras de papel

Fonte: https://www.wreducacional.com.br/curso-de-origami-arte-da-dobradura-de-papeis. Acesso em: 26 maio 2021.

No estudo com o uso de origamis e dobraduras, são perceptíveis as contribuições adquiridas, sendo elas: criatividade, motivação dos alunos, habilidade de enxergar os conteúdos, habilidades motoras, memorização, manipulação das formas pois o aluno ao dobrar, desdobrar e recortar ele constrói suas próprias relações e percepções da Geometria, conseguindo fazer a comparação com a formas vistas em seu dia a dia.

Rêgo e Gaudêncio (2004), a respeito dos trabalhos com Origami, afirmam:

> "O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e arte (RÊGO; GAUDÊNCIO, 2004, p. 18)

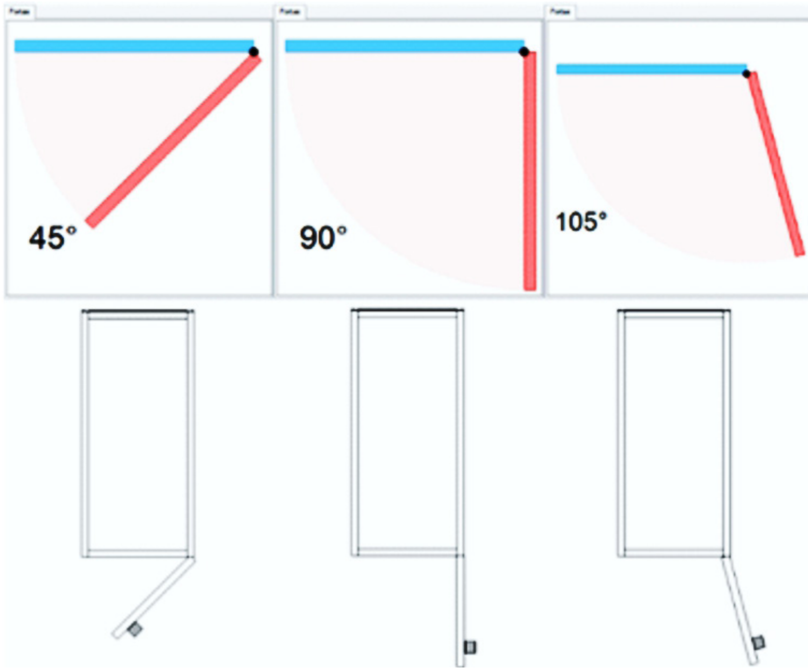
Partindo das perspectivas apontadas acima, sobre a importância do uso de matérias manipulados para introduzir conceitos matemáticos, e das dobraduras de papel para melhor compreensão de assuntos geométricos, vamos usar este recurso como material manipulado para construir ângulos. Ou seja, usaremos as dobraduras como recurso didático para melhor entendimento sobre Ângulos Notáveis, conteúdo este que é parte essencial da grade curricular de geometria do 9° ano do ensino fundamental.

Os ângulos notáveis

Ângulos ou aberturas angulares são medidas que podem ser observadas em muitas situações do dia a dia. Os ângulos são classificados a partir de uma referência, os ângulos retos.

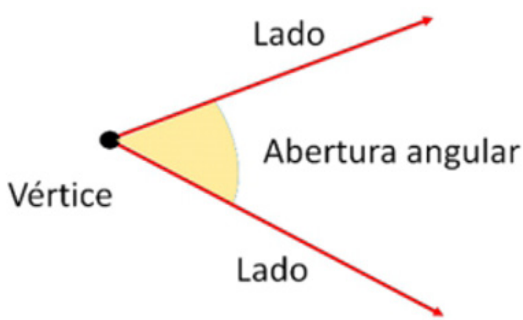
O conceito de ângulo é a junção de dois segmentos de retas orientados (ou duas semi-retas orientadas) a partir de um ponto em comum. A interseção entre os dois é denominada vértice do ângulo e os lados do ângulo são os dois segmentos. Para medi-los, há duas possíveis unidades: grau ou radiano.

Figura 2 – Porta com abertura angular



Fonte: https://suporte.promob.com/hc/pt-br/articles/360046759054-Catalog--Como-alterar-definições-de-abertura-. Acesso em: 26 maio 2021.

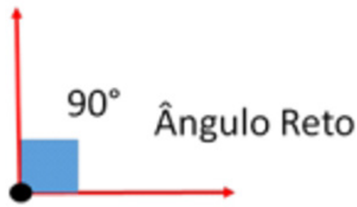
Figura 3 – Abertura angular



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Desde a antiguidade o ângulo reto também está diretamente ligado a representação de um homem em pé observando o horizonte.

Figura 4 – Ângulo Reto

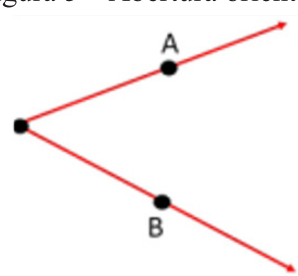


Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

O homem em pé e a referência para a direção vertical, devido a sua coluna vertebral e a linha do horizonte está relacionada à direção horizontal.

Podem ser usadas três letras, por exemplo ABC para representar um ângulo, sendo que a letra B que fica no meio representa o vértice, a letra A do início representa um ponto do primeiro segmento de reta e a letra C representa um ponto no segundo seguimento de reta.

Figura 5 – Abertura orientada



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Usamos a notação < para um ângulo, o exemplo acima ficaria: ABC.

Aberturas angulares

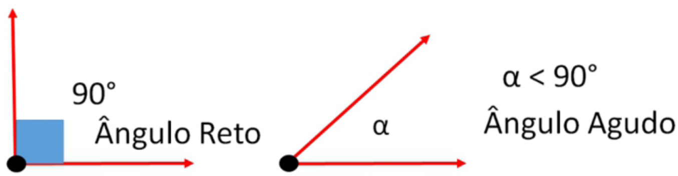
Falaremos agora sobre os conceitos de ângulos e sobre as aberturas angulares que eles formam, conceitos que poderão ser identificados também através do uso de dobraduras.

Os ângulos são classificados em:

Ângulo Reto: tem exatamente 90 graus, como foi demonstrado nas figuras acima.

Ângulo Agudo: cuja medida é maior que 0 graus e menor do que 90 graus, ou seja, abertura angular menor que o ângulo reto.

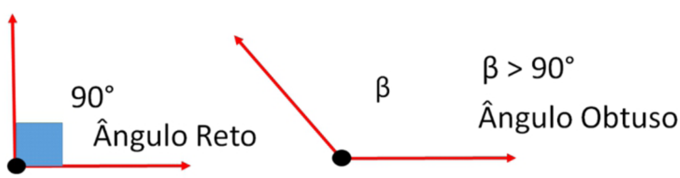
Figura 6 – Ângulo agudo em relação ao Reto



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Ângulo Obtuso: quando sua medida é maior que 90 graus e menor que 180 graus, ou seja, abertura angular maior que o ângulo reto.

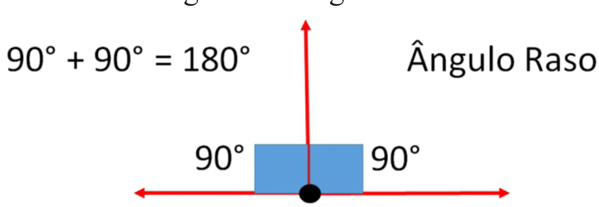
Figura 7 – Ângulo obtuso em relação ao Reto



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Ângulo Raso: conhecido como meia-volta ou meia-lua, esse ângulo é a metade de um ângulo inteiro, logo possui 180 graus, ou seja, a medida do dobro de um ângulo reto.

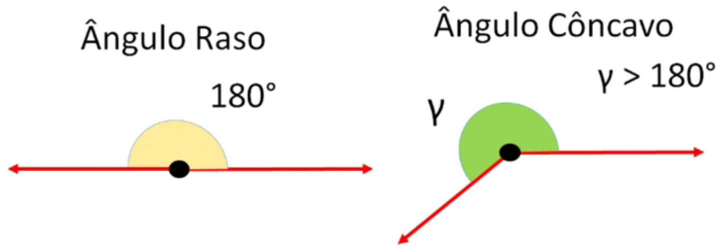
Figura 8 – Ângulo Raso



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Ângulo Côncavo: menos comum em situações cotidianas que os demais, é o ângulo que tem medida maior que 180 graus e menor que 360 graus, ou seja, a abertura angular maior que o ângulo raso.

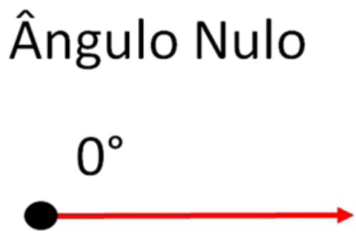
Figura 9 – Ângulo Côncavo



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Ângulo Nulo: não apresenta medidas. Os lados estão sobrepostos e não há distância entre eles.

Figura 10 – Ângulo Côncavo



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Agora, mostraremos como é possível trabalhar este conteúdo em sala de aula de forma mais dinâmica e interessante para o aluno, e o mais importante, podendo usar como material palpável o papel, que é de baixo custo e acesso de todos. A construção de aberturas angulares com papel, estimula a curiosidade do aluno, e também o incentiva a pensar criticamente sobre um objeto simples.

Primeiramente, pegaremos uma folha de papel qualquer, pode ser de caderno ou qualquer outra, como na imagem abaixo:

Figura 11 – Folha de papel A4

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Podemos observar que a folha tem um formato retangular. Os retângulos, são quadriláteros, que são formados por segmentos de reta, sendo dois lados não consecutivos paralelos, e por definição possui seus ângulos internos todos retos, ou seja, ângulos com 90 graus. Os lados adjacentes são os segmentos de reta que formam o contorno retangular da folha, e os vértices são os pontos de encontro dos dois lados.

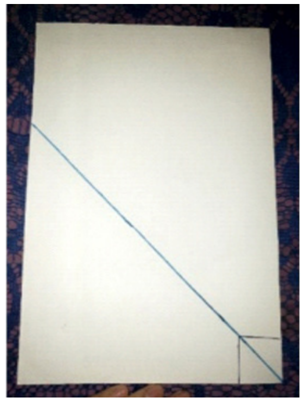
Para a construção de uma abertura angular, vamos dobrar o papel da seguinte forma: escolha um dos vértices e leve até o encontro do lado paralelo oposto, como ilustra a imagem a seguir:

Figura 12 – Dobra de 45º

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Ao voltar a folha para o estado inicial, traçamos uma semirreta onde a dobradura ficou marcada:

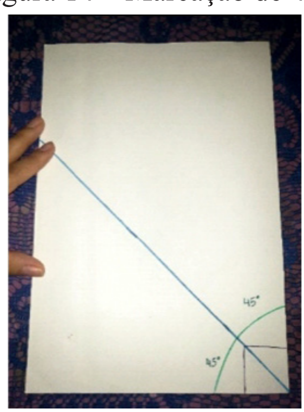
Figura 13 – Bissetriz no vinco do papel



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Como se trata de um retângulo, sabemos que seu vértice tem ângulos retos de 90 graus, e a semirreta traçada dividiu este ângulo em duas partes iguais, ou seja, é a bissetriz do ângulo reto, criando assim duas aberturas angulares de 45º graus cada.

Figura 14 – Marcação de 45°



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

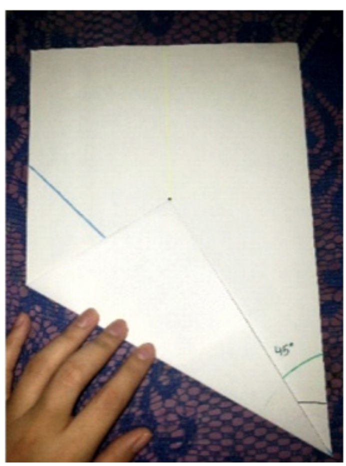
Agora vamos achar a mediana desse retângulo para facilitar encontrarmos novas aberturas. Para isso dobramos a folha até juntar os lados paralelos e traçamos a mediana.

Figura 15 – Dobra na Mediana do papel

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Feito isso, vamos levar o mesmo vértice que foi usado anteriormente ao encontro da mediana, de modo que fique alinhado com o vértice que já marcamos.

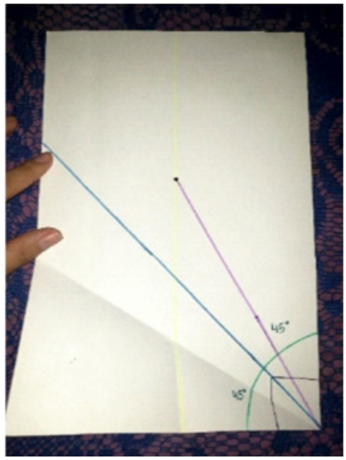
Figura 16 – Vértice sobre a Mediana



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Feito isso traçamos uma semirreta que vai do ponto onde o vértice encontrou a mediana até o vértice marcado, ficando assim:

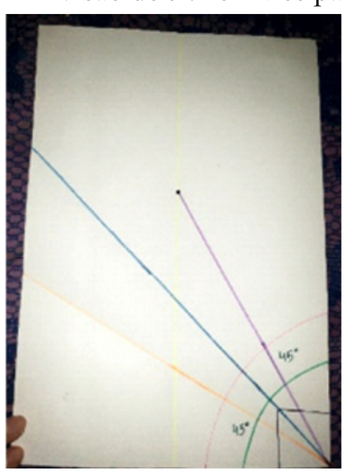
Figura 17 – Marcação do vértice inferior ao ponto na mediana



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Podemos observar que onde o papel foi dobrado pode ser traçada outra semirreta:

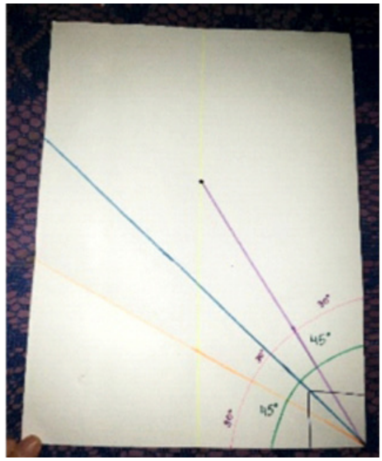
Figura 18 – Divisão do 90º em três partes iguais



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

As semirretas que construímos dividiu o ângulo reto em 3 partes iguais, então temos três aberturas angulares de 30º graus cada:

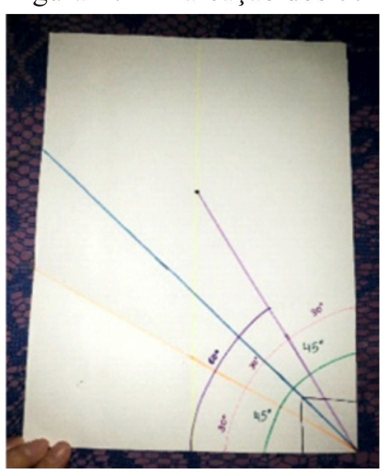
Figura 19 – Marcação dos ângulos de 30°



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Podemos fazer ainda mais uma abertura de 60 graus, da semirreta em azul até a base:

Figura 20 – Marcação dos 60°



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Se dobrarmos o papel levando o vértice do canto esquerdo até a semirreta laranja, dessa forma:

Figura 21 – Bissetriz de 30°

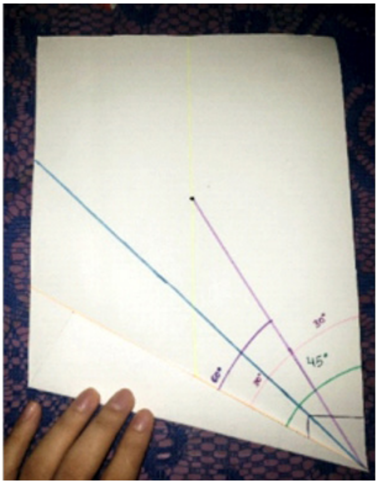
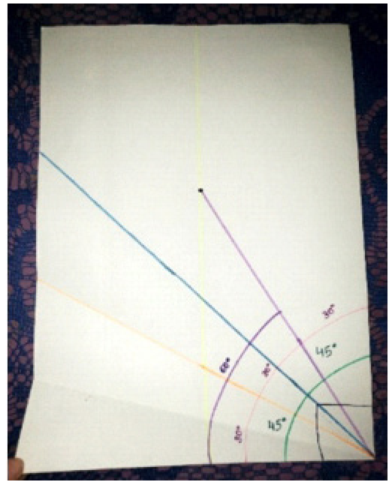


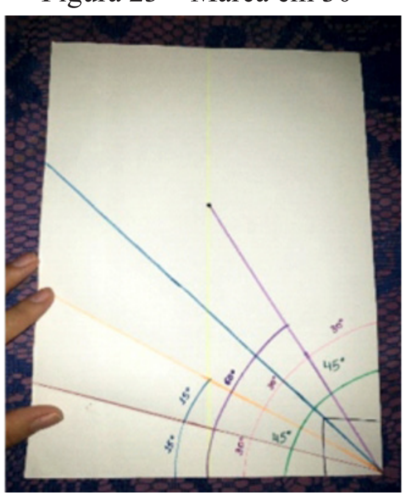
Figura 22 – Vinco em 30°



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Marcando onde foi dobradura com uma semirreta, dividimos o ângulo de 30 graus em dois, encontrando mais duas aberturas angulares de 15 graus cada.

Figura 23 – Marca em 30°



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Há diversas possibilidades de encontrar ângulos com o uso de dobraduras de papel, quanto mais dobramos, mais ângulos encontramos.

Se observarmos a última foto, podemos ver que com as dobraduras construímos um transferidor no papel. O transferidor é uma ferramenta extremamente útil para se medir e/ou desenhar ângulos. Logo podemos também usar esta construção para medir ângulos como um transferidor. Seria interessante, por se tratar de uma forma mais pratica de construções de ângulos, propor ao aluno usar sua própria construção para tentar medir ou achar aberturas angulares em objetos que estão ao seu redor.

Vamos a alguns exemplos. Observe a imagem abaixo:

Figura 24 – Lajota com aberturas angulares

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Ela se trata de uma lajota no chão em que podemos observar várias formas geométricas. Como eu poderia usar o transferidor que construímos para medir as seguintes aberturas angulares marcadas a seguir:

Figura 25 – Ângulo agudo

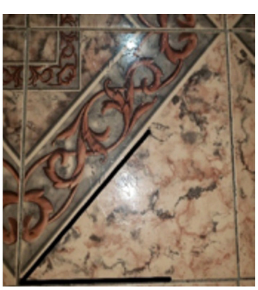


Figura 26 – Ângulo Reto

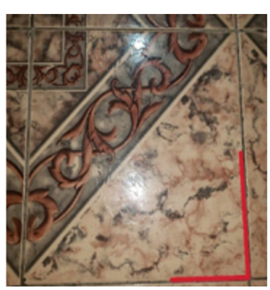


Figura 27 - Ângulo agudo

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Uma forma simples de resolver, seria posicionando o vértice do nosso transferidor nos vértices pedidos na imagem e dobrar o papel no mesmo tamanho da abertura, então saberemos de forma pratica qual ângulo correspondente. Observe:

Figura 28 – Uso do transferidor

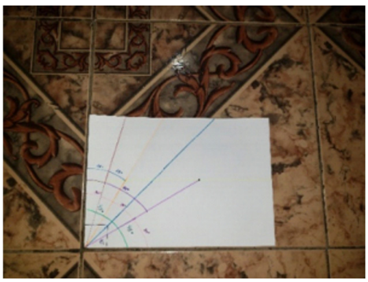


Figura 29 – Transferidor marca 45º

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Podemos então a concluir que a abertura angular tem 45 graus. É um ângulo menor que 90 graus, então é um ângulo agudo.

Figura 30 – Transferidor marca 90º

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Nesta segunda abertura, podemos ver que o papel não se dobra quando os vértices se encontram, então o ângulo é de 90 graus, um ângulo reto.

Figura 31 –Transferidor marca 45º

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Na terceira abertura angular, temos um ângulo de 45 graus também, um ângulo agudo.

Assim como fizemos com a lajota, poderíamos fazer com muitos outros objetos, com portas, janelas, moveis e outros objetos. As dobraduras, além de ser um ótimo passatempo, pode se tornar uma prática pedagógica muito útil em sala de aula, como já havíamos dito anteriormente, ela possibilita o desenvolvimento da curiosidade e traz ao aluno um saber significativo. Isso torna o aprender mais prazeroso para aluno de entender os assuntos propostos em aulas.

Considerações Finais

Nossa proposta encontra-se em desenvolvimento, para que possamos utilizar essas construções em práticas de sala de aula. Porém, o desenvolvimento das atividades propostas aqui, já nos dão uma clara noção do fator positivo dessas atividades nas práticas dos estudantes, principalmente por se tratar de uma ação prática de medição de aberturas angulares.

Em muitas situações as medições de ângulos se restringem ao uso do transferidor e a partir do que propomos nesse estudo os alunos poderão construir seus próprios instrumentos e realizar suas medições com um instrumento alternativo, mas que traz grande precisão nas medidas simples dos ângulos notáveis. Por esse motivo, acreditamos que cumprimos o objetivo desse trabalho e nos empenhamos em ampliar esse estudo para futuras contribuições às práticas de sala de aula.

Referências

BRASIL, PCNs. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: SEF/MEC, 126p, 1997.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei n. 9.9394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: Presidência da República, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: out. 2010.

BRITTO, Neyde Carneiro de. *Didática especial*. São Paulo: Editora do Brasil, 1984.

GÁLVEZ, Grécia. A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. *In*: PARRA, Cecília et al. *Didática da matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996 p. 236-244.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação: Departamento de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática*. Curitiba, 2008.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho; GAUDÊNCIO, Severino Júnior. *A Geometria do Origami*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2003.

Uma (re)interpretação da praxeologia escolar do Teorema de Pitágoras

Luciene Moreira de Souza

Denivaldo Pantoja da Silva

José dos Santos Guimarães Filho

Resumo

No presente trabalho, investigamos a Organização Matemática ou Praxeologia do Teorema de Pitágoras em três livros escolares do 9º ano adotados pelas escolas no ano de 2019 no município de Cametá/PA. Objetivamos nesta investigação construir um Modelo Epistemológico de Referência Escolar $(MER)_E$ como (re)interpretação via transposição didática do modelo vigente apresentado nos livros escolares. Para tanto, recorremos às noções de Modelo Epistemológico de Referência, de Praxeologia, à informações históricas do Teorema de Pitágoras e à proposição 47 do livro *Os Elementos*, de Euclides como ferramentas teóricas. Uma análise da praxeologia dos livros foi realizada para subsidiar as discussões e à construção da proposta do $(MER)_E$. O estudo tem aspectos qualitativos, tendo como recurso metodológico a pesquisa bibliográfica. Os resultados apontam a ausência de um modelo epistemológico de referência para o estudo de geometria, em particular do teorema de Pitágoras.

Palavras-chave

Teorema de Pitágoras. Modelo Epistemológico de Referência Escolar. Geometria. Praxeologia. Ensino.

Introdução

O Teorema de Pitágoras é um tema de destaque da Matemática Escolar, aparece principalmente nos conteúdos de Geometria e Trigonometria e em outras disciplinas escolares como a Física, por isso merece, em nossa opinião, uma abordagem minuciosa nas aulas. Contudo o que vemos nos livros didáticos são apresentações simples e diretas, tanto de informações históricas, quanto de conteúdo matemático de Geometria. Nesse sentido importa ressaltar que:

> A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2018, p. 272).

Mas, nas organizações presentes nos livros escolares, o que vemos relacionado ao Teorema de Pitágoras, são conteúdos prontos para a aplicação direta da relação entre os lados do triângulo retângulo para o cálculo de medidas, visto que, como pretendemos abordar neste trabalho, a proposição 47 de Euclides está diretamente relacionada ao teorema, mas não é explorada nas praxeologias apresentadas, fato que nos parece intrigante.

Tendo em vista esses aspectos até aqui expostos e com a intenção de oportunizar aos professores de Matemática um estudo inicial praxeológico como base para construção de outros, o presente trabalho tem como principal questionamento orientador o seguinte: *Qual Modelo Epistemológico de Referência pode ser construído para o contexto escolar a partir de uma transposição didática da proposição* 47 *do livro Os Elementos de Euclides?* De modo particular, acreditamos que certamente encaminhará a seguinte questão como um desdobramento emergente: *Como construir uma transposição didática do modelo apresentado por Euclides do Teorema de Pitágoras como Modelo Epistemológico de Referência para o contexto escolar?*

Desse modo, partindo da hipotese que é possivel construir um modelo de referencia para a escola, propomos como objetivo buscar uma (re)interpretação do modelo escolar vigente do Teorema de Pitágoras apresentados pelos livros escolares, com base na organização praxeológica euclidiana, mais especificamente, no fazer matemático mobilizado na proposição 47 do livro I de "Os Elementos" de Euclides, que apresenta a demonstração da relação métrica entre catetos e hipotenusa de um triangulo retângulo. Para alcançá-lo, estruturamos nosso trabalho em três momentos, o primeiro consiste na construção de um Modelo Epistemológico de Referencia (MER, daqui em diante), a partir da proposição 47 do livro I de Euclides, seguido de uma análise da organização praxeológica nos livros didáticos do 9° ano a partir do MER apresentado, com a intenção de construir uma (re)interpretação do modelo escolar voltado para o Teorema de Pitágoras no 9° ano do ensino fundamental.

Assim, consideramos importante apresentar inicialmente de elementos históricos do Teorema de Pitágoras e o desenvolvimento da proposição 47 e as proposições integrantes da demonstração como um MER.

História do Teorema de Pitágoras e a proposição 47

Tópicos Históricos do Teorema de Pitágoras

É comum atribuir ao matemático grego Pitágoras de Samos (572-496 a.C.) a descoberta do teorema sobre triângulos retângulos, mais conhecido como Teorema de Pitágoras, onde anuncia que o quadrado sobre a hipotenusa de um triangulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. De acordo com Eves (2011) tal teorema já era conhecido pelos babilônios, mas sua primeira demonstração pode ter sido dada por Pitágoras. Miorim (1998) ressalta que não é possível arfirmar que Pitágoras realizou essa demonstração, pois tal afirmação foi extraída de uma fonte escrita a mais mil anos depois de Pitágoras, o Sumario Eudemiano de Proclo, do século V. d.C.

Alguns pesquisadores, tais como, Tatiana Roque(2012), Rodrigo Leal (2016), Rondineli Nunes (2016), Wildson Sousa

(2016), Miorim (1998) discorrem sobre uma existência anterior sobre a descoberta desse teorema, onde algumas demonstrações já eram conhecidas e utilizadas antes por outras civilizações, mesmo que com a linguagem existente da época, como os tabletes de barro do período de 1800 a 1600 a.C. que é uma espécie de tabela onde contém os lados do triângulo retângulo, que hoje é encontrada em Museus.

De acordo com Roque (2012), é no "Catálogo dos geômetras", de Proclus[1], que se faz mais alusão sobre a existência do matemático Pitágoras, o mesmo transformou sua filosofia em uma forma de educação liberal.

> Proclus pode ter sido responsável por uma síntese que mistura as ideias de Eudemo sobre a pureza dos métodos pitagóricos com a atribuição desses feitos a um homem, Pitágoras. Era conveniente, para Proclus, reconhecer aí os fundamentos de seu próprio platonismo. A escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras (ROQUE, 2012, p. 78).

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, essa relação era conhecida por diversos povos mais antigos do que os gregos e pode ter sido um saber comum na época de Pitágoras. Para a escola pitagórica o teorema de Pitágoras era um resultado aritmético e não geométrico, a demonstração desse teorema utiliza resultados desconhecidos na época da escola pitagórica (ROQUE, 2012).

O matemático Euclides de Alexandria (323-283 a.C.), considerado o pai da geometria por autores como Capitani e Biazin (2013), autor de *Elementos*, obra essa que contém treze livros, sendo que o primeiro apresenta teoremas, postulados e axiomas e os demais proposições. É no livro I que se encontra a demonstração da relação métrica entre catetos e hipotenusa de um triangulo retângulo, conhecida atualmente como Teorema de Pitágoras, visto que Euclides não a nomeia como tal. Na realidade, demonstrou o

[1] Proclus de Atenas (410-485 d.C.) foi um filósofo e matemático neoplatônico (Eves, 2011).

teorema com resultados desconhecidos na época da escola pitagórica, essa demonstração se encontra na proposição 47, a qual será tomada como Modelo Epistemológico de Referência.

Este fazer de certo modo induz deliberadamente a elaboração de uma possível proposta de um Modelo Epistemológico de Referência Escolar que denotaremos por $(\text{MER})_E$ procurando associar os trabalhos de Silva (2006), Kilhian (2011), Ferreira (2014), para a elaboração de nosso modelo.

A Proposição 47 como Modelo Epistemológico de Referência

De acordo com Ferreira (2014, p.58), "O modelo epistemológico de referência (MER, daqui em diante) permite evidenciar possíveis condições que facilitam, ou que impedem o acesso ao estudo de uma Organização Matemática por meio de sua descrição e análise". Para Ferreira (2014) o MER

> [...] é um instrumento que auxilia a descrição e análise do modelo epistemológico dominante nas instituições de ensino, além de atender as restrições que o modelo apresenta e que, reflete de alguma forma na relação institucional da Organização Matemática em questão, pois viabiliza outros meios de se estudar a Organização Matemática na instituição considerada (FERREIRA, 2014, p.58).

Dessa maneira, o MER pode ser encaminhado para um dado saber a partir de uma tecnologia ou teoria matemática, onde permite apresentar as praxeologias articuladas e integradas como aplicações dessa teoria (ALMEIDA; GUERRA, 2019, p.414-415).

De acordo com Chevallard (1999) a Teoria Antropológica do Didático (TAD) assume que toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se com um único modelo, que se resume na palavra "praxeologia" cujos componentes podem ser agrupados em dois blocos, o bloco prático-técnico e o tecnológico-teórico, o primeiro composto por um tipo de tarefa e uma técnica para enfrenta-la e o segundo explicativo formado pela tecnologia e teoria.

Mais especificamente, ainda de acordo com Chevallard (1999), o bloco tecnológico-teórico representado simbolicamente por $[\theta/\Theta]$

é identificado habitualmente como um Saber, enquanto que o técnico-prático [T/ô] constitui um saber-fazer. Desse modo, por metonímia se designa rotineiramente a praxeologia completa [*T*/ô/θ/Θ] como "saber", inclusive qualquer parte dela. Resumidamente podemos dizer que numa praxeologia completa teremos: uma tarefa (T) e uma técnica (ô) para enfrenta-la, uma tecnologia (θ) para explicar a técnica utilizada e uma teoria (Θ) explicativa da tecnologia.

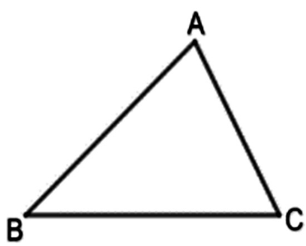
Em nosso caso, o MER apresentado tem como finalidade explicitar elementos essenciais do fazer matemático a partir das proposições euclidianas e suas demonstrações relacionadas ao Teorema de Pitágoras para fazer a análise nos livros escolares selecionados, promovendo assim uma tentativa de (re) interpretar como uma transposição didática para o contexto escolar.

Desse modo, recorremos a proposição 47, a qual mantemos a linguagem original demonstrada por Euclides disponível na obra utilizada para este estudo, cujo enunciado é o seguinte: "*Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto"* (BICUDO, 2009, p. 132).

Na demonstração, Euclides utiliza-se de proposições mencionadas anteriormente no Livro I sendo elas a 4, 41 e 34, que aqui denominamos simbolicamente por P_4, P_{41} e P_{34}, respectivamente, como segue:

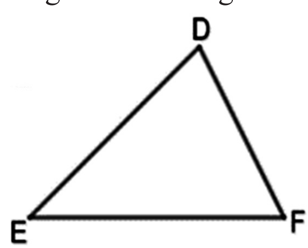
P_4 – Se dois triângulos apresentam respectivamente dois lados iguais, e se o ângulo contido por estes dois lados forem iguais, então eles também terão suas bases iguais. Consequentemente os triângulos serão iguais e os ângulos restantes também.

Figura 1 – Triângulo 1



Fonte: Elaboração autoral

Figura 2 – Triângulo 2



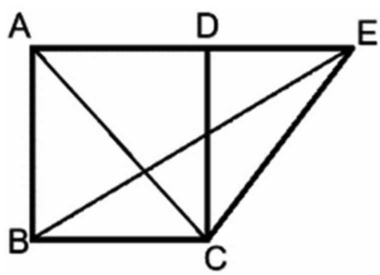
Fonte: Elaboração autoral

Sendo o triangulo ABC ajustado sobre o triangulo DEF e sendo posto o ponto A sobre o ponto D e por outro lado a reta AB sobre DE, logo o ponto B se ajustará sobre o E, por ser AB igual a DE; assim ajustando a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo o ponto C se ajustará sobre o ponto F por ser de novo a AC igual a DF. Consequentemente o triangulo ABC todo se ajustará sobre o triangulo DEF todo.

Sobre essa demonstração Kilhian (2011, on-line) ressalta que "Numa perspectiva moderna, a igualdade dos triângulos se dá pelo fato de que eles se deduzem um do outro por uma rotação de 90°".

P_{41} - Se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo e estes estão na mesma paralela, logo o paralelogramo é o dobro do triângulo.

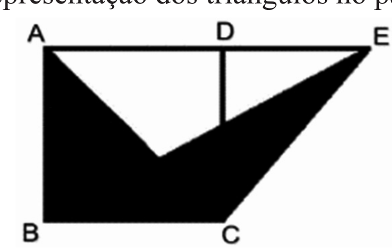
Figura 3 – Paralelogramo + triangulo



Fonte: Elaboração autoral

Fique, pois, ligada a AC. Então, o triangulo ABC é igual ao triangulo EBC; pois, está tanto sobre a mesma base BC que ele quanto nas mesmas paralelas BC, AE.

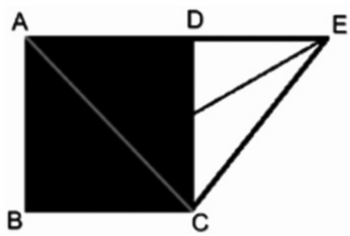
Figura 4 – Representação dos triângulos no paralelogramo 1



Fonte: Elaboração autoral

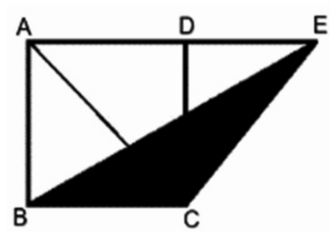
Mas o paralelogramo ABCD é o dobro do triangulo ABC; pois a diagonal AC corta-o em dois; desse modo o paralelogramo ABCD também é o dobro do triangulo EBC.

Figura 5 – Representação da diagonal AC



Fonte: Elaboração autoral

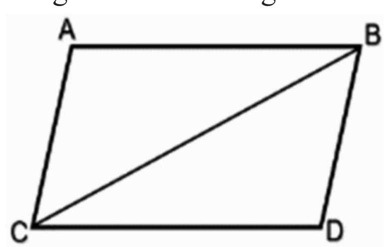
Figura 6 – Representação do triangulo EBC



Fonte: Elaboração autoral

P_{34} - Nos paralelogramos, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si; e todo o paralelogramo fica dividido pela diagonal em duas partes iguais.

Figura 7 – Paralelogramo 2



Fonte: Elaboração autoral

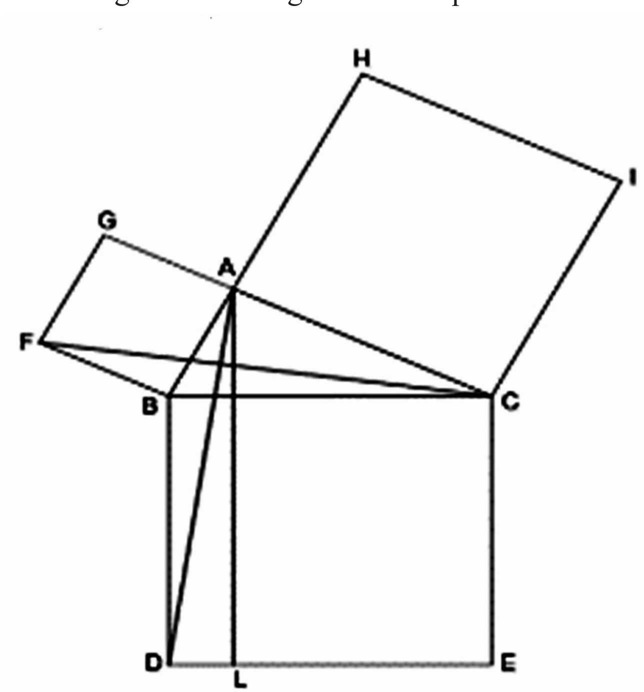
Como AB é paralela a CD, e a reta BC caiu sobre elas, os ângulos sob ABC, BCD, alternos, são iguais entre si. Novamente, como AC é paralela a BD e a BC caiu sobre elas, os ângulos sob ACB, CBD, alternos, são iguais entre si. Logo, os ABC, BCD são dois triângulos tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob BCD, CBD respectivamente, e um lado igual a um lado, o BC comum deles junto aos ângulos iguais; portanto, também terão os lados restantes iguais aos restantes, respectivamente, e o ângulo restante igual ao ângulo restante; por um lado, o lado AB é igual ao CD, e, por outro lado, o AC ao BD, e ainda o ângulo sob BAC é igual ao sob BDC. E, como o ângulo sob ABC é igual ao sob BCD, e, por outro lado, o sob CBD ao sob ACB, então, o sob ABD todo é igual ao sob ACD todo, como também o sob BAC igual ao sob CDB.

Como AB é igual a CD, e a reta BC é comum, logo as retas AB, BC são iguais as duas CD, BC respectivamente; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob BCD. Portanto, a base AC é igual a DB, logo também o triangulo ABC é igual ao triangulo BCD.

Assim sendo, tendo conhecimento dessas proposições como necessárias segue a demonstração da proposição 47 e a articulação mobilizada.

Seja o triangulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre BC é igual aos quadrados sobre as BA e AC.

Figura 8 – Triângulo ABC + quadrados



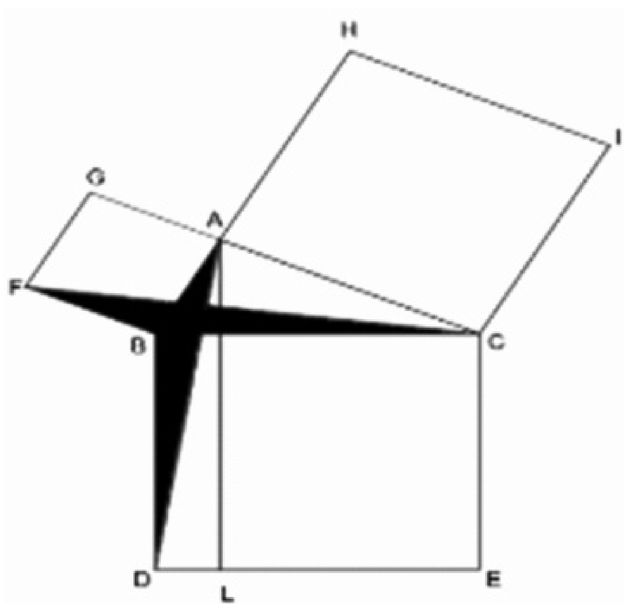
Fonte: Elaboração autoral

Construam-se o quadrado *BDEC* sobre *BC* e os quadrados *GFBA* e *HACI* sobre *BA* e *AC.* Trace-se *AL* paralela a *BD* ou *CE,* e trace-se *AD* e *FC.*

Como cada um dos ângulos *BAC* e *BAG é* reto, então, as duas retas *AC* e *AG,* que não estão no mesmo lado, fazem relativamente à reta *BA,* e no ponto *A* dessa reta, os ângulos adjacentes que somam dois ângulos retos, portanto *CA* está na mesma reta com a *AG.* Por este motivo *BA* também está sobre uma reta que *AH.*

Como o ângulo *DBC* é igual ao ângulo *FBA,* pois ambos são retos, somando o ângulo *ABC* a cada um deles, temos que o ângulo total *DBA é* igual ao ângulo total *FBC.*

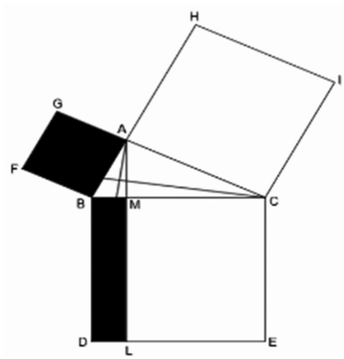
Figura 9 – Representação dos ângulos iguais



Fonte: Elaboração autoral

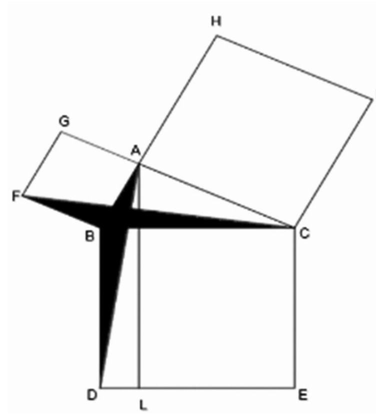
Visto que *DB* é igual a *BC* e *FB* é igual a *BA*, logo, as retas *DB* e *BA* são iguais as retas *FB* e *BC*, respectivamente, e o ângulo *DBA* é igual ao ângulo *FBC*, portanto, a base *AD* é igual a base FC, e o triângulo *DBA* é igual ao triângulo *FBC*. Esta igualdade se encontra na proposição P_4.

Figura 10 – Representação dos paralelogramos



Fonte: Elaboração autoral

Figura 11 – Triângulos iguais

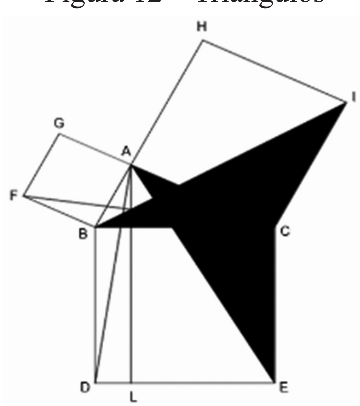


Fonte: Elaboração autoral

Por um lado, o paralelogramo *BDLM* (onde M é a intersecção de *AL* com *BC*) é o dobro do triângulo *ABD,* pois ambos têm a mesma base *BD* e estão sob as mesmas paralelas *BD* e *AL,* como mostrado na proposição P_{41} e P_{34}. E o quadrado *GBFA* é o dobro do triângulo *FBC,* pois têm novamente a mesma base *FB* e estão nas mesmas paralelas *FB* e *GC*. Portanto, o paralelogramo *BDLM* também é igual ao quadrado *GFBA*.

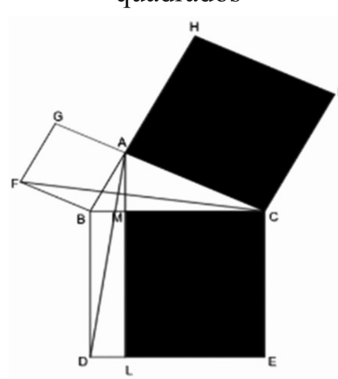
Do mesmo modo, se considerarmos *AE* e *BI,* também podemos provar que o paralelogramo *CMLE* é igual ao quadrado *HACI.*

Figura 12 – Triângulos



Fonte: Elaboração autoral

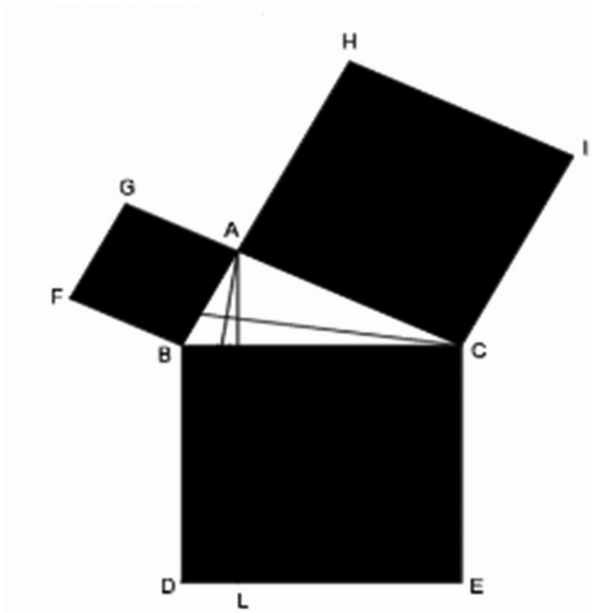
Figura 13 – Representação dos quadrados



Fonte: Elaboração autoral

Logo, o quadrado *BDEC* todo é igual à soma dos dois quadrados *GFBA* e *HACI*. E o quadrado *BDEC* está construído sobre *BC,* e os quadrados *GFBA* e *HACI* sobre *BA* e *AC,* respectivamente.

Figura 14 – Conclusão sobre os triângulos retângulos



Fonte: Elaboração autoral

Portanto, fica demonstrado que em triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto.

Seguindo nosso propósito, torna-se indispensável entendermos a organização praxeológica ou Praxeologia posta nos livros escolares. Os mesmos foram adotados pelas escolas em 2019 no município de Cametá estado do Pará Brasil.

Praxeologia do Teorema de Pitágoras nos livros escolares

Descrição de Organizações Matemáticas ou Praxeologias dos Livros Escolares

Selecionamos três livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, os quais abordam o tema Teorema de Pitágoras utilizados em escolas públicas no ano de 2019 do município de Cametá. O primeiro livro intitulado "Matemática Bianchini" de autoria de Edwaldo Bianchini (2015), o segundo "Matemática" de Eduardo Chavante (2015), e o terceiro "Matemática" de Luiz Roberto Dante (2015), os quais renomeamos, respectivamente, de Livro 1, Livro 2 e Livro 3.

No livro 1, capitulo 5 (Figura 15), tem como título Triângulos Retângulos, na primeira seção a chamada recorre a trechos de história de Pitágoras, na segunda trata de projeções ortogonais, a terceira de elementos de um triangulo retângulo.

Figura 15 – Organização proposta pelo autor do Livro 1

CAPÍTULO 5 Triângulos retângulos

Fonte: Livro 1

Destacamos que no tópico "Elementos de um triângulo retângulo" são nomeados os lados do triangulo retângulo de catetos e a hipotenusa, onde também apresenta observações no final da página (Figura 16) sobre as medidas dos ângulos internos de um triângulo e o caso AA (ângulo-ângulo).

Figura 16 – Observações apresentadas no livro

OBSERVAÇÕES

- Lembre-se de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, nos triângulos retângulos, a soma das medidas dos dois ângulos agudos de cada triângulo é 90°, ou seja, eles são complementares.
- Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então eles são triângulos semelhantes. Chamamos esse fato de caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança.

Fonte: Livro 1

Posteriormente apresenta na quarta seção, a relação denominada Teorema de Pitágoras, seguido de uma demonstração dessa relação por meio da equivalência de áreas (Figura 17).

Figura 17 – Demonstração apresentada no livro 1

Demonstração do teorema de Pitágoras

Existem mais de trezentas demonstrações do teorema de Pitágoras. Vamos apresentar uma que faz uso da equivalência de áreas.

Considerando um triângulo retângulo, construímos quadrados sobre a hipotenusa de medida a e sobre os catetos de medidas b e c, como mostra a figura 1. Nas figuras 2 e 3, construímos quadrados de lados que medem $(b + c)$.

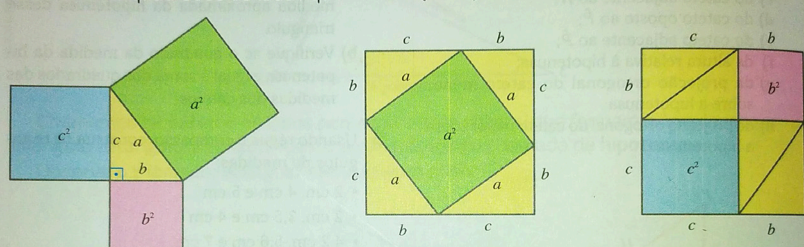


Figura 1 Figura 2 Figura 3

O quadrado da figura 2 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, e pelo quadrado verde. Assim, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado verde.

O quadrado da figura 3 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, pelo quadrado azul e pelo quadrado rosa. Então, a área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das áreas dos quatro triângulos com as áreas dos quadrados azul e rosa.

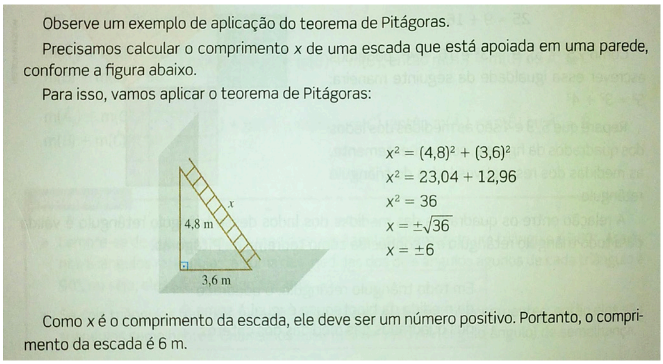
Logo, a área do quadrado verde é a soma da área do quadrado azul com a área do quadrado rosa, ou seja:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Fonte: Livro 1

Finaliza com uma aplicação (Figura 18) do referido teorema como um exemplo para calcular o comprimento de uma escada apoiada em uma parede, onde somente aplicam os dados da questão no modelo atual ($a^2 = b^2 + c^2$).

Figura 18 – Aplicação do teorema



Observe um exemplo de aplicação do teorema de Pitágoras.

Precisamos calcular o comprimento x de uma escada que está apoiada em uma parede, conforme a figura abaixo.

Para isso, vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

$x^2 = (4{,}8)^2 + (3{,}6)^2$

$x^2 = 23{,}04 + 12{,}96$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

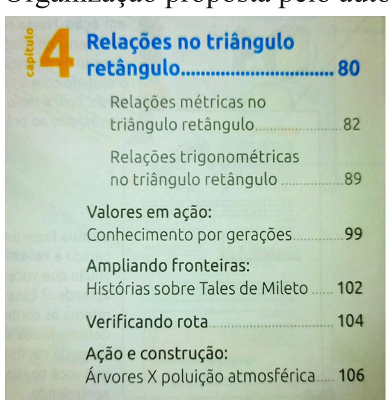
$x = \pm 6$

Como x é o comprimento da escada, ele deve ser um número positivo. Portanto, o comprimento da escada é 6 m.

Fonte: Livro 1

No livro 2, capitulo 4 (Figura 19) tem como título Relações no Triângulo Retângulo, a primeira seção trata das relações métricas no triângulo retângulo, a qual apresenta os elementos de um triangulo retângulo, com verificação de casos de semelhança de triângulo em seguida apresentam algumas relações métricas entre os triângulos.

Figura 19 – Organização proposta pelo autor do livro 2.



Fonte: Livro 2

As figuras 20 e 21 mostram as conclusões das verificações de semelhança.

Figura 20 – 1ª conclusão apresentada no livro

Quando dois triângulos possuem dois pares de ângulos internos congruentes, os triângulos são semelhantes.

Fonte: Livro 2

Figura 21 – 2ª conclusão apresentada no livro

Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em outros dois triângulos retângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.

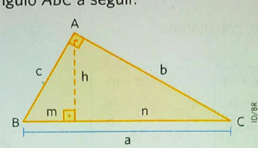
Fonte: Livro 2

Como uma subseção apresentam o Teorema de Pitágoras, na qual iniciam por breve histórico da vida de Pitágoras. Em seguida, fazem o uso do que foi apresentado no início da seção sobre relações métricas para realizar demonstração do teorema (Figura 22)

Figura 22: Demonstração apresentada no livro 2

Utilizando as relações métricas estudadas anteriormente, podemos demonstrar o teorema de Pitágoras.

Observe o triângulo retângulo ABC a seguir.



Das relações métricas estudadas, temos:

$\boxed{b^2 = a \cdot n}$ $\boxed{c^2 = a \cdot m}$

Adicionando membro a membro essas igualdades, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

Colocando o fator comum a do segundo membro da igualdade em evidência, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$$

Sabemos que $a = n + m$, assim, podemos escrever:

$$b^2 + c^2 = a \cdot (a)$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

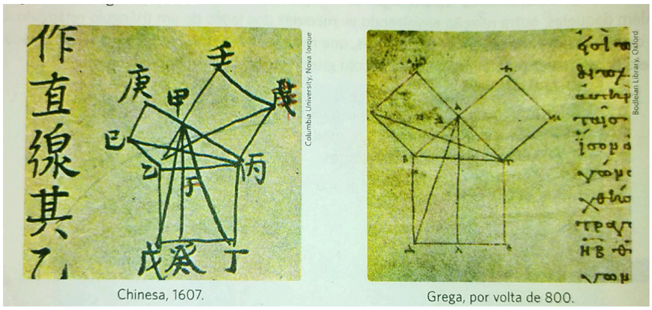
Portanto, em um triângulo retângulo de catetos com medidas b e c e hipotenusa com medida a, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Livro 2

Adiante apresentam outras demonstrações através imagens com registros históricos (Figura 23).

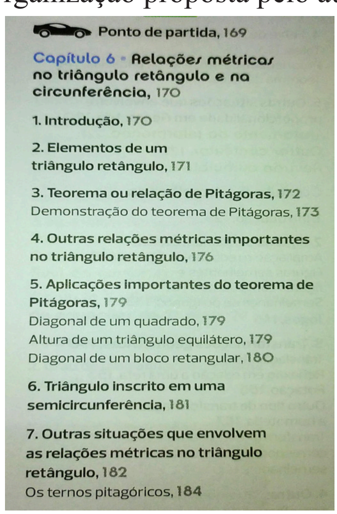
Figura 23 - Outras demonstrações do livro



Fonte: Livro 2

No livro 3, capitulo 6 (Figura 24) intitulado relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência, tem como primeira seção uma introdução onde é tratado o método denominado "esticadores de corda" que está relacionado com o Teorema de Pitágoras. Na segunda seção, apresentam os elementos do triangulo retângulo como catetos e hipotenusa, posteriormente a terceira seção chamada Teorema ou Relação de Pitágoras.

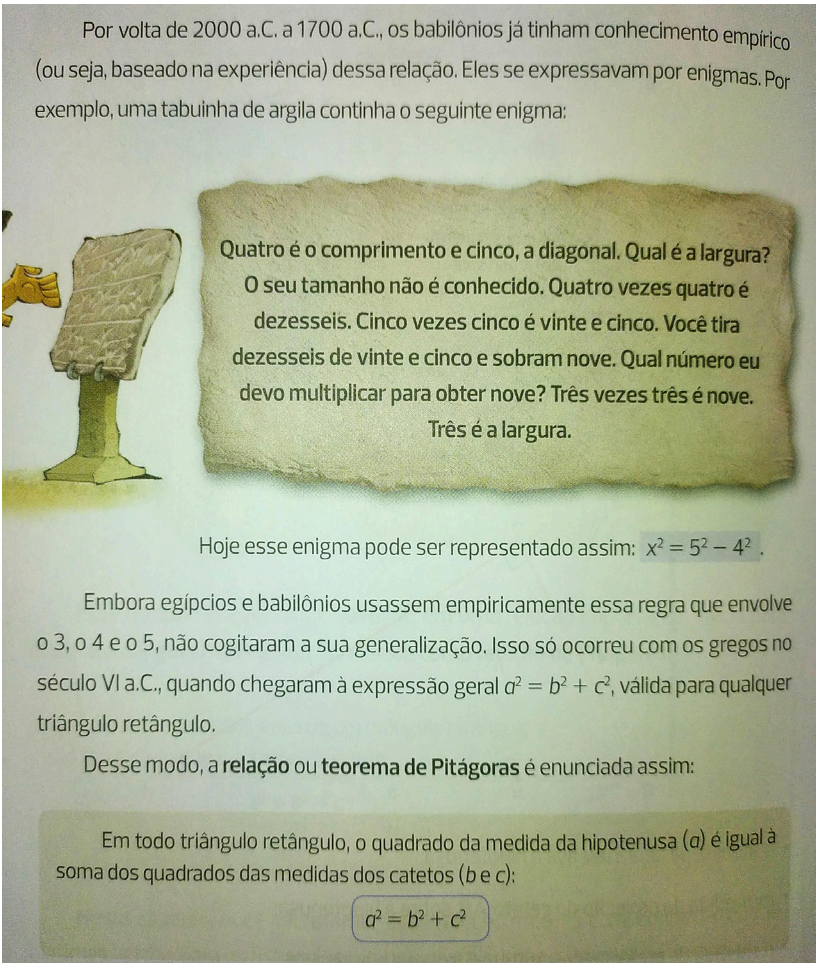
Figura 24 – Organização proposta pelo autor do livro 3



Fonte: Livro 3

Recorrendo a tópicos de História da Matemática (Figura 25), relatam que por volta de 2000 a.C a 1700 a.C os egípcios e babilônios já tinham conhecimento empírico dessa relação, mas sua generalização se deu por Pitágoras.

Figura 25 – Ilustração presente no livro 3



Por volta de 2000 a.C. a 1700 a.C., os babilônios já tinham conhecimento empírico (ou seja, baseado na experiência) dessa relação. Eles se expressavam por enigmas. Por exemplo, uma tabuinha de argila continha o seguinte enigma:

Quatro é o comprimento e cinco, a diagonal. Qual é a largura? O seu tamanho não é conhecido. Quatro vezes quatro é dezesseis. Cinco vezes cinco é vinte e cinco. Você tira dezesseis de vinte e cinco e sobram nove. Qual número eu devo multiplicar para obter nove? Três vezes três é nove. Três é a largura.

Hoje esse enigma pode ser representado assim: $x^2 = 5^2 - 4^2$.

Embora egípcios e babilônios usassem empiricamente essa regra que envolve o 3, o 4 e o 5, não cogitaram a sua generalização. Isso só ocorreu com os gregos no século VI a.C., quando chegaram à expressão geral $a^2 = b^2 + c^2$, válida para qualquer triângulo retângulo.

Desse modo, a **relação** ou **teorema de Pitágoras** é enunciada assim:

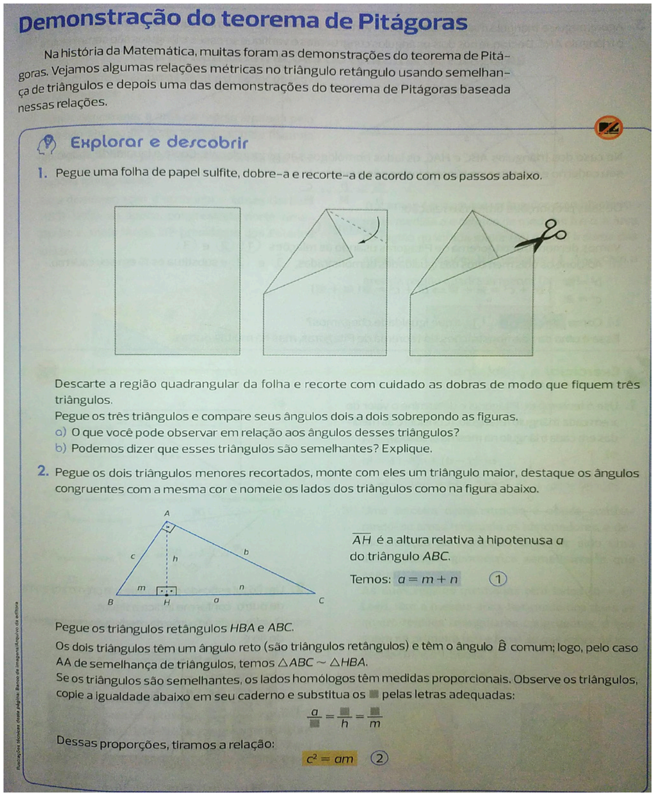
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (b e c):

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Fonte: Livro 3

Seguidamente, apresentam outras relações métricas e a demonstração do teorema de Pitágoras (Figuras 26 e 27), finalizando com aplicações do teorema e outras demonstrações do teorema.

Figura 26 - Demonstração apresentada no livro 3



Demonstração do teorema de Pitágoras

Na história da Matemática, muitas foram as demonstrações do teorema de Pitágoras. Vejamos algumas relações métricas no triângulo retângulo usando semelhança de triângulos e depois uma das demonstrações do teorema de Pitágoras baseada nessas relações.

Explorar e descobrir

1. Pegue uma folha de papel sulfite, dobre-a e recorte-a de acordo com os passos abaixo.

Descarte a região quadrangular da folha e recorte com cuidado as dobras de modo que fiquem três triângulos.

Pegue os três triângulos e compare seus ângulos dois a dois sobrepondo as figuras.

a) O que você pode observar em relação aos ângulos desses triângulos?

b) Podemos dizer que esses triângulos são semelhantes? Explique.

2. Pegue os dois triângulos menores recortados, monte com eles um triângulo maior, destaque os ângulos congruentes com a mesma cor e nomeie os lados dos triângulos como na figura abaixo.

$\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa a do triângulo ABC.

Temos: $a = m + n$ (1)

Pegue os triângulos retângulos HBA e ABC.

Os dois triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\hat{B}$ comum; logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Se os triângulos são semelhantes, os lados homólogos têm medidas proporcionais. Observe os triângulos, copie a igualdade abaixo em seu caderno e substitua os ■ pelas letras adequadas:

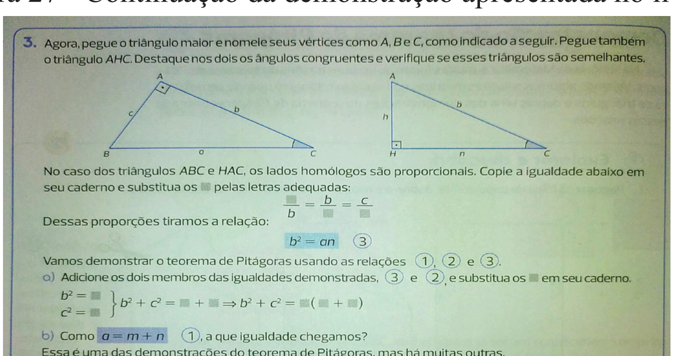
$$\frac{a}{■} = \frac{■}{h} = \frac{■}{m}$$

Dessas proporções, tiramos a relação:

$c^2 = am$ (2)

Fonte: Livro 3

Figura 27 - Continuação da demonstração apresentada no livro 3



3. Agora, pegue o triângulo maior e nomeie seus vértices como A, B e C, como indicado a seguir. Pegue também o triângulo AHC. Destaque nos dois os ângulos congruentes e verifique se esses triângulos são semelhantes.

No caso dos triângulos ABC e HAC, os lados homólogos são proporcionais. Copie a igualdade abaixo em seu caderno e substitua os ■ pelas letras adequadas:

$$\frac{■}{b} = \frac{b}{■} = \frac{c}{■}$$

Dessas proporções tiramos a relação:

$b^2 = an$ (3)

Vamos demonstrar o teorema de Pitágoras usando as relações (1), (2) e (3).

a) Adicione os dois membros das igualdades demonstradas, (3) e (2), e substitua os ■ em seu caderno.

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = ■ \\ c^2 = ■ \end{array}\right\} b^2 + c^2 = ■ + ■ \Rightarrow b^2 + c^2 = ■(■ + ■)$$

b) Como $a = m + n$ (1), a que igualdade chegamos?

Essa é uma das demonstrações do teorema de Pitágoras, mas há muitas outras.

Fonte: Livro 3

Como podemos notar, cada livro apresenta apenas uma praxeologia. A seguir pretendemos elucidar analisando as praxeologias dos livros selecionados a partir do MER.

Análise dos Livros Escolares

Como podemos observar, os livros parecem não seguir um modelo epistemológico de referência para o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras, ou caso exista é completamente transparente.

Comparado ao modelo que estamos adotando, percebemos que não há uma correspondência isomorfa de desenvolvimento do Teorema de Pitágoras, se assim podemos dizer, há um distanciamento quando comparado ao fazer matemático desenvolvido por Euclides, ou seja, nenhum deles apresenta o modelo de Euclides como fundamento matemático, se quer o menciona, somente apresentam a aplicação do Teorema de Pitágoras em situações em contextos específicos.

Não se mencionam os “axiomas” necessários para o desenvolvimento posterior da teoria sobre triângulos. Percebemos que os livros apresentam diretamente os elementos do triangulo como catetos e hipotenusa. O livro 1, por exemplo, apresenta a título de observações que a soma das medidas dos ângulos internos de um triangulo é 180º, e também o caso de AA (ângulo-ângulo), como foi observado anteriormente, para seguir para o Teorema de Pitágoras como aplicação da relação entre os lados do triangulo retângulo.

O livro 2 também não está de acordo com o MER, antes de seguir com o teorema ainda tentam apresentar algumas demonstrações relacionada a semelhança de triângulos, como notamos nas conclusões apresentadas pelo autor nas figuras 28 e 29.

Figura 28 – 1ª conclusão apresentada no livro

Quando dois triângulos possuem dois pares de ângulos internos congruentes, os triângulos são semelhantes.

Fonte: Livro 2

Figura 29 – 2ª conclusão apresentada no livro

Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em outros dois triângulos retângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.

Fonte: Livro 2

O livro 3 apresenta somente aplicações do Teorema, com outras demonstrações como por exemplo a feita por Bhaskara, sendo o livro que menos se aproxima do modelo apresentado neste trabalho.

No próximo tópico, procuramos construir uma proposta de modelo epistemológico escolar no sentido de reinterpretar o modelo escolar vigente.

(Re)interpretação da praxeologia do Teorema de Pitágoras como modelo epistemológico de referencia escolar (MER)$_E$

Com base na investigação realizada anteriormente nos livros escolares escolhidos e no MER assumido, podemos propor uma (re)interpretação do modelo praxeológico escolar do Teorema de Pitágoras. Os livros no geral iniciam com estudo do triangulo retangulo apresentando um ângulo reto, seguido dos elementos cateto e hipotenusa, como também da altura relativa à hipotenusa para, em seguida, apresentar algumas relações importantes entre as medidas dos lados do triangulo.

Os Livros 2 e 3 apresentam relações entre as medidas dos lados do triângulo consideradas importantes, para posteriormente utiliza-las na demonstração do Teorema de Pitágoras, sendo que o livro 2 apresenta mais detalhadamente. Já o livro 1, faz demonstração do Teorema através da equivalência de áreas, exemplificando através de 3 figuras distintas, seguido da forma geral do Teorema ().

O livro 1, comenta brevemente sobre triângulos semelhantes, como também o caso de AA (ângulo-ângulo), para seguir exemplifica o teorema através da figura de quadradinhos. O livro 2, inicia diretamente sobre as relações métricas do triangulo retângulo, apresentando detalhadamente a verificação de três triângulos semelhantes, e ainda estabelece as relações métricas entre eles.

Posteriormente, segue para o Teorema de Pitágoras, onde enuncia o mesmo e faz o uso das relações anteriores para seguir a demonstração. O livro 3 exemplifica o Teorema através da figura de quadradinhos, como enunciam o teorema, para seguir para demonstração sugerem uma exploração fazendo com que o aluno trabalhe através uma folha de papel, onde indica o que será realizado para indicar as relações métricas presentes, como também menciona o caso AA (ângulo-ângulo), para fazer a demonstração através das relações apresentadas, sendo que no próximo tópico do livro, destacam-se as principais relações métricas.

Através dessa investigação, percebemos que o modelo escolar presente nos livros se distancia do modelo de Euclides apresentado neste trabalho. Nos livros, quase não há prática de demonstrações dos conteúdos, até mesmo do próprio teorema de Pitágoras, apresentam de forma direta. Desse modo, ao fazermos uma releitura do modelo escolar podemos dizer que através do novo modelo que aqui chamamos de $(MER)_{E,}$ poderia ser explorado a estrutura de desenvolvimento utilizada no modelo proposto por Euclides. Como por exemplo os livros somente apresentam brevemente os casos de semelhança (Figuras 30 e 31), o que vem em forma de observação, e que deveria ser mais explorado.

Figura 30 – Observações apresentadas no livro

OBSERVAÇÕES

- Lembre-se de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, nos triângulos retângulos, a soma das medidas dos dois ângulos agudos de cada triângulo é 90°, ou seja, eles são complementares.
- Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então eles são triângulos semelhantes. Chamamos esse fato de caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança.

Fonte: Livro 3

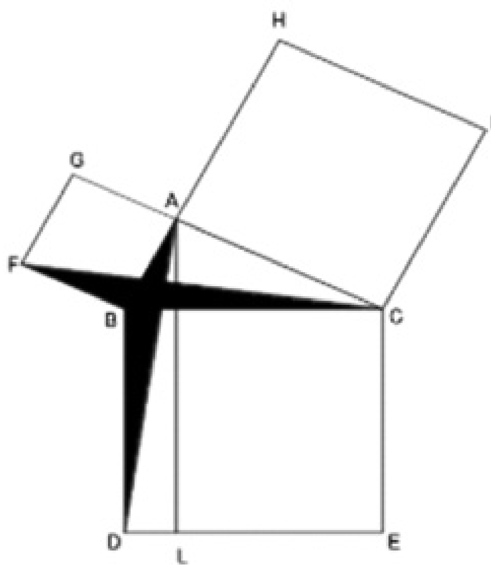
Figura 31 – Observação comentada no livro

Os dois triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\hat{B}$ comum; logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Fonte: Livro 3

Na demonstração do Teorema de Pitágoras, para representar os ângulos iguais (Figura 32), Euclides apresenta um caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado), que está na proposição 4 que tem como enunciado "*Se dois triângulos apresentam respectivamente dois lados iguais, e se o ângulo contido por estes dois lados forem iguais, então eles também terão suas bases iguais. Consequentemente os triângulos serão iguais e os ângulos restantes também.",* ou seja, os livros escolares deveriam explorar minuciosamente essas demonstrações com os axiomas necessários para o Teorema de Pitágoras ficar mais claro e evidente, e não somente trazer como observações.

Figura 32 – Representação dos ângulos iguais



Fonte: Elaboração autoral

Assim como na demonstração feita por Euclides, por se tratar de um teorema considerado importante para a Matemática, o Teorema de Pitágoras proposto nos livros didáticos poderia ser mais estudado, apresentar de forma evidente quais os procedimentos/passos necessários para uma demonstração mais concisa.

Portanto, longe de nossos propósitos propor um modelo único para escola que contemple a plenitude do estudo em Geometria, mas sim aproximar as possibilidades de (re)interpretação do conteúdo Teorema de Pitágoras em termos de praxeologias que priorize o fazer matemático no contexto escolar, que aqui denominamos $(MER)_E$ e contribuir para a promoção do ensino de qualidade e autônomo.

Considerações finais

Esperamos que este trabalho possa contribuir para uma reflexão sobre o fazer docente a respeito do tema Geometria como por exemplo o estudo do Teorema de Pitágoras visto que seu desenvolvimento nos proporcionou investigar como se dá uma Organização Matemática ou Praxelogia presente em livros adotados nas escolas, mais especificamente, nos promoveu um estudo detalhado do modelo escolar "Teorema de Pitágoras" vigente, considerando que se trata de um assunto recorrente em aplicações em diferentes áreas do conhecimento, além de permitir apresentar algumas formas de demonstração as quais, como vimos, quase não são exploradas nas praxeologias pelos autores dos livros.

Para tanto, achamos necessário destacar alguns elementos históricos sobre o Teorema de Pitágoras para que possamos situá-lo no tempo, a noção de MER que nos ajudou a (re)interpretar o modelo escolar vigente, de forma que tornou-se possível usar a proposição 47 do livro 1 de Euclides, bem como explorar os axiomas necessários para a demonstração de tal. A análise da praxeologia do Teorema de Pitágoras presente em livros escolares do 9º ano vigentes no ano de 2019 no município de Cametá/PA, permitiu ousar construir e propor uma (re)interpretação que denominamos Modelo Escolar de Referencia $(MER)_E$ para o estudo do Teorema de Pitágoras.

Desse modo, tentamos construir através deste estudo investigativo um modelo epistemológico de referência, como um instrumento que pode permitir o questionamento do saber ensinado em manuais escolares à medida que nos levou a propor elementos de um modelo possível para o estudo do Teorema de Pitágoras.

Quanto à questão inicial proposta - *Como construir uma transposição didática do modelo apresentado por Euclides do Teorema* *de Pitágoras como Modelo Epistemológico de Referência para o contexto escolar?* - parece ter uma resposta ainda não definitiva, embora este estudo já encaminhe alguns fundamentos necessários para construção de um modelo escolar ainda que em estado embrionário: a transposição didática corporificada no $(MER)_E$.

Portanto, o estudo do tema que abordamos – a Praxeologia do Teorema de Pitágoras - apontou uma urgente necessidade de um modelo epistemológico de referência escolar para permitir o levantamento de questões sobre modelos de estudo de qualquer tema da Matemática Escolar presente nos manuais escolares, de forma que possa fazer uma adequação/interpretação razoável em modelos para ajudar na compreensão dos objetos matemáticos de ensino, como o que foi aqui discutido. Nesse sentido, temos clareza que o tema requer aprofundamentos em trabalhos futuros.

Referências

ALMEIDA, Maysa Leite; GUERRA, Renato Borges. Análise praxeológica das práticas de resolução de equações do primeiro grau Pragmatic analysis of first-degree equation resolution practices. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 21, n. 5, p.412-427, 2019.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini*. 9º ano.8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BICUDO, Irineu. *Os elementos/Euclides*. Tradução e introdução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF: MEC/ SEB, 2018.

CAPITANI, C. R.; BIAZIN, A. C. B. Explorando diferentes demonstrações do teorema de Pitágoras na formação de novos professores. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Curitiba – Paraná. *Anais* do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. *Convergências: matemática*: ensino fundamental – 9º ano. São Paulo: Edições SM, 2015.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. *Projeto Teláris: matemática*: ensino fundamental 2 – 9º ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Raquel Soares do Regô. *Tarefas Intermediárias: Um modelo epistemológico de referência para o ensino das frações.* 2014. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

KILHIAN, Kleber. *O teorema de Pitágoras segundo Euclides* – a proposição I-47. Disponível em: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.html. Acesso em: 02 mar. 2020.

LEAL, Rodrigo Amaral; NUNES, Rondineli dos Anjos; SOUSA, Wildson Pombo; ARAUJO, Steve Wanderson Calheiro de. *O teorema de Pitágoras e suas demonstrações em sala de aula.* 2016. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/Rodinelli-artigo-final.pdf. Acesso em: 20 mai. 2020

MIORIM, M. ÂNGELA. O Teorema de Pitágoras em livros didáticos. *Revista de Educação Matemática*, v. 6, n. 4, p. 5-14, 1998.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Ana Cristina Marques. *Prova matemática, verdade e axiomática*: um olhar sobre Frege e Hubert. 2006. 113 f. Tese (Mestrado) - Ensino da Matemática, Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.

Matemática e música:
uma proposta interdisciplinar para o ensino de fração

Manoel Junior Wanzeler Pompeu

Rubenvaldo Monteiro Pereira

Resumo

O presente trabalho relaciona duas áreas do conhecimento que aparentemente são distintas, mas que possuem inúmeras relações: matemática e música. Nele, apresentamos uma proposta para um ensino interdisciplinar entre essas duas ciências, de modo que a música, em especial a construção da escala musical pitagórica possa ser utilizada como um recurso didático/educacional para o ensino do conteúdo fração. O método de coleta de dados foi obtido através de uma pesquisa bibliográfica baseada em documentos de caráter científico, como artigos, dissertações de mestrado, entre outros. Para o desenvolvimento do trabalho, fizemos uma abordagem de alguns aspectos históricos das relações entre esses dois saberes, desde Pitágoras e seu experimento com o monocórdio, até trabalhos mais recentes, onde utilizaram dessas relações entre essas duas áreas do conhecimento no processo de ensino e aprendizagem. Assim, essa proposta interdisciplinar das relações entre a matemática e a música vai de encontro com uma série de trabalhos exitosos, onde buscaram utilizar a música para auxiliar na compreensão e como motivadora para aproximar os alunos da matemática.

Palavras-chave

Matemática. Música. Fração.

Introdução

Visando a adequação do ensino de matemática, inúmeros estudos pedagógicos destacam diferentes formas de ensinar. Nesse sentido, vários educadores têm buscado novos métodos para tornar as aulas de matemática mais significativas, causando, assim efetividade no ensino. Dentre esses métodos, podemos destacar: resolução de problemas, modelagem matemática, etnomatemática, jogos matemáticos, entre outros.

Essas novas metodologias de ensino buscam relacionar os conteúdos, de forma a ampliar o horizonte dos educandos, mostrando aplicações e relações da matemática com outras áreas do conhecimento. Essa perspectiva surge como uma forma de superar a fragmentação entre as disciplinas, proporcionando, assim, um diálogo entre elas. Esta interação entre disciplinas, aparentemente distintas no processo de ensino e aprendizagem é a chamada interdisciplinaridade.

A interdisciplinaridade é uma orientação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) para o Ensino Médio, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), cujo objetivo é fazer da sala de aula mais que um espaço para, simplesmente absorver e decorar informações. O ensino interdisciplinar implica na articulação de ações disciplinares que buscam um interesse em comum. Além disso, visa garantir a construção de um conhecimento globalizante, rompendo com os limites das disciplinas.

Diante disso, propomos nesse trabalho, uma maneira mais dinâmica de ensinar fração. Trata-se de um ensino interdisciplinar entre duas áreas do saber: matemática e música. Para a elaboração desse trabalho, primeiramente foi feito um levantamento bibliográfico, onde constatamos a existência de inúmeros trabalhos exitosos em que objetivaram aproximar a matemática e a música. Ficou evidente que explorar as relações existentes entre esses dois saberes, seja do ponto de vista de utilizar a música como um recurso didático no ensino da matemática ou ainda, usar a matemática para explicar conceitos musicais, torna-se uma estratégia eficaz no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, investigamos as relações entre essas duas áreas do conhecimento ao longo da história, e mais ainda, os benefícios para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos dentro das salas de aula que podem ser alcançados com o uso dessas relações. Em seguida, chagamos ao objetivo central do trabalho, que é apresentar a construção da escala musical pitagórica como um recurso didático/educacional para o ensino de frações. Buscamos ainda, propor como o professor (ainda que não possua um conhecimento significativo sobre a música) possa ensinar o conteúdo fração, utilizando a construção da escala pitagórica em vez de barras de chocolate, bolos e pizzas.

Portanto, optamos em utilizar a música como um recurso didático para o ensino de matemática, por ser, esta, capaz de despertar diversas emoções, como motivar, aguçar a curiosidade, estimular e prender a atenção, entre outras coisas. Sampaio (2017) ressalta que "[...] a música evoca humor e emoção por meio de áudio de tons e ritmos sem recorrer a meios circunstanciais de provocar tais reações humanas inatas". Desse modo, esperamos que a música desempenhe o papel de dar à matemática um sentido mais lúdico, um ensino mais dinâmico, e com isso, melhorar a relação que os alunos têm com a mesma.

Matemática e música

A seguir, apresentaremos alguns aspectos históricos das relações entre matemática e música. Apresentaremos também alguns autores que defendem o uso dessas relações no processo de ensino e aprendizagem, tanto no sentido de utilizar a música para tornar os conteúdos matemáticos mais lúdicos e vice-versa e, assim, facilitar no entendimento de ambos.

Aspectos históricos

Matemática e música são linguagens universais, pois, em todos os lugares as pessoas fazem matemática e música. A matemática faz parte da vida do homem desde que se tem notícia da sua existência, seja em uma simples contagem de tempo ou de objetos, quanto na delimitação de territórios. Da mesma forma, a música sempre esteve presente na cultura humana, como por exemplo, em festividades religiosas ou profanas.

Embora essas duas áreas do saber pareçam distintas, a música está intimamente relacionada com a matemática, por ser, esta, cunhada sobre métricas[1], seja na marcação de tempo ou na elaboração de escalas musicais. Além disso, qualquer pessoa que estudar teoria musical irá constatar que existe uma forte relação entre matemática e música, pois é imprescindível ter o conhecimento de fração até mesmo para solfejar (OLIVEIRA; SABBA, 2013).

As primeiras relações que se têm notícias entre essas duas ciências, ocorreram ainda na antiguidade, pois alguns dos primeiros pesquisadores de música eram matemáticos. Segundo Boyer (1996) o primeiro registro realmente que estabelece associação entre matemática e a música, ocorre por volta do século VI a. C. na Grécia Antiga, na Escola Pitagórica. Através de um instrumento de uma corda, os pitagóricos relacionaram os intervalos musicais com o conceito de fração, isto é, eles descobriram relações entre sons harmoniosos e razões de números inteiros simples.

Arquitas de Tarento (430-380 a. C.) estudava as relações entre matemática e música para estabelecer a afinação de seu instrumento, a lira. Além destes, muitos outros matemáticos dedicaram-se a estudar a música, estabelecendo uma série de relações entre essas duas ciências. "Aristóteles afirmava que 'Todo o céu é número e harmonia ' e Leibniz dizia que 'a música é um exercício oculto da aritmética de uma alma inconsciente que lida com números' " (OLEGÁRIO; ANDRADE, 2013).

Rossi (2008) destaca ainda outras relações entre matemática e música estudadas ao longo da história. Ela diz que:

> Arquitas de Tarento que foi o primeiro a caracterizar o fenômeno sonoro como resultado de pulsações de ar que produziam sons mais agudos à medida que se tornavam mais rápidas, prenunciando a relação de frequência com altura musical, formalizada em 1638 por Galileu; Mersenne, deduziu a fórmula que

[1] Em música, é a divisão de uma linha musical em compassos marcados por tempos fortes e fracos, representada na notação musical ocidental por um símbolo chamado de fórmula de compasso

> expressa a frequência de vibração da corda em função de seu comprimento, densidade linear e sua tensão; B. Taylor foi o primeiro a calcular o período fundamental de uma corda vibrante; Johan Bernoulli que estabeleceu a primeira análise de configuração de uma pequena deformação da corda vibrante com um peso. (ROSSI, 2008, p. 4)

Além disso, há ainda outras evidências das relações existentes entre esses dois saberes. Segundo Rossi (2008) até o século XV, a música, juntamente com a Aritmética, a Geometria e a Astronomia compunham o *Quadrivium*[2]. Assim, as ciências matemáticas eram caracterizadas da seguinte maneira: Aritmética (quantidade discreta estática), Geometria (Grandeza estacionária), Astronomia (grandeza dinâmica) e música (quantidade discreta em movimento) (OLEGÁRIO; ANDRADE, 2013).

As relações entre matemática e música no processo de ensino e aprendizagem

Explorar as relações entre a matemática e a música de um modo interdisciplinar no processo de ensino e aprendizagem tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores, especialmente na atualidade. Miritz (2015) afirma que “a partir da música é possível ilustrar a matemática e tornar seu aprendizado mais divertido e prazeroso”. Ainda segundo o autor, a música auxilia na aproximação entre os alunos e a matemática, por tratar-se de um recurso interessante e de uma atividade educacional enriquecedora.

No intuito de tornar o processo de ensino e aprendizagem mais eficaz, nas últimas décadas, podemos encontrar inúmeros trabalhos exitosos que buscaram explorar as relações existentes entre esses dois saberes. No âmbito educacional, a música tem sido utilizada como recurso didático no ensino de matemática e, esta, por sua vez, tem sido utilizada para um melhor entendimento de conceitos musicais.

---

[2] Era o nome dado ao conjunto de quatro matérias (aritmética, geometria, astronomia e música) ensinadas nas universidades [helénicas] na fase inicial do percurso educativo, cujo ápice eram as disciplinas teológicas.

É inegável que a teoria musical, como uma ferramenta didático/educacional para ensino de matemática tem se mostrado ser eficiente quando levado para as salas de aulas. Vários pesquisadores recorrem ao uso desse recurso interdisciplinar. Miritz (2015), em seu trabalho intitulado Matemática e Música, diz que:

> A relação estabelecida pelos pensadores que viveram entre os séculos XVI e XVII, que associava a música com a matemática, quando remetida a realidade de hoje, torna possível e interessante o uso, em sala de aula, dos dois assuntos como motivadores para o entendimento de conceitos matemáticos. (MIRITZ, 2015, p. 14)

Uma das dificuldades que os educadores encontram nas salas de aula é a construção de uma aprendizagem mais significativa. É notório que existem dificuldades de relacionar o que é ensinado ao uso prático e isso acarreta na falta de interesse e motivação nos alunos, pois estes não conseguem ver utilidade naquilo que é ensinado. Nesse sentido, na busca por um aprendizado significativo, Fonseca (2013) ressalta a importância de ser explorada essa relação interdisciplinar entre matemática e música em sala de aula. Para ele:

> O estudo das relações entre matemática e música aponta-nos para mudanças, reforçando o aprendizado interdisciplinar e proporcionando ao aluno um conhecimento mais amplo da matemática e da música, e finalmente retirando a matemática de um campo puramente abstrato e distante do necessário em nossa vida cotidiana e/ou acadêmica. (FONSECA, 2013, p. 13)

Desse modo, tanto Fonseca (2013) quanto Miritz (2015) concordam quanto à efetividade da música na aprendizagem de matemática. Para eles, o uso da música como ferramenta didática minimiza o grau de abstração de conceitos matemáticos, são motivadores, despertando no aluno um interesse que outrora não existia, pois agora estes conseguem ver utilidade naquilo que estudam, tornando, assim, o ensino mais dinâmico. Aguiar (2016) reforça que:

> Fazer um caminho entre a Matemática e a Música através da Educação pode ser prazeroso para o aluno e para o professor, já que a Música está ligada ao sentimento para a maioria das pessoas e a Matemática muitas vezes é uma decepção quando não se consegue aprender ou ensinar. (AGUIAR, 2016, p. 16)

Outrossim, a música quando bem trabalhada em sala de aula pode proporcionar inúmeros benefícios, como por exemplo, desenvolve o raciocínio, criatividade e é capaz de motivar e atrair a atenção dos alunos. Assim, é importante aproveitar esta tão rica atividade educacional dentro das salas de aula. Além disso, a música é capaz de ampliar e facilitar o aprendizado do aluno, pois os ensina a ouvir e a escutar de maneira refletida (CAVALCANTI; LINS, 2010). Dessa forma, segundo os autores, na sala de aula, a música é um instrumento de grande importância para uma aprendizagem mais significativa.

Para Pillão (2009), uma possível forma de ensinar e aprender matemática com criatividade encontra-se no uso das relações entre matemática e música. Pedagogicamente a música é um recurso que enriquece o processo educacional e possui um grande valor artístico, estético, cognitivo e emocional, oferecendo assim inúmeros recursos interdisciplinares que podem e devem ser explorados em sala de aula.

Portanto, fica evidente que para ter efetividade, o ensino da matemática precisa ser interativo, atrativo e prazeroso. Nesse sentido, a música entra como um instrumento motivador, capaz de desempenhar esse papel de mediador, aproximando os alunos da matemática. Assim, cabe ao professor buscar alternativas didáticas capazes de atrair a atenção, despertar o interesse, mostrando sempre a utilidade dos conceitos matemáticos numa relação entre teoria e prática.

As relações entre os sons musicais e os números fracionários

Nessa seção, apresentamos os passos que Pitágoras, um famoso cientista da antiguidade utilizou, onde associou a matemática com a música pela primeira vez. Em seguida, mostraremos uma possível maneira que um professor de matemática (ainda que não possua conhecimento significativo em relação à música) possa trabalhar com as relações existentes entre essas ciências em sala de aula, no sentido de que a música (em especial a construção da escala musical pitagórica) possa ser um instrumento capaz de auxiliar no ensino de fração. Não esperemos que a música sozinha explique a matemática, mas que desempenhe o papel de motivar, despertar um maior interesse e prender a atenção dos alunos no ensino desse conteúdo.

A descoberta de Pitágoras

Segundo Pereira (2013), existe uma lenda contada por Guido D'Arezzo, no tratado sobre música intitulado *Micrologus*[3], que retrata como possivelmente Pitágoras (572-497 a. C) veio a estabelecer a primeira relação entre os números e sons. Além de filósofo, Pitágoras também é conhecido na matemática, em especial por um famoso teorema que recebeu o seu nome, o Teorema de Pitágoras, que trata dos lados de um triângulo retângulo. No entanto, muitos desconhecem que além da matemática e filosofia, Pitágoras contribuiu com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a música.

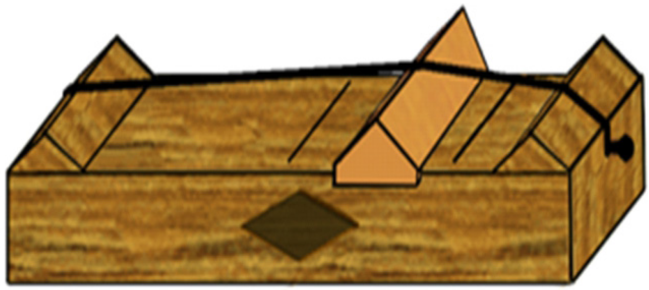
Segundo a lenda, Pitágoras passou em frente a uma oficina de ferreiro e ouviu sons produzidos por martelos batendo em uma bigorna. Então, ele pôde perceber que alguns sons, quando ouvidos simultaneamente eram agradáveis aos ouvidos, já outros, eram sons dissonantes (ruidosos). Esse fenômeno despertou o interesse de Pitágoras que logo resolveu investigar quais seriam as propriedades que permitiam que dois martelos ao baterem na bigorna soassem bem e outros dois não. Para isso, ele decidiu pesar os martelos, descobrindo então que entre os dois que soavam bem, havia uma relação entre os seus pesos na ordem de 1 para 2, isto é, um deles possuía o dobro do peso do outro.

Pitágoras resolveu investigar mais a fundo essa relação, e para isso, utilizou um instrumento que provavelmente ele mesmo tenha construído, denominado monocórdio (mono = um, córdio = corda). Trata-se de um instrumento constituído de uma base de madeira,

[3] Retirado de http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat

dois cavaletes fixos em cada uma das extremidades da base, uma corda esticada sobre esses cavaletes e um terceiro cavalete móvel sob a corda, conforme a figura a seguir.

Figura 1 – Modelo monocórdio de Pitágoras



Fonte: Google imagens. Acesso em: 19 maio 2020.

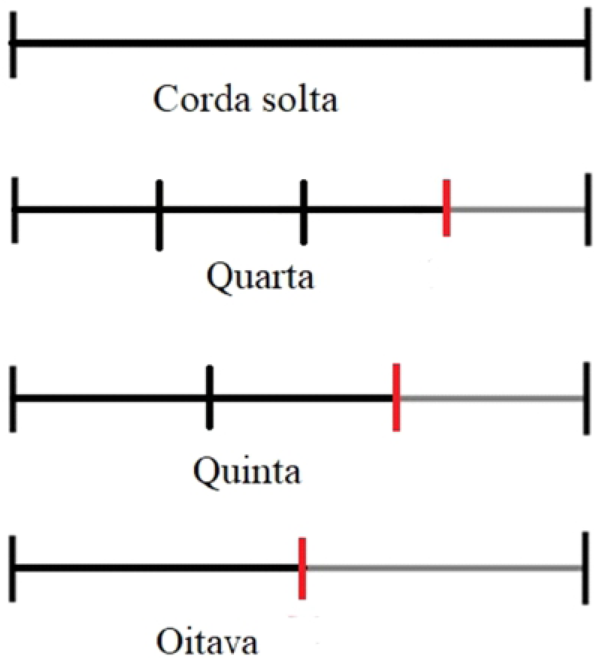
Esse instrumento possibilitou que Pitágoras ouvisse o som de uma corda pressionada e tocada em diferentes pontos simplesmente deslocando o cavalete móvel. Após isso, o mesmo marcava os pontos onde os sons eram agradáveis ou desagradáveis. Com esse experimento Pitágoras descobriu que a altura[4] de uma nota musical dependia do comprimento da corda que a produz. Em suma, o que se investigou foi a relação entre comprimentos de cordas e os sons consonantes.

Pitágoras percebeu que pressionando a corda exatamente a sua metade, o som que esta produzia era equivalente ao som da corda solta, porém, tratava-se de um som mais agudo, o que hoje é conhecido como oitava (essa relação é semelhante àquela dos dois martelos em que um pesava o dobro do outro). Do mesmo modo, quando a corda era dividida em três partes e, pressionada exatamente a dois terços do seu comprimento e em seguida tocando-a, o som produzido possuía alguma semelhança com o som da corda solta, o que conhecemos hoje como quinta. Descobriu ainda que pressionando a corda a exatos três quartos de seu comprimento, o som produzido possuía também semelhanças com o som da corda solta, o que chamamos hoje de quarta. Assim, esses intervalos passaram a ser denominados de consonâncias pitagóricas perfeitas.

[4] Propriedade do som de ser grave, médio ou agudo.

Observe a figura 2.

Figura 2 - Consonâncias pitagóricas perfeitas

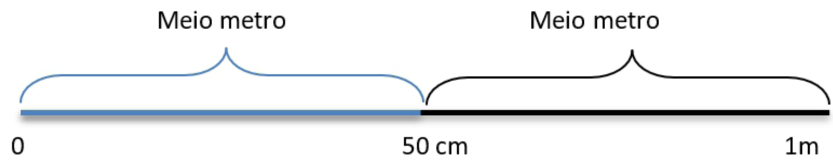


Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Motivação

Vimos que Pitágoras utilizou um instrumento de uma só corda em seus experimentos, o monocórdio. O experimento consistia em fazer marcações em várias partes da corda e então, pressioná-la sobre o cavalete exatamente nessas marcações e tocá-la. Em seguida, verificar se os sons eram agradáveis ou não aos ouvidos.

Imagine que a corda utilizada nesse experimento tenha certa unidade de comprimento, vamos supor que tal medida seja de um metro. Para encontrar, por exemplo, a oitava, Pitágoras dividiu a corda em sua metade. Ao fazer isso a corda resultou em duas partes iguais. Cada metade medindo meio metro ou 50 centímetros.



Por outro lado, para encontrar a quinta, por exemplo, Pitágoras dividiu a corda em três partes iguais tomando duas dessas partes.

Quantos centímetros teriam cada uma das partes dessa corda em que foi dividida, já que $3 \times 33 = 99$ e $3 \times 34 = 102$, e em um metro cabem apenas 100cm? Por certo que a resposta seria um número que estivesse entre 33 e 34, mas sabemos que no conjunto dos números naturais não existe tal número. Então, como poderíamos medir ou representar o comprimento que Pitágoras utilizou para determinar essa quinta? Quais números Pitágoras utilizou na construção de sua escala?

As frações

Ainda na antiguidade o seu humano já havia percebido que os números naturais não seriam o suficiente para a representação de qualquer quantidade ou medida. Desse modo, houve a necessidade de números que pudessem representar aquilo o que os números naturais não conseguiam. Para isso, o homem criou as Frações (do latim *fractus* = "partido", "quebrado"). As frações fazem parte de um conjunto de números chamado números racionais e estão presentes em nosso cotidiano, e em geral, usamos para representar a parte de um todo. Todo número natural pode ser escrito na forma de fração a/b, onde a e b são números naturais, com $b \neq 0$. De maneira geral podemos dizer que uma fração é uma parte de um inteiro que foi dividido em b partes iguais.

Uma fração tem dois termos, um numerador e um denominador. O número que se encontra sob a barra é o denominador e o número sobre a barra é o numerador. O denominador indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido e o numerador indica quantas partes desse inteiro foram tomadas. Assim, em *a/b*

a - Numerador: número de partes consideradas

b - Denominador: número de partes iguais em que se dividiu o inteiro

Existem várias maneiras de representar uma mesma fração, vejamos as mais usuais:

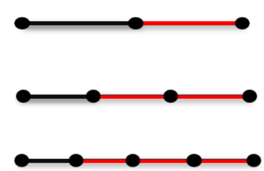
$$\frac{a}{b}; \quad a/b; \quad a \div b$$

Assim, percebemos que Pitágoras utilizou frações em seus experimentos para representar as consonâncias perfeitas. Observe:

$\frac{1}{2}$ representa que de duas partes iguais foi tomada uma

$\frac{2}{3}$ de tres partes iguais foram tomadas duas

$\frac{3}{4}$ de quatro partes iguais foram tomadas três



Com relação a leitura das frações, esta é feita da seguinte maneira. Primeiro lê-se o numerador e em seguida o denominador. No entanto, com relação ao denominador existem alguns nomes especiais como ilustrados nos quadros 1 e 2. Vejamos:

Quadro 1 – Como lê-se os denominadores de 2 a 9.

Denominador	2	3	4	5	6	7	8	9
Lemos	meio	terço	quarto	quinto	sexto	sétimo	oitavo	nono

Fonte: Os autores.

Quadro 2 – Outros nomes especiais para os denominadores.

Denominador	10	100	1000	...
Lemos	décimo	Centésimo	milésimo	...

Fonte: Os autores.

Assim, por exemplo, as frações da corda em que Pitágoras encontrou as consonâncias perfeitas podem ser lidas da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2} \text{ lê} - \text{se: um meio ou metade; } \frac{2}{3} \text{ lê} - \text{se: dois terços; } \frac{3}{4} \text{ lê} - \text{se: três quartos}$$

Caso o denominador seja um número diferente dos casos especiais citados acima, lemos o número normalmente seguido da palavra avos. Vejamos

$$\frac{3}{12} \text{ lê} - \text{se: três doze avos; } \frac{15}{16} \text{ lê} - \text{se: quinze dezesseis avos}$$

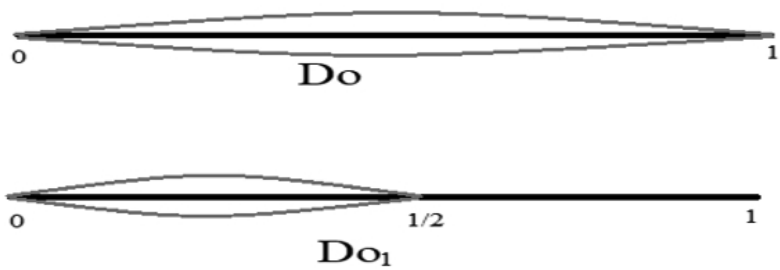
A escala pitagórica

Segundo Pereira (2013), para a construção da escala com as sete notas musicais (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si), Pitágoras estabeleceu alguns princípios. Vejamos

1. Equivalência (oitava): divisão da corda na ordem de 1/2
2. Unidade: divisão progressiva da corda na razão de 2/3 de seu tamanho (ciclo das Quintas)
3. Limites: entre a corda toda e sua metade (oitava)

Assim, por exemplo se a corda solta representasse um Dó, pressionando exatamente a sua metade, a nota produzida seria também um Dó, por tratar-se de sons equivalentes, porém trata-se de um som mais agudo. Observe a Figura a seguir.

Figura 3 – Dó grave e Dó uma oitava acima. Sons equivalentes



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Partindo desse pressuposto, isto é, de que a corda solta seria um Dó, duas outras notas são conhecidas, uma a exatamente 2/3 da corda (quita) sendo um Sol, pois (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol) e a outra a exatos 3/4 da corda (quarta), um Fá, pois (Dó, Ré, Mi, Fá). Para obter as demais notas utilizou-se o ciclo das quintas, de acordo com a unidade proposta por Pitágoras.

Desse modo, por exemplo, para encontrarmos a próxima nota marcamos uma quinta após o Sol (Sol, Lá, Si, Dó, Ré), ou seja, a próxima nota será um Ré. Para encontrar a posição em que essa nota estará na corda, multiplicamos a posição da nota onde a contagem começou, isto é, o Sol por uma quinta (2/3). Assim temos que $2/3 \times 2/3 = 4/9$. A próxima etapa consiste em verificar se esta nota satisfaz as condições de existência, ou seja, se está entre 1/2 e 1 (entre a corda toda e sua metade). Verificamos que $4/9 = 0{,}44...$, e logo não satisfaz a condição de existência. Para que esta não fique uma oitava acima, multiplica-se por 2 de modo que agora ela desloque-se para a outra metade da corda. Daí, $4/9 \times 2 = 8/9 = 0{,}88...$.

De maneira análoga, podemos encontrar as demais notas. Vejamos no Quadro 3 a seguir as posições correspondentes a cada nota da escala construída por Pitágoras.

Quadro 3 – Método utilizado para encontrar a posição correspondente de cada nota na corda

Comprimento da corda (L_i)	Ciclo de quintas (2/3 de L_i)	Comprimento resultante (L_r)	Condição de existência ($1/2 < L_r < 1$)	Fração equivalente (Oitava x2)
1	2/3 de 1	2/3 = 0,66...	Sim	
2/3	2/3 de 2/3	4/9 = 0,44...	Não	8/9 = 0.88...
8/9	2/3 de 8/9	16/27 ≅ 0,59	Sim	
16/27	2/3 de 16/27	32/81 ≅ 0,395	Não	
64/81	2/3 de 64/81	128/243 ≅ 0,52	Sim	8/9 = 0.88...
128/243				

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Temos, portanto, no Quadro 4, a primeira escala musical:

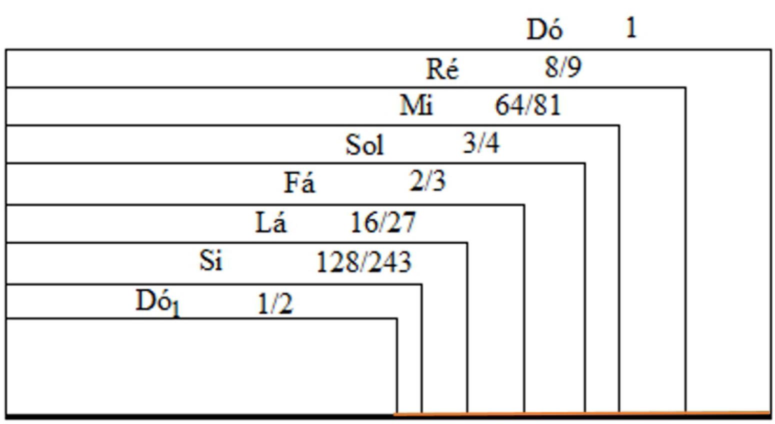
Quadro 4 – Notas musicais e as respectivas razões a partir do Dó

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	D
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Graficamente, temos:

Figura 4 – Escala diatônica Pitagórica



Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Assim, temos sons e números sendo relacionados pela primeira vez.

Tipos de frações

Motivação: Sabe-se que uma fração representa uma divisão do numerador pelo denominador. Desse modo, apenas utilizando a observação é possível saber quando uma fração representa um número menor, maior ou igual a 1?

Podemos perceber que todas as frações que foram utilizadas na construção da escala pitagórica estão entre a metade e a corda toda, isto é, representam partes que são menores que o todo. A única exceção é se considerarmos a fração 1/1, ou seja a corda toda, já as demais frações representam números menores do que 1. Observe que nessas frações os denominadores são sempre maiores que os numeradores.

No entanto, existem outras frações que podem representar partes maiores que o todo (números maiores do que 1) e nesses casos, o numerador será sempre maior que o denominador.

Vejamos a classificação das frações, segundo Name (2010):

Fração própria: é aquela cujo o numerador é menor que o denominador.

Exemplos:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{1}{2}$$

Essas frações representam partes de um todo (número menor que 1).

Fração imprópria: é aquela cujo o numerador é maior ou igual ao denominador.

Exemplos:

$$\frac{2}{2}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{4}{3}$$

Tais frações representam um inteiro ou um inteiro mais uma parte dele (número maior ou igual a 1).

Fração aparente: é aquela cujo numerador é divisível pelo denominador.
Exemplos:

$$\frac{6}{3}, \quad \frac{4}{4}, \quad \frac{9}{3}$$

Número misto: é uma "mistura" de um número natural com uma fração própria. Toda fração imprópria, que não seja aparente pode ser transformada em um número misto.
Exemplos:

$$\frac{7}{4}, \quad \frac{2}{3}$$

Vejamos como transformar a fração imprópria 7/4 em um número misto. A fração é uma divisão do numerador pelo denominador. Então

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

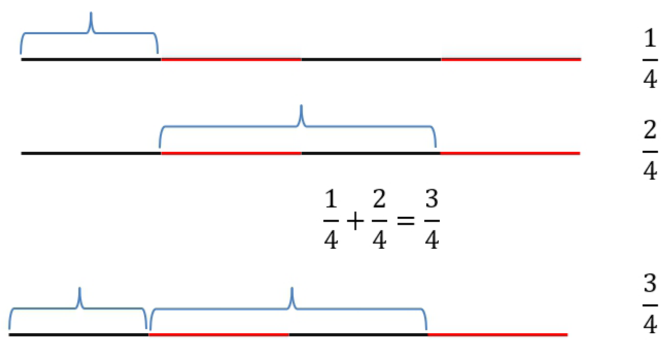
Assim,

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Adição e subtração de números fracionários

Para a adição e subtração de frações devemos considerar duas situações. A primeira é quando os denominadores são iguais e o segundo quando eles são diferentes. Vejamos:
1º caso: frações com o mesmo denominador
Vamos calcular 1/4 + 1/2.
Vamos supor que tenhamos duas cordas de mesmo tamanho.

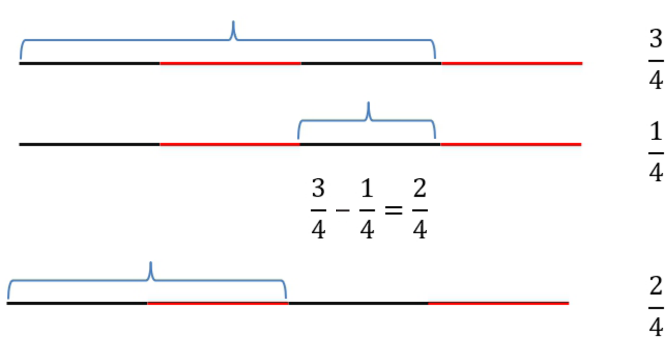
Em seguida, vamos dividir as mesmas em quatro partes iguais, assim como Pitágoras fez para encontrar a quarta justa. Feito isso, tomemos uma das quatro partes da primeira corda e duas das quatro partes da segunda corda. Em seguida colocamos as cordas uma ao lado da outra de modo que possamos juntar todas as partes que foram tomadas. Assim, teremos como resultado a soma das duas frações 1/4 + 2/4, conforme o esquema a seguir.



Para adicionarmos frações com o mesmo denominador, somamos os numeradores e conservamos o denominador

Vamos calcular 3/4 – 1/4.

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, agora tomemos três das quatro partes em uma das cordas e uma das quatro partes da segunda corda. Em seguida colocamos uma ao lado da outra e retiramos a parte que elas possuem em comum. Assim, o resultado de 3/4 – 1/4 será obtido conforme o esquema a seguir.



Para subtrairmos frações com o mesmo denominador, subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

2º caso: frações com denominadores diferentes.

Para frações com denominadores diferentes, reduzimos as frações a um mesmo denominador e procedemos como no primeiro caso.

Exemplos:

Para a adição temos

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{6}{10}+\frac{5}{10}=\frac{11}{10}$$

Da mesma forma, para a subtração, temos

$$\frac{7}{3}-\frac{2}{5}=\frac{35}{15}-\frac{6}{15}=\frac{29}{15}$$

Multiplicação e divisão de números fracionários

Multiplicação

Motivação: Para construir a escala musical, Pitágoras utilizou como unidade o ciclo das quintas. Nessa escala, para encontrar a posição de uma determinada nota musical na corda, usava-se a posição de uma nota que já havia sido encontrada e multiplicava-se por uma quinta (2/3). Por exemplo, se a corda solta (1/1) soava um Dó, a próxima nota seria a multiplicação da posição dessa nota por uma quinta, e a nota resultante será um Sol, em exatos 2/3 da corda. Para a próxima nota, multiplica-se a posição do Sol por uma quinta, isto é, $2/3 \times 2/3$ obtendo assim 4/9. A partir disso é possível deduzir como é feito a multiplicação de números fracionários?

Para multiplicarmos frações, multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores entre si.

Para construir a escala musical, Pitágoras utilizou como unidade o ciclo das quintas. Nessa escala, para encontrar determinada nota musical na corda, marcava-se a posição de uma nota que já havia sido encontrada e multiplicava-se por uma quinta (2/3)

Vamos calcular

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}.$$

Inversa de uma fração: quando o produto de duas frações é 1, essas frações são inversas uma da outra. Para encontrar a inversa de uma fração basta inverter seus termos. Veja:

$$\frac{2}{3} \text{ a inversa é } \frac{3}{2}; \quad \frac{5}{4} \text{ a inversa é } \frac{4}{5}$$

Divisão

Para dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira pelo inverso da segunda.

Vamos calcular 5/7 ÷ 2/3.

Temos que a inversa de 2/3 é 3/2. Assim

$$\frac{5}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$$

Proposta para atividade em sala de aula

A proposta de trabalhar com a construção da escala musical pitagórica para o ensino de frações é uma maneira de tornar as aulas de matemática mais dinâmica, mais lúdica, diminuindo, assim, o grau de abstração. A partir de nossa pesquisa bibliográfica, ficou evidente que explorar as relações entre essas duas áreas do saber é uma alternativa interessante, podendo alcançar excelentes resultados, como por exemplo, ser capaz de obter a atenção e motivar os alunos.

Aos professores que optarem em utilizar desta proposta interdisciplinar em suas aulas, recomendamos bom senso no momento de planejamento e de execução das aulas. Sugerimos que se mantenha a essência do trabalho, isto é, que seja ensinado o conteúdo frações utilizando a escala pitagórica como recurso didático/educacional, não no sentido de usar a música para explicar totalmente a matemática, mas para motivar, despertar a curiosidade e o interesse dos alunos, pois acreditarmos que somente dessa maneira, quando o aluno vê utilidade na pratica daquilo que está estudando, o processo de ensino e aprendizagem será mais eficiente.

De acordo com a pesquisa que fizemos, com base em trabalhos como **Relação entre matemática e música** da autora Sueli Aguiar (2016); **Matemática e Música**, do autor José Carlos Miritz (2015), entre outros, e com o conhecimento que obtivemos durante toda a trajetória acadêmica, sugerimos alguns passos a serem seguidos:

1. Para motivar os alunos, o professor pode começar falando de coisas que julgar necessário, por exemplo, sobre a teoria musical, sobre gosto musical, pode questionar com os alunos sobre suas relações com a música, suas preferencias, entre outras coisas, e em seguida poderá falar das primeiras reações entre essas duas áreas do conhecimento, dando ênfase a construção da escala musical pitagórica. Seria interessante mostrar o vídeo "Donald no país da Matemágica", dirigido por Hamilton Luske, em 1959. Caso não seja possível, o professor pode simplesmente falar sobre os acontecimentos que levaram Pitágoras a criar a primeira escala musical.

2. No sentido de tornar as aulas mais interessantes, o professor precisa ter em mãos um monocórdio ou algum instrumento de cordas, como por exemplo, um violão e também um afinador de instrumentos que pode ser baixado diretamente no smartphone. Fazendo uso desses recursos o professor poderá mostrar na pratica a relação entre as frações da corda e as notas que elas produzem quando são tocadas, por exemplo, se a corda solta produz um Lá, pressionando exatamente em sua metade também será um Lá, porém mais agudo.

3. A partir daí o professor poderá ensinar a parte teórica do conteúdo fração, suas propriedades e operações, mas para isso deve utilizar a construção da escala como um suporte didático. O objetivo é utilizar das relações entre comprimentos de cordas e os sons que produzem (as consonâncias pitagóricas), o ciclo das quintas e tudo o que puder ser explorado

nesse sentido em vez de utilizar barras de chocolate e pizzas, como é feito tradicionalmente.

4. Por último, seria interessante que a turma fosse dividida em grupos para a realização das atividades propostas pelo professor e ao final, que cada grupo construísse um monocórdio funcional com materiais de baixo custo.

Considerações finais

Com essa pesquisa, constatamos a partir da leitura de outros trabalhos (já que não houve aplicação prática deste), que trabalhar com a matemática e a música de um modo interdisciplinar permite que se alcance resultados positivos em relação ao interesse e motivação dos alunos. Constatamos inúmeros trabalhos, todos exitosos, tendo os mesmos objetivos que propomos aqui, isto é, utilizar a música como um instrumento capaz de diminuir o grau de abstração de conteúdos matemáticos e causar uma aproximação dos alunos com a mesma, através de atividades significativas.

Espera-se que o uso da música no ensino e aprendizagem da matemática possa ser tomado como um importante recurso didático, não apenas para o ensino de frações, mas para outros conteúdos matemáticos, uma vez que existem outras relações entre esses dois saberes que podem ser utilizados, como por exemplo, para o ensino de médias, progressões, logaritmos, entre outros. Tais relações devem ser exploradas sempre no sentido de tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas, tornando, assim, ensino e aprendizagem da matemática mais significativo.

Ressaltamos que este trabalho não está finalizado, uma vez que não houve aplicação em sala de aula. Assim, futuramente pretendemos dar continuidade ao mesmo, buscando explorar outras relações interdisciplinares, visando um ensino de matemática mais efetivo.

Referências

AGUIAR, Sueli. *Relação entre matemática e música*: possibilidades pedagógicas. Ji-Paraná, 2016. Disponível em: https://ri.unir.br/

jspui/ bitstream/123456789/1849/1/TCC%20SUELI%20%20VERS%-c3%83O%20FINAL%20-%20Copia%281%29.pdf. Acesso em: 14 jan. 2020.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 05 ago. 2020.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*. Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 06 ago. 2020.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2ª. ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.

CAVALCANTI, V. de S.; LINS, A. F. Musicalizando o currículo: Uma proposta de ensino e aprendizagem da matemática. *Espaço do Currículo*, v. 3, n. 1, p. 363-379, 2010.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates*. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. p. 15-19.

PEREIRA, Marcos do Carmo. *Matemática e Música de Pitágoras aos dias de hoje.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Rio de Janeiro, 2013.

PILLÃO, Delma. A *Pesquisa no Âmbito das Relações Didáticas entre Matemática e Música*: Estado da Arte. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. São Paulo, 2009.

FONSECA, Daniel França. *Aspectos estruturais e históricos que relacionam a música e a matemática*: uma abordagem interdisciplinar para a aplicação de médias, progressões e logaritmos, no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Lavras, setembro 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1021. Acesso em: 04 jan. 2020.

LUIZ, E. A. J.; COL, L. de. *Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa*. ULBRA, Canoas, RS- 16, 17 e 18 out. 2013.

MEC. Parâmetros *Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Nacionais*. Brasília, 1997.

MIRITZ, José Carlos Dittgen. *Matemática e Música*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande, agosto 2015. Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional.

NAME, Miguel Assis. *Tempo de matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2010.

OLEGÁRIO, P. G.; ANDRADE, A. P. R. Frações: "afinando" as linguagens matemática e musical. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, PR – 18 a 21 jun. 2013.

OLIVEIRA, A. P. de S.; SABBA, C. G. Utilizando frações da música à matemática. Anais do VII CBEM, Montevideo, Uruguai, 2013.

ROSSI, Sueli da Silva. *A senóide e os sons musicais*. Londrina, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/ 113-2.pdf. Acesso em: 12 jan. 2020.

SAMPAIO, Pedro Valim. *Interrelações entre Matemática e Música*. 2017. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, 2017.

Formação inicial de professores que ensinarão Matemática e o senso espacial nas séries iniciais

Maria Katiane Miranda Ribeiro

Daniele Esteves Pereira Smith

Resumo

Este trabalho é fruto de uma experiência no curso de Pedagogia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, com graduandos do 6º período. O objetivo deste artigo foi avaliar a percepção dos professores a respeito da aplicação do senso espacial topológico como ponto de partida para educação infantil. As análises foram feitas a luz de teóricos como Lorenzato (2006), Pavanello (1993), Piaget e Inhelder (1993), Nacarato (2009), além dos documentos como Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e Diretrizes Curriculares Nacionais do curso de Licenciatura em Pedagogia. Foi uma pesquisa bibliográfica e documental com abordagem qualitativa, de finalidade básica estratégica, com objetivo descritivo e exploratório. Teve como coleta de dados a aplicação de uma oficina e a partir dos resultados obtidos podemos concluir que, os futuros professores do ensino primário precisam de uma formação mais profunda acima da aplicação do senso espacial topológico. Expondo que devem ser indissociável na educação infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave

Senso espacial. Séries iniciais. Formação inicial de professores. Ensino de Matemática.

Introdução

A formação de professores do ensino primário no Brasil passou por uma longa transformação no decorrer do tempo.

Nesse contexto, o curso de Pedagogia no Brasil que foi regulamentado por ocasião da organização da Faculdade Nacional de Filosofia, da Universidade do Brasil, através do Decreto-Lei 1.190, de 04 de abril de 1939. Segundo Libâneo (1998) o curso, ao longo de sua existência, desde 1939, tem sido questionado em relação à especificidade de seu conteúdo, à sua identidade e a do profissional nele formado, suas reais funções, bem como às regulamentações sofridas na sua trajetória.

O Conselho Nacional de Educação – CNE, em 2006, publicou a resolução CNE/CP n.º 1 que instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de Licenciatura em Pedagogia. No art. 4º deliberou que este curso era para a formação de professores para exercer funções de magistério na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, nos cursos de Ensino Médio, na modalidade Normal, de Educação Profissional na área de serviços e apoio escolar e em outras áreas nas quais sejam previstos conhecimentos pedagógicos.

A Resolução em questão define os espaços escolares e não escolares como campo de atuação do pedagogo e estabelece a docência como função principal da formação do curso de Pedagogia.

Para tanto, o curso de Pedagogia deverá estar apto, entre outras, a: Fortalecer o desenvolvimento e as aprendizagens de crianças do Ensino Fundamental [...]; ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano. (BRASIL, 2006, p.)

Há um destaque muito relevante nas questões estruturais e históricas da Educação, com pouco espaço para os conteúdos específicos das disciplinas e para os aspectos didáticos do trabalho docente.

De acordo com Gatti e Nunes (2008) um dos problemas é que o curso de Pedagogia não tem conseguido articular teoria e prática, não se mostrando capaz de aproximar os futuros professores da realidade do ensino na sala de aula. Quanto à análise dos currículos, o conteúdo da educação básica (Alfabetização, Português, Matemática, História, Geografia, Ciências, Educação Física) é pouco explorado nos cursos de Pedagogia.

Nossas inquietações surgiram da necessidade de um estudo com relação ao senso espacial no ensino da geometria. Tivemos como base os trabalhos de (LORENZATO, 2006) na qual trabalha o senso espacial ou geometria da criança, (PAVANELLO, 1993) relata o abandono do ensino de geometria nas escolas do Brasil; (NACARATO, 2009; 2011) fala da formação do professor que ensina matemática.

Baseamo-nos também nas Diretrizes Curriculares Nacionais do curso de Licenciatura em Pedagogia destinado a orientação na formação de professores que irão trabalhar na Educação Infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental, analisamos ainda os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática e a futura Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na qual são apontadas aspectos metodológicos para o ensino na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Neste artigo relatamos uma experiência vivida na formação inicial de professores do curso de pedagogia que estavam no 6º período na Universidade Federal do Pará (UFPA) Campus Cametá, propondo a esses futuros professores possibilidades de trabalhar o senso espacial por meio de atividades lúdicas e material manipulável. Para contribuir no processo da oficina, utilizamos gravador de voz, anotações em diários e data show para os slides.

A vista disto apresenta-se como tema desta pesquisa "*Senso Espacial: uma experiência com futuros professores que ensinarão a matemática nas séries iniciais*". Neste contexto, a presente linha de pesquisa visualiza como problema: qual é o entendimento dos professores sobre a metodologia que aplica o senso espacial topológico como ponto de partida para o ensino de geometria nas séries iniciais?

Tendo em vista esse processo de construção da aprendizagem este estudo tem como objetivo principal avaliar a percepção do professor a respeito da aplicação do senso espacial topológico como base para ensino da geometria nas séries iniciais. Em decorrência ao objetivo geral acima mencionado estabelece os seguintes objetivos específicos: descrever a construção do pensamento geométrico da criança; mostrar como é a formação inicial dos professores, que ensinaram à matemática, responsáveis por direcionar as práticas de aprendizagem nas séries iniciais e analisar as opiniões, a compatibilidade da metodologia de ensino baseada no senso espacial topológica diante de propostas de atividades.

Parte-se da hipótese de que os professores identificarão benefícios na medida em que se adequa melhor à natureza das crianças dado que a construção do senso espacial topológico começa naturalmente nos primeiros anos na escola.

Para tanto foi utilizado na elaboração desse trabalho os seguintes métodos: pesquisa bibliográfica e documental, de finalidade básica estratégica, com objetivo descritivo e exploratório, realizada pelo método hipotético-dedutivo e analisada com abordagem qualitativa.

Ao final conclui-se que os objetivos foram atendidos respondendo as nossas questões norteadoras e que hipótese foi confirmada ou refutada, com a indicação de que a resposta pelo problema dará continuidade para outras pesquisas e objetos de estudo sugerindo outros caminhos.

O pensamento geométrico da criança: um olhar para os documentos oficiais

Precipuamente situar objetos no espaço e orientasse em relação a ele são ações naturais do dia a dia do adulto para a criança essa capacidade precisar ser construída, na qual os parâmetros curriculares destacam:

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (BRASIL, 1997, p. 82)

Buscamos em Lorenzato (2006) algumas considerações a respeito do pensamento geométrico da criança. O autor mostra que para alcançar o processo do senso espacial na criança ela tem que passar do "espaço vivenciado para o espaço pensado. No primeiro, a criança observa, manipula, decompõe, monta, enquanto no segundo ela operacionaliza, constrói um espaço interior fundamentado em raciocínio" (LORENZATO, 2006, p. 45).

O autor explica que, a ordem da aquisição da construção do espaço, pela criança, começa pelas relações topológicas, projetivas e euclidianas, já pela ciência são denominadas euclidiana, projetiva e depois a topológica. Assim, mesmo que na ciência a prática na atividade comece pela euclidiana, mas pela criança se inicia o desenvolvimento pela fase topológica. O autor entende que o processo da percepção espacial na criança começa pela fase topológica "(...) por meio de algumas noções básicas de vizinhança, contorno, ordem, separação, continuidade" (LORENZATO, 2006, p. 43).

Dessa forma, as habilidades, a seguir, mostram como desenvolver a percepção de espaço que são indispensáveis para a primeira ordem do conhecimento geométrico pela criança. De acordo com Del Grande (1994), algumas das habilidades que favorecem a percepção espacial são:

> 1. Discriminação visual é a habilidade de perceber semelhanças e/ou diferenças entre dois objetos tridimensionais ou entre duas figuras desenhadas.
>
> 2. Memória visual é a habilidade de lembrar-se daquilo que não está mais sob sua vista.
>
> 3. Decomposição de campo é a habilidade de isolar o campo visual em subpartes.
>
> 4. Conservação de forma e de tamanho é a habilidade de perceber que os objetos possuem propriedades invariantes.
>
> 5. Coordenação visual-motora é a habilidade de olhar e de "fazer" ao mesmo tempo.
>
> 6. Equivalência por movimento é a habilidade de percepção da equivalência de forma entre duas figuras que se apresentam em diferentes posições. (DEL GRANDE, 1994, p. 47,48,49)

Neste contexto, estas habilidades ajudarão a criança a desenvolver a percepção do espaço de acordo com a fase que ela se encontrar.

Segundo Piaget e Inhelder (1993, p. 11):

> [...] Os tratados elementares da geometria são mais ou menos unânimes em nos apresentar as noções espaciais iniciais como repousando em intuições euclidianas: retas, ângulos, quadrados e círculos, medidas, etc. Esta opinião parece, aliás, confirmada pelo estudo da percepção e das 'boas formas' visuais ou táteis. Por outro lado, a análise abstrata dos geômetras tende a demonstrar que as noções espaciais fundamentais não são euclidianas: são 'topológicas', isto é, repousam simplesmente nas correspondências qualitativas bi contínuas que recorrem aos conceitos de vizinhança e de separação, de envolvimento e de ordem, etc., mas ignoram qualquer conservação das distancias, assim como toda projetividade (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 11).

O destaque feito pelos autores mostra que o ensino da geometria euclidiana está desvinculado com as noções espaciais iniciais, ou seja, não está em conformidade com as noções de vizinhança, separação, envolvimento etc. Isto nos trouxe uma reflexão da importância de trabalhar a geometria pela topologia concordando com o estudo do senso espacial.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) ressaltam o processo construção da percepção do espaço, pois a criança, que brinca que explorar que conhece o seu próprio corpo, conseguir perceber noções espaciais "não conceituais" como: tão distante ou tão perto, quem está no lado, quem está do outro, quem está em cima, quem está em baixo por meio de sistemas de coordenadas referente ao próprio corpo.

> Estudos sobre a construção do espaço pela criança destacam que a estruturação espacial se inicia, desde muito cedo, pela constituição de um sistema de coordenadas relativo ao seu próprio corpo. É a fase chamada egocêntrica, no sentido de que, para se orientar, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento, que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Aos poucos, ela toma consciência de que os diferentes aspectos sob os quais os objetos se apresentam para ela são perfis de uma mesma coisa, ou seja, ela gradualmente toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento. (BRASIL, 1997, p.125)

Esta e uma noção primordial para o eixo da geometria, pois a partir daí a criança vai percebendo a noção de espaço que vai sendo lapidado e ampliado para as questões mais complexas. O documento aponta, ainda, a importância das atividades para o conhecimento do espaço pela criança onde:

> [...] é importante estimular os alunos a progredir na capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno, a situar-se no espaço, deslocar-se nele, dando e recebendo instruções, compreendendo termos como esquerda, direita, distância, deslocamento, acima, abaixo, ao lado, na frente, atrás, perto, para descrever a posição, construindo itinerários (BRASIL, 1997, p. 67).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais deverão dialogar futuramente com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), um documento de caráter normativo que foi aprovado em dezembro de 2017 pelo Ministro da Educação, no entanto ainda não foi implementado, esse documento tem por objetivo nortear o que é ensinado nas escolas do Brasil, englobando a Educação Básica, que vai da Educação Infantil até o final do Ensino Médio, um documento relevante pautado em altas expectativas de aprendizagem. Para a base a “Educação Infantil era uma etapa anterior, independente e preparatória para a escolarização, que só teria seu começo no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2017, p.37).

Diante disso, a base traz ano a ano àquilo que deve ser consolidado na educação infantil, a criança passar a ter seis grandes direitos de aprendizagem que devem ser atendidos por meio de campos de experiência.

> Na primeira etapa da Educação Básica, e de acordo com os eixos estruturantes da Educação Infantil (interações e brincadeira), devem ser assegurados seis direitos de aprendizagem e desenvolvimento, para que as crianças tenham condições de aprender e se desenvolver (..) conviver; brincar; participar; explorar; expressar; conhecer-se.
> Considerando os direitos de aprendizagem e desenvolvimento, a BNCC estabelece cinco campos de experiências, nos quais as crianças podem aprender e se desenvolver (...) o eu, o outro e o nós; corpo, gesto e movimento; corpo, gesto e movimen-

> to; escutar, fala, pensamento e imaginação; espaços, tempos, quantidades, relações e transformações.
> Em cada campo de experiências, são definidos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento organizados em três grupos por faixa etária (..) creche bebês (0 a 1 ano e 6 meses), crianças bem pequenas (1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses) e pré-escola relativas as crianças pequenas (4anos a 5 anos e 11 meses). (BRASIL, 2017, p. 27).

A partir disso, temos que entender como que a proposta pedagógica vai garantir que os direitos sejam respeitados. A base vai trabalhar com o brincar e as interações como os dois eixos estruturantes do currículo na educação infantil fazendo com que a criança aprenda nas situações de interações e por meio de brincadeira. Logo, os futuros profissionais da educação infantil e das séries iniciais do ensino fundamental poderão ampliar suas propostas pedagógicas trabalhando as habilidades e conhecimentos do senso espacial da criança, variando e estabelecendo novas aprendizagens.

O ensino de geometria nas séries iniciais

Pavanello (1993) vem discutindo nas últimas décadas o ensino da geometria principalmente após da promulgação da Lei 5.692/71, essa lei concedia nas escolas programas de diferentes disciplinas, onde os professores se sentiram inseguros para trabalhar a geometria deixando de inclui-las no seu planejamento escolar, mas quando ensinada deixavam para abordar no final do ano letivo.

A autora afirma que na escola primária, nessa época, trabalhava algumas noções de geometria e que na escola secundária em geral era destinado às elites em que o conteúdo de geometria era ensinado separadamente sem qualquer preocupação com as aplicações práticas.

Segundo Meneses (2007), as principais mudanças que a geometria passou trouxeram grandes consequências negativas para o ensino de geometria, na qual, os professores não estavam preparados por não dominarem o conteúdo e acabavam por abandonar. Este abandono se reflete nos cursos de graduação de professores e nos cursos de magistério, pois esses cursos não tinham preocupação e nem um currículo voltado ao ensino médio especialmente nos anos de 1960 a 1990, nos dias atuais, esta dificuldade ainda permanece e é percebida por alguns professores quando abordar esse ramo de conhecimento da matemática.

De acordo com Nacarato na visão de Pires (2000), em 1995 se inicia uma elaboração de um currículo nacional, os Parâmetros Curriculares nacionais (PCN), para o ensino fundamental que foram divididos em quatro ciclos e aprovados pela secretaria da educação do ensino fundamental, do ministério da Educação e do Desposto. Logo, o processo de formação do professor inicial ou continuado desencadeou a preocupação com a Didática da Matemática e consequentemente utilizavam como apoio os livros didáticos que muitas vezes não tinha uma qualidade satisfatória.

Segundo Barbosa (2011), os Parâmetros Curriculares Nacionais no início de 1990 trouxeram uma nova titulação para o ensino de geometria, a partir dos anos iniciais, onde:

> Os professores que não tiveram e nem vivenciaram a Geometria no currículo, durante sua escolarização, precisaram inserir tal conteúdo em suas salas de aula. Dessa forma, houve um empobrecimento na abordagem dos conteúdos, que passaram a ser desenvolvidos de maneira intuitiva e experimental, muitas vezes, utilizando apenas a identificação das quatro figuras: quadrado, retângulo, triângulo e círculo; para depois trabalhar a parte métrica com perímetro e área (BARBOSA, 2011, p. 20).

Assim, Lorenzato (1995) aponta em Revista. SBEM, ano III, 1995 “o por que não ensinar geometria?” que existem duas barreiras para o ensino na geometria:

> A primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas. (...) A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. (LORENZATO, 1995, p. 3)

Para esse autor, o professor de pedagogia trabalha com várias disciplinas (história, português, geografia, matemática) em consequência disso acabam utilizando-se como apoio os livros didáticos e deixando muitas vezes de lado o ensino de geometria e outras práticas de ensinar nas séries iniciais do ensino fundamental.

A formação inicial de professores que ensinarão a Matemática

Ao longo das décadas de 1980 e 1990 foram feitos esforços para melhorar a qualidade da formação em nível superior dos futuros professores do primeiro segmento do Ensino Fundamental, pois não foram elaboradas políticas consistentes para a formação com qualidade desses profissionais.

Na década de 1990, houve reformas educacionais no Brasil, o governo Federal apresentou inúmeras propostas e uma nova legislação a respeito da Educação e da formação docente; dentre as principais leis estão: a Lei nº 9.394, de 20/12/96 – LDBEN, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional –, a Resolução CNE/CP 1, de 18/02/2002, e a Resolução CNE/CP, de 19/02/2002[1].

A Lei de Diretrizes e bases da educação Nacional (9.394/96) criou nos artigos 62 e 63 os Institutos Superiores de Educação. O artigo 62 diz que.

> (...) a formação dos docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitindo como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas primeiras séries doensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade Normal (BRASIL, 1996, p. 20).

De acordo com Nacarato (2009) os professores que atuavam na educação infantil e nas séries iniciais do ensino fundamental, nas décadas de 1980 e 1990, tinham em sua formação o curso de habi-

[1] A Resolução do Conselho Nacional de Educação – CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002, instituiu Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. A Resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002, instituiu a duração e a carga horaria dos cursos de Licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior.

litação de magistério em Nível médio. Neste contexto, não havia uma formação específica para trabalhar a matemática voltada para a disciplina Metodologia de Ensino de Matemática. Com isso, havia uma preocupação com a formação matemática desse professor, tendo grandes dificuldades para desempenhar suas atividades na atuação de sua docência, não dominando os conteúdos matemáticos a serem abordados, apontando a necessidade de um conhecimento mais específico sobre a disciplina.

Durante a década de 1990, os cursos de magistério passaram por reformulações curriculares a partir da promulgação da (Lei 9.394/96) que, dentre de diferentes modificações, constitui a formação do professor que atua na educação infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental para o nível superior em cursos de Licenciatura em Pedagogia (NACARATO, 2009).

O curso de Licenciatura em Pedagogia da Universidade Federal do Pará Campus Universitário do Tocantins/Cametá, em sua Resolução n. 4.699, de 19 de agosto de 2015, traz como componente do currículo atualizado no seu Projeto Político Pedagógico a disciplina Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino da Matemática, com carga horária de 75 (setenta e cinco) horas, divididas em teórica, prática e extensão. Tem por descrição a concepções da matemática, o papel da Matemática na educação infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental e conteúdo, métodos, planejamento e avaliação.

Curi (2004), apurou a ementa, a matriz curricular de 36 cursos de Pedagogia com o objetivo de refletir sobre o conhecimento e os saberes desenvolvidos nestes cursos para o ensino da Matemática. E nessa análise desses elementos pode-se concluir que a formação inicial nos cursos de Pedagogia, pouco tem contribuído para que os futuros professores aprendam a conhecer a Matemática, como ensiná-la e de que modo o aluno aprende.

A autora ressalta algo muito importante com relação à carga horária destinada à formação para o conhecimento, como também da própria linguagem matemática que utilizarão em sua prática docente. Em outras palavras, parece haver uma concepção de que o professor polivalente[2] não precisa 'saber Matemática' e que basta

[2] Professor Polivalente é aquele profissional que ensina diversos conteúdos para

saber como ensiná-la. (CURI, 2004, p. 76-77).

Dentro das Diretrizes Curriculares Nacionais dos cursos Licenciaturas em Pedagogia, institui em sua resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a educação Básica buscando competências específicas para o desenvolvimento profissional deste professor colocando em evidências relativas as noções básicas para o ensino de matemática e deverão se adaptar a esta resolução no prazo máximo de 2 (dois) anos, contados da publicação da Base Nacional Comum Curricular, instituída pela Resolução CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro de 2017 (BRASIL, 2019, p.2).

Isto é um indicativo de que as redes de ensino estão mais focalizadas nos alunos e no seu direito de aprender tornando o ensino de geometria mais próxima do cotidiano da criança. Para a formação inicial de Professores para a Educação Básica são destinados cursos e devem ter como fundamentos pedagógicos:

> o compromisso com as metodologias inovadoras e com outras dinâmicas formativas que propiciem ao futuro professor aprendizagens significativas e contextualizadas em uma abordagem didático-metodológica alinhada com a BNCC, visando ao desenvolvimento da autonomia, da capacidade de resolução de problemas, dos processos investigativos e criativos, do exercício do trabalho coletivo e interdisciplinar, da análise dos desafios da vida cotidiana e em sociedade e das possibilidades de suas soluções práticas (BRASIL 2019, p.05).

Para Ponte (2002), os professores deverão ensinar de acordo com as novas perspectivas curriculares, sendo um grande desafio para esse futuro professor, pois ele tem que atender a demanda de outras disciplinas tornando o ensino mais complexo e a aprendizagem dos alunos menos evidente, ou seja, improvável que esses futuros profissionais da educação básica e das séries iniciais do ensino fundamental consigam ministrar todos os conteúdos.

---

seus alunos. Disponível em: https://canaldoensino.com.br/blog/o-que-e-e-qual-o-papel-do-professor-polivalente. Acesso em 11 de Agosto de 2020.

Caminhos metodológicos

A partir de leituras e análises do processo de formação inicial de professores que ensinarão matemática nas séries iniciais, como também as fases do processode construção do pensamento geométrico da criança, especificamente, a fase topológica e as propostas de ensino de geometria nos documentos oficias. Diante disso, para alcançarmos os objetivos expostos no início deste artigo, descreveremos os caminhos metodológicos, tendo em vista colaborar com a formação dos professores que irão trabalhar na educação infantil e séries iniciais do ensino fundamental.

Para analisarmos a metodologia do trabalho com os futuros professores seguimos um roteiro, que foi gravado por áudio e depois transcrito. A análise tem como foco os seguintes questionamentos: Quais as dificuldades em ensinar a geometria nas séries iniciais? A metodologia aplicada do senso espacial topológico é útil para o ensino de geometria nas séries iniciais? Na qual avaliamos as respostas para investigar o conhecimento sobre o ensino de geometria dos futuros professores.

Direcionando a atender ao objetivo proposto da nossa investigação, buscou-se alcançar os seguintes itens:

I. Descrever o processo das fases do senso espacial (topológica, projetiva e euclidiana) para professores em formação;
II. Instruir os futuros professores de como aplicarem as atividades propostas;
III. Propor para os futuros professores criarem uma atividade para desenvolver a fase topológica;
IV. Aplicar uma atividade direcionada a fase euclidiana;
V. Analisar qual o entendimento dos futuros professores sobre o ensino da geometria nas series iniciais e sua opinião sobre a aplicação dessa proposta.

Para tanto, utilizou-se para a elaboração desse trabalho uma pesquisa bibliográfica e documental relacionado ao senso espacial da criança e a formação do professor da educação infantil e das séries iniciais do ensino fundamental.

Teve como finalidade básica estratégica, pois visa apresentar uma contribuição para futuros professores da educação básica que estão em formação, ampliando o conhecimento sobre o senso espacial topológico nas crianças. Conforme ensina Gil (2010, p. 27), "pesquisas voltadas à aquisição de novos conhecimentos direcionados a amplas áreas com vistas à solução de reconhecidos problemas práticos" são classificadas como básicas estratégicas.

Com objetivo descritivo e exploratório, onde descrever utilizando informações dos livros e artigos científicos e a pesquisa exploratória visa coletar dados da oficina realizada com professores que estão em formação.

Segundo Duarte et al. (2014, p. 26), quando sustentam que "a pesquisa descritiva restringe-se a constatar o que já existe. Os acontecimentos são narrados. Procura-se conhecer a natureza, as características, a composição e os processos que constituem o fenômeno".

Por outro lado, o seguimento da pesquisa demandou um pouco mais de atenção, visto ainda não havia informações completas no âmbito da ciência sobre senso espacial: uma experiência com futuros professores que ensinarão a matemática nas séries iniciais. Por esse motivo, a pesquisa também tem cunho exploratório. Segundo Gil (2010, p. 27), "As pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses".

Além disso, a pesquisa foi desenvolvida a partir da hipótese que os professores identificarão benefícios sobre a metodologia aplicada na medida em que se adequa melhor à natureza das crianças dado que a construção do senso espacial topológico começa naturalmente nos primeiros anos na escola.

Marconi e Lakatos (2011, p. 73), quando explicam o método hipotético- dedutivo, ressaltam que "se a hipótese não supera os testes, estará falseada, refutada, e exige nova reformulação do problema e da hipótese, que, se superar os testes rigorosos, estará corroborada, confirmada provisoriamente."

Logo, identifica-se que o método utilizado foi o hipotético-dedutivo, tendo em vista que o estudo consistiu basicamente na coleta de dados que permitissem testar, ao final do trabalho, a hipótese.

Distingue-se, porém que os dados foram colhidos sem o emprego de instrumentos de precisão matemática ou estatística e foram analisados de maneira crítica, segundo o esforço intelectual de análise do autor.

Portanto, pode-se alegar que se trata de uma pesquisa de abordagem qualitativa, o que é comprovado pela lição de Marconi e Lakatos (2011, p. 269), quando afirmam que "o método qualitativo difere do quantitativo não só por não empregar instrumentos estatísticos, mas também pela forma de coleta e análise dos dados.".

Neste sentido, trazemos como experiência uma oficina com duração de 12 horas desenvolvida na disciplina (Fundamentos teóricos e metodologias da matemática) do curso de pedagogia (6º período) da Universidade Federal Pará, Campus de Cametá/Pa. As informações registradas da oficina foram colhidas por meio de anotações em diários, gravações de áudios de registros orais e data show, para conduzir a oficina. Tal estrutura buscou-se alcançar reflexões, discussão por meio das atividades propostas e a aplicação.

Detalhamos, a seguir, todos os períodos das atividades da oficina que foram subdividida em três momentos (antes, durante e depois) que foi categorizado respectivamente em: objetivos, proposta e aplicação.

(Momento antes) 1º dia No primeiro momento, foram expostos os objetivos que se desejavam alcançar. Em seguida, mostramos as três fases do senso espacial (topológico, projetivo e euclidiana) e como se constrói pela ciência e depois como se constrói pela criança. Logo após, foram ilustradas as habilidades (Discriminação visual, Memória visual, Decomposição de campo, Conservação de forma e de tamanho e Coordenação visual-motora) apontadas por Del Grande (1994), através de exemplos.

(Momento durante) 2º dia

No segundo momento, foram feitas as propostas de atividades de como os futuros professores podem trabalhar o senso espacial da fase topológica envolvendo algumas habilidades para melhorar a percepção de espaço. Posteriormente, pedimos para que os futuros professores se dividissem em sete grupos, classificados do grupo 1 ao 7. Sendo que cada grupo ficou responsável por elaborar uma atividade do senso espacial da fase topológica (Anexo A) podendo a atividade ter como discrição: nome (atividade); material (se necessário); objetivo; regras (se houve); espaço (lugar da atividade).

(Momento depois) 3º dia

No terceiro momento, com o mesmo grupo foi feito a construção do cubo para verificar o conhecimento geométrico dos futuros professores, na qual se reflete a fase euclidiana (Anexo B). Ao final das atividades tivemos uma conversa informal com futuros docentes sobre a aplicação das atividades.

Descrição e objetivos das atividades propostas

Apresentamos as propostas de atividades por slide para os futuros professores trabalharem com seus alunos. Essas atividades foram direcionadas para a fase topológica e algumas habilidades do senso espacial. Com as atividades que seguem, buscou-se conceitos relacionados a movimentos de pessoas, localização de pessoas, indicação de posição, de direção, de sentido utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás, a cima, a baixo entre outros.

▪ Atividade 1 (circuito de copos)

O professor irá distribuir os copos os copos no chão da sala de aula, em seguida venda os olhos da criança com o pano, depois com comando de voz a criança começa a travessar os copos, sem tocá-los com a orientação do professor dizendo: Pare! Vire para esquerda! Vire para direita! Logo, o circuito de copo tem como objetivo movimentar-se e localizar-se no espaço por meio de comando de voz. Os materiais necessários: copos de 500 ml colorido ou não e uma venda preta.

▪ Atividade 2 (nós somos quatro)

O professor irá dividir as crianças em grupos de quatro componentes e formar um pequeno quadrado cada dupla fica uma de frente para outra. Logo após, irá ensinar a música e a coreografia para a turma a qual diz assim: Nós somos quatro (*bate uma palma sozinho e depois bate com uma mão ao mesmo tempo com os dois que estão do seu lado direita e esquerda*). Eu com ela/ele (*bate palma com as duas mãos com a criança da direita*). Eu sem ela/ele (bate palma com as duas mãos com a criança da esquerda). Nós por cima (*bate palma com as duas mãos por cima com a criança da frente*). Nós por baixo (*bate palma com as duas mãos por baixo com a criança da frente.*

Assim, "nós somos quatro" teve como objetivo: estimular a coordenação visual-motora, trabalhar a equivalência (identificando o que está em acima/baixo) do corpo por movimentos e a localização.

▪ Atividade 3 (cabo de guerra)

O professor divide em quatro ou mais crianças, em duas ou mais equipes tendo um equilíbrio de força e número. Em seguida marque a corda ao meio com tecido de cor, depois faça uma reta no chão com giz ou fita, posicione a corda sobre a reta deixando um espaço livre de um metro e meio, depois coloque as duas equipes em fila segurando uma das pontas da corda, a primeira equipe que conseguir puxa pelo menos um oponente para frente da reta será o vencedor.

Os materiais necessários para essa brincadeira são: corda, giz ou fita, tecido de cor. Cabo de guerra teve como objetivo: trabalhar a percepção de equivalência, coordenação visual-motora.

A sucessão de atividades descritas, as três primeiras, serviram como base para os futuros professores criarem suas próprias atividades voltada a contribuir para a fase topológica e a atividade a seguir foi direcionada para diferenciar a fase topológica da fase euclidiana.

▪ Atividade 4 (construção do cubo)

Para a construção do cubo utilizamos papel A4, cola, lápis, tesoura e régua. Os professores desenharam todas as fases do cubo em uma folha de papel, os passos foram mostrados por slide no qual encontrava-se as seguintes orientações:

- Desenhe com lápis e régua um retângulo de 20 cm e depois dívida esse retângulo 20x5 cm formando quatro quadradinhos de 5cm; Depois faça um novo quadrado de 5cm em cima da segunda casa do retângulo;
- Desenhe outro quadrado abaixo da terceira casa do retângulo;
- Desenhe sete paralelogramos de 1,5 cm para fazer as abas do cubo;
- Recorte o molde do cubo usando uma tesoura;
- Dobre o molde seguindo as linhas dos quadrados;
- Passe cola em cada aba do cubo.

Assim, apresentamos para os futuros professores a importância de algumas brincadeiras infantis para desenvolvimento da fase topológico e depois trabalhamos a fase euclidiana através da construção do cubo.

Análise de resultados

Neste trabalho, buscamos tanto fortalecer a pesquisa que teve como relação à construção do senso espacial, especificamente, a fase topológica, como também colaborar com a formação dos professores, no pensamento geométrico oferecendo propostas de atividades, como mencionado anteriormente.

Fizemos uma reflexão sobre a proposta da oficina e tivemos uma conversa informal com futuros professores com relação ao entendimento deles sobre o ensino de geometria na educação infantil e nas séries iniciais no ensino fundamental. Por meio de gravador coletamos as narrativas de alguns futuros professores.

Para que a identidade deles fosse preservada, optamos por utilizar nomes fictícios.

NARRATIVA 1:

Pesquisadora: Quais as dificuldades que vocês teriam em ensinar a geometria nas series inicias?
P1:
"*...Teria muitas dificuldades, pois na minha formação do ensino fundamental não se aprofundava tanto a geometria como hoje, eu só entendo apenas o básico, mas quando ensinar vou me basear nos livros didáticos.*"

P2:
"...As dificuldade que tenho na matemática é ensinar os cálculos, já na geometria seria mais fácil, porque faz parte meu dia a dia, tipo os moveis de casa identifico com algumas formas geométricas, sei disso porque ajudava meu sobrinho nos deveres da escola, mas para mim esse conhecimento se limita em figuras, passou para o cálculo a coisa desandar rsrsrsrs."

P3:
"...O que me faz senti despreparadas em dar o conteúdo de geometria é que não tenho uma base boa, mas que os livros didáticos podem me orientar a fazer uma didática melhor com os alunos."

P4:
"...Vou fazer diferente, vou trabalhar a geometria com objetos concretos do dia a dia, por exemplo diferenciar um círculo de uma bola, isso eu sei! rsrsrs." **P5**:
"...Não vou me limitar somente na formação inicial e nos livros didáticos vou procurar vídeos aulas que possa me dar apoio, livros para tentar entender melhor um pouco mais a geometria, entender melhor esses conceitos ou definições que o ensino fundamental e médio não me proporcionaram. Claro que vou seguir o cronograma dos livros que são fornecidos nas escolas, mas que vou tentar melhorar em cima da proposta do livro didático."

P6:
"...Não conseguir aprender a matemática, estudava para alcançar as notas, que eram notas baixas, durando meu trajeto de estudante de ensino fundamental e médio, não gostava muito da matemática me identificava mais com a geografia, história. Quando fiz o vestibular escolhi história e pedagogia

> *e acabei passando em pedagogia, onde vou ter que ensinar a matemática nas minhas aulas, agora vou ter que atrás do conhecimento e com relação a geometria só lembro dela no ensino médio."*
> (Gravação de áudio no último encontro, 23 de outubro de 2019)

As narrativas dos futuros professores são relevantes, pois constata que há uma dificuldade de aprendizado no ensino de geometria por causa das experiências anteriores. Eles não se apropriam dos conceitos geométricos, o que evidência a dificuldade que poderão ter, futuramente, e o despreparo na prática docente.

Segundo as autoras Marquesin e Nacarato (2011) em sua pesquisa diz:

> Os depoimentos das professoras nos encontros foram importantes para que compreendêssemos a necessidade de buscar estratégias para ampliaçãodo saber disciplinar pedagógico e curricular em geometria, não disponíveis no repertório de saberes docentes. Permitiram também verificar que a compreensão dessas professoras sobre os conceitos geométricos pautava- se nas aparências das figuras geométricas, mas elas começavam a se preocupar com as propriedades (MARQUESIN; NACARATO 2011, p. 113)

Assim, as dificuldades que os futuros professores tiveram permitem verificar a limitação de conhecimentos sobre o ensino de geometria. Diante disso, procurar estratégias de ensinar esse conteúdo no início de sua formação para que futuramente não tenha desmotivação ou desinteresse.

> **NARRATIVA 2:**
>
> **Pesquisadora:** A metodologia aplicada do senso espacial topológico é útil para o ensino de geometria nas series iniciais?
>
> **P1**:
> *"...Pelo sistema educacional, não teria tempo de promover essas atividades em sala de aula, mas se caso os livros didáticos seguem essa ordem, começando pela fase topológica, tudo seria mais fácil."*

P2:
"*...Essa metodologia de usar brincadeiras dentro da sala de aula chamaria mais atenção das crianças e com certeza a aprendizagem delas seria mais agradável e teria um grande avanço no ensino da geometria.”*

P3:
“...Fiquei surpreso com esse processo de construção da geometria pela criança, se não fosse essa metodologia talvez eu não aprendesse a ordem dessas fases. Bom! eu utilizaria sim dessas habilidades que a senhora nos mostrou e poderia até mesmo desenvolver outras atividades.” **P4**:
“...Legal a metodologia, mas eu não utilizaria se não fosse de acordo com os documentos que regem a educação, além de dar trabalho para montar, exige muito tempo e sei que o professor não tem esse tempo disponível, porque tem que cumprir uma carga horário de 200 *horas para poder receber bem.”* **P5**:
“...Realmente nós não temos tempos de utilizar essas práticas, mas se todos pensamos dessa forma a educação não avançar. Por exemplo o cubo que agente construiu, ele pode servir para outras crianças que tem problemasde visão. Então eu me aproprio desta metodologia.”

P6:
“...Olhando por esse lado e verdade, porém trabalhamos com várias disciplinas, pois vamos se formar em pedagogia e devemos se utilizar de outras práticas docentes.”

P7:
“...Gostei desta metodologia, acredito que não devemos ignorá-la, pois faz parte do desenvolvimento da criança. Colegas vocês já perceberam que somos a base dos ensinamentos da criança! por mais que a gente não tenha domínio na matemática, mas devemos nos esforçar e se apropriar de outros conhecimentos. Gostei muito de construir o cubo e enxequei algumas habilidades que a senhora nos mostrou e a senhora pode ter certeza que vou trabalhar isso em sala de aula.”

P8:
“...Não imaginava que a geometria tinha fases e que a criança começava a se desenvolver pela fase topológica e que a fase euclidiana estava nos livros didáticos.”
(Gravação de áudio no último encontro, 23 de outubro de 2019)

Essa conversa mostra a inexistência de conhecimento que os futuros professores tinham das fases do senso espacial para desenvolvidas das crianças, considerados pelos autores Lorenzato (2011) e Piaget e Inhelder (1993), como base para o ensino de geometria na educação infantil e séries iniciais do ensino fundamental.

Observamos nas narrativas dos futuros professores que muitos deles não se apropriaram da metodologia aplicada do senso espacial. Assim em concordância com os seguimentos dos trabalhos de Nacarato (2009) os futuros professores continuaram se utilizando da forma tradicional no ensino de geometria pois:

> [...] há necessidade de conhecer as experiências com a matemática que as futuras professoras já vivenciaram durante sua escolarização. Diferentes autores têm discutido o quanto a professora é influenciada por modelos de docentes com os quais conviveu durante a trajetória estudantil, ou seja, a formação profissional docente inicia-se desde os primeiros anos de escolarização. (NACARATO, 2009, p. 23).

A autora retrata o caminho desse professor desde os anos iniciais até a sua formação profissional, na qual o conteúdo matemático nessa trajetória, muitas vezes não se familiarizaram com esse futuro professor muito menos o assunto de geometria por conta da sua experiência estudantil é essa vivencia pode ser transmitindo novamente para seus alunos prejudicando, assim, o ensino de geometria.

Considerações finais

Nossa intenção de toda essa ação foi para que o futuro professor consiga perceber as fases do senso espacial da criança aproveitando os conhecimentos e as habilidades das quais são portadoras, isso pode ser feito por meio das brincadeiras ou outro tipo de metodologias para que essa criança possa ter a possibilidade de construir seu pensamento geométrico de acordo com sua fase.

Mas, ao analisar as narrativas dos futuros professores verificamos que a hipótese da pesquisa está confirmada em parte, pois somente alguns dos professores identificaram os benefícios dessa metodologia do senso espacial ou percepção espacial como formas de iniciar o estudo da geometria na qual são apresentadas por Lorenzato (2006).

No planejamento de atividade que os futuros professores criaram relacionada à fase topológica, percebemos que alguns grupos de futuros professores não conseguiram alcança a proposta da oficina, ou seja, não manifestaram o conhecimento de como trabalhar as fases do senso espacial, onde analisando as atividades feitas por eles, encontramos o envolvimento de números e habilidades que vai de encontro a discrição das atividades.

Conseguimos perceber, também, que não há uma relação direta com as habilidades da percepção espacial mostradas por Del Grande (1994) entre os documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular) aqui expostos. No entanto, a BNCC traz novas possibilidades de trabalhar com as crianças da educação infantil podendo encaixar as habilidades para seu acréscimo na fase topológica. Já no PCN, o ensino da geometria na fase topológica vai ser trabalhado no primeiro e no segundo ciclos da educação fundamental.

Portanto, precisar-se de uma investigação mais profunda para a ampliação desse tema oferecendo contribuições para buscar novas estratégias para melhorar a compreensão desses futuros professores em processo de formação, pois somente a oficina não foi o suficiente para prepará-los para novas práticas de ensino- aprendizagem que ocorrem nas fases do conhecimento espacial pela ordem da criança para o ensino de geometria. Por esse motivo a importância da formação continuada para futuros professores que estão em formação inicial levando em consideração a quantidade de conhecimento que esse professor precisar dominar (conteúdos curriculares) para sua prática na Educação Infantil e nas séries iniciais do ensino fundamental.

Referências

BARBOSA, Cirléia Pereira. *O pensamento geométrico em movimento*: um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2011.

BRASIL. Resolução n. 1, de 15 de maio de 2006. *Diário Oficial da União*, n. 92, Seção 1, p. 11-12, 2006. Disponível em: http://www.cmconsulroria.com.br

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Pedagogia*. Resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019. Disponível em: Acesso em: abril, 2020.

CURI, Edda. *Formação de professores polivalentes*: uma análise do conhecimento para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. 2004. 278 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação Matemática, Pontifícia Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2004.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. *In*: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e Pensando Geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

FURTADO, Maria Sueli Viana; DUARTE, Simone Viana. *Trabalho de Conclusão de Curso* (*TCC*) *em ciências sociais aplicadas*. São Paulo: Saraiva, 2014. p.26.

GATTI, Bernadete A; NUNES, Marina Muniz Rossa. *Formação de Professores para o Ensino Fundamental*: instituições formadoras e seus currículos. São Paulo: Fundação Carlos Chagas (Relatório final: Pedagogia), 2008.

GIL, Antônio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5ª edição. São Paulo: Atlas, 2010. p.27. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 7 mai 2020.

LIBÂNEO, J. C. *Pedagogia e Pedagogos, para quê?* São Paulo: Cortez, 1998.

LORENZATO, Sérgio. *Educação Infantil e percepção matemática*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista*. SBEM, ano III, 1995.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Metodologia Científica*. 6ª edição. São Paulo: Atlas, 2011. p. 73, 269.

MARQUESIN, Denise Filomena Bagne; NACARATO, Adair Mendes. *A prática do saber e o saber da prática em geometria*: análise do movimento vivido por um grupo de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Zetetike, v. 19, n. 1, 2011.

MENESES, R. S. *Uma história da geometria escolar no Brasil*: de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

NACARATO, Adair Mendes; DA SILVA MENGALI, Brenda Leme; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. Autêntica Editora, 2009.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da geometria no Brasil*: causas e consequências. Zetetiké. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. Ano 1, n. 1, março, pp. 7-17, 1993.

PIAGET, J. INHELDER, B. *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIRES, Célia Maria Carolino; CURI, Edda, CAMPOS, Tânia Maria Mendonça (org.). *Espaço e Forma*: A construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000. 285p.

SCHNEIDER, Horacio. *Resolução.* 2012. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Pará.

Anexo

Anexo A – registro com relação ao planejamento de atividades dos futuros professores.

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

1. Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).

Nome: Adedônia

Material necessário:

Folha de papel, caneta ou lápis.

Nº de pessoas ou jogadores: Apartir de 2 jogadores

Objetivo:

① Desenvolver a memoria visual da criança e o raciocínio, além de aprimorar os conhecimentos gerais da criança.
O jogador deverá preencher os quadrados com os nomes por exemplo, nome, animal, objeto, fruta, comida, cidade, novela, ator/atriz...

Regras:

A regra do jogo é que, quando o primeiro jogador pedir stop, todos os outros jogadores deverão parar de preencher os ~~[illegible]~~ espaços.

Espaço (lugar):

Esta brincadeira pode ser desenvolvida em qualquer ambiente, tanto escolar, quanto não-escolar.

Tempo: O tempo varia, pois depende do primeiro jogador pedir stop.

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

1. Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).

Nome: CONFECÇÃO DE PIPAS

Material necessário:

Sacolas plásticas, Papel A4, Tala para pipa, tesoura, linha, cola.

Nº de pessoas ou jogadores: Dupla

Objetivo:

Desenvolver através da confecção de pipas a habilidade de perceber que os objetos possuem formas diferentes, bem como colocar o aluno em contato com o material utilizado.

Regras:

Confeccionar de forma que possa ser utilizado.

Espaço (lugar):

Sala de aula ou qualquer propriedade escolar

Tempo: 45 minutos

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

1. Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).

Nome: Amarelinha

Material necessário:

Giz e um marcador, que pode ser pedras.

Nº de pessoas ou jogadores: 02 jogadores por rodada.

Objetivo:

Incentivar a criança a desenvolver o raciocínio lógico matemático; Auxiliar no conhecimento e escrita dos números; E desenvolver mais agilidade, coordenação e força.

Regras:

Após desenhar o diagrama, a criança deve se posicionar de costas, atrás do primeiro quadrado, e atirar o marcador. A casa onde cair o marcador será o quadrado em que a criança não poderá pisa[r] A criança deve pular com um ou dois pés, dependendo da posiçã[o] dos quadrados. Se a criança errar, então será a vez do próximo jog[ador] Vencerá a criança que conseguir completar todo o percurso.

Espaço (lugar):

Na sala de aula, na quadra de esporte ou pátio da escola.

Tempo: 30 minutos.

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

1. Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).

Nome: Corrida dos Números

Material necessário:

Um dado, EVA de todas as cores, tesoura, cola.

Nº de pessoas ou jogadores: Um por vez

Objetivo:

Desenvolver as habilidades de senso espacial infantil tais como: discriminação visual; decomposição de campo; conservação de forma e de tamanho, coordenação visual motora e equivalência por movimento do tipo reflexão

Regras:

Atirar o dado e responder quais as formas, cores e números correspondente a cada face do dado.

Espaço (lugar):

Sala de aula

Tempo: 45 minutos.

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

1. Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).

Nome: "Elástico"

Material necessário:

• 2,5 metros de elástico.

Nº de pessoas ou jogadores: Mínimo 3 participantes

Objetivo:

Identificar as formas geométricas de acordo com os avanços das fases na brincadeira, despertar noções de espaço e movimento, identificar e medir os lados das formas.

Regras:

1- Não pisar no elástico; 2- Não errar a sequência das fases (pular ~~de~~ com os pés dentro, pular com os pés fora, pular fazendo o balão.

Espaço (lugar):

Sala de aula, brinquedoteca, quadra, pátio, etc...

Tempo: 15 minutos por participante.

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE - Nêspera

1. **Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).**

Nome: Corrida dos Ovos Coloridos

Material necessário:

cubas de ovos, bolas coloridas (pequenas), baldes

Nº de pessoas ou jogadores: duplas.

Objetivo:

- Completar em primeiro lugar a sequência das bolas de acordo com a sua posição (cor) na cuba de ovos;

Regras:

- o aluno só poderá carregar uma bola por vez;

- ao final, as bolas devem estar de acordo com a sequência de cores pré-determinada;

Espaço (lugar):

- Quadra

Tempo: 50 min.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE:

Ao sinal da professora, os alunos saem em direção à banca que contém as cubas de ovos, a fim de memorizar a sequência das bolas de acordo com a sua co
Em seguida, retorna ao seu balde (que contém bolinh
pega uma bola e vai em direção à sua cuba e coloc
a bola na posição correta. Faz isso até preencher tod
a sua cuba.

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

1. **Descrição (jogo/brincadeiras/dobraduras/histórias infantis).**

Nome: Manchete

Material necessário:

1 bola de plástico (pode ser de sacola); pedras (4), giz (se for aplicar em uma rua asfaltada).

Nº de pessoas ou jogadores: 8

Objetivo:

Estimular nas crianças o desenvolvimento da coordenação visual-motora, fomentar a habilidade de decomposição de campo, e da discriminação visual.

Regras:

Quando for jogar a bola nas pedras não pode ~~jogar~~ pisar na linha; aquele que for atingido pela bola está fora da brincadeira.

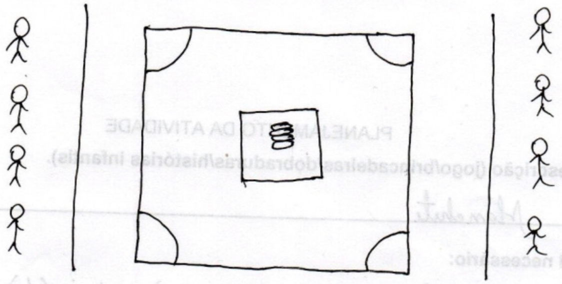
Espaço (lugar):

Pode ser feita em uma rua, quadra ou qualquer outro espaço urbano ou rural.

Tempo: Indeterminado (pode delimitar um tempo se for aplicada em uma aula.

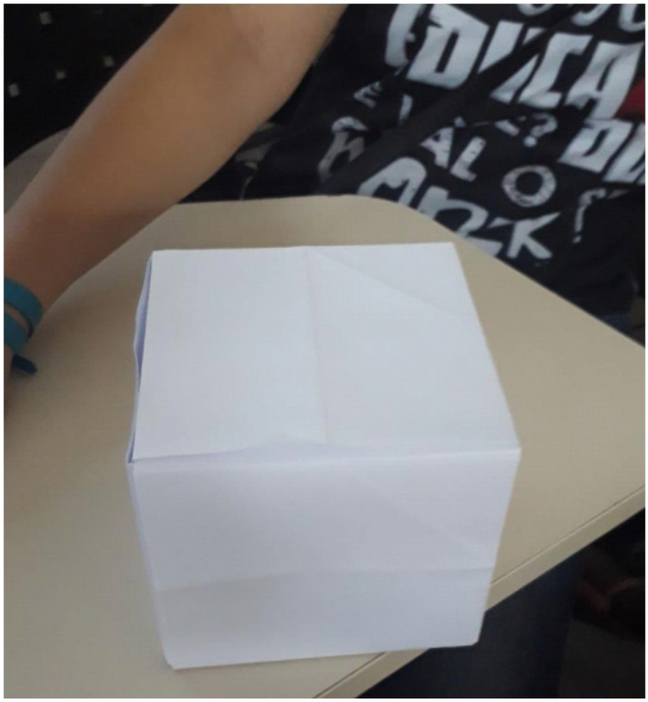
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE:

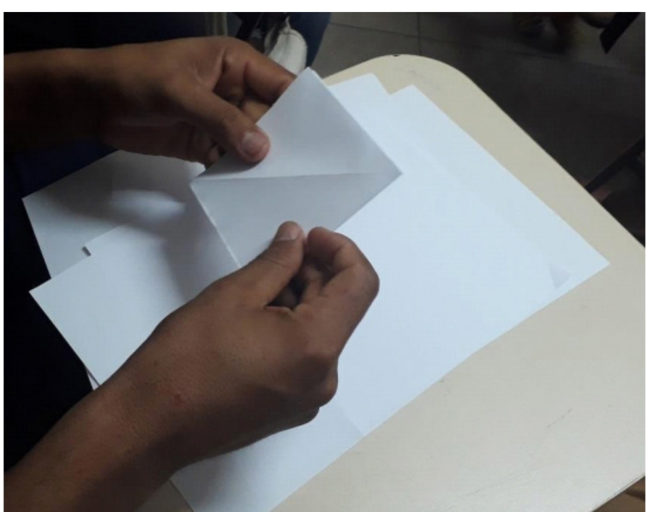
Inicialmente, deve-se formar duas equipes de 4 pessoas, após isso, desenhe no chão um quadrado de mais ou menos 2 m^2, dentro dele forme outro quadrado e empilhe 4 pedras formando uma pequena torre. Do lado de fora do quadrado delimite uma linha que as equipes não poderão ultrapassar, no início



Após isso, inicia-se a atividade, uma pessoa de cada equipe deve jogar par ou ímpar para decidir quem irá começar a jogar a bola. Depois, cada um dos integrantes de ambas as equipes devem jogar a bola a fim de derrubar a torre de pedras alternando entre uma equipe e outra, a equipe que derrubar a torre deve fugir e evitar que a outra equipe acerte a bola de plástico nos seus membros, aquele que for atingido está fora da brincadeira e deverá esperar a outra rodada. A equipe que estiver fugindo ou evitando ser atingido pela bola deve tentar colocar uma pedra em cada canto do quadrado. Vence a equipe que conseguir colocar todas as pedras em cada canto e gritar manchete, ou aquela que acertar a bola em todos os membros da outra equipe.

Anexo B – Registro com relação a construção do cubo dos futuros professores





O uso do Tangram no ensino da Geometria plana no 9º ano do ensino fundamental

Marivaldo Gomes Cabral Tavares Ramos

Osvaldo dos Santos Barros

Resumo

Este estudo surgiu das vivências de sala de aula, quanto às dificuldades dos alunos quando trabalham a classificação das formas geométricas e suas propriedades. Objetiva-se apresentar o Tangram como um instrumento facilitador da compreensão de conteúdo da geometria plana, com foco nos polígonos, auxiliando os alunos de forma lúdica e divertida, a partir da construção das peças do jogo, relacionando-as aos conteúdos estudados em sala de aula. Assim, relata-se as atividades desenvolvidas em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental na Escola Municipal de Ensino Fundamental "Sinagoga", no município de Baião, no estado do Pará. As práticas desenvolvidas têm como base as proposições de Piaget, para o uso de materiais didáticos concretos e sua manipulação. No desenvolvimento das atividades, valorizou-se a utilização de materiais alternativos, visto que muitos recursos didáticos não estão disponíveis nas escolas. Contudo, o uso desses materiais concretos para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos se mostrou de grande importância, devido às contribuições das peças construídas com dobraduras de papel.

Palavras-chave

Ensino da Matemática. Geometria Plana. Tangram. Ludicidade.

Introdução

Neste artigo apresentaremos uma reflexão sobre as contribuições dos jogos educativos e uso de brinquedos didáticos, como recurso material para o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, especificamente sobre geometria. Para isso, vamos tratar das contribuições da ludicidade e do uso de materiais alternativos em sala de aula, que contribuem para o desenvolvimento da aprendizagem, deixando os alunos mais envolvidos, fazendo com eles aprendam mais facilmente os conteúdos, de maneira prática e lúdica.

Nosso objetivo, nesse estudo, é construir os conceitos de área e perímetro, e proporcionalidade a partir das estruturas das peças do Tangram, como recurso didático em turma do 9º ano do ensino fundamental. Para cumprir esse objetivo, vamos utilizar como referência, a proposição do livro: Tangram, produzido pelo Laboratório de Ensino da Matemática da Amazônia Tocantina (LEMAT).

As atividades desenvolvidas em sala de aula, a partir das propostas metodológicas inseridas no livro de referência, foram realizadas na escola municipal de Ensino Fundamental “Sinagoga”, no município de Baião, no estado do Pará, no período de setembro de 2019 a novembro de 2019, num total de 60 horas de carga horária de atividades.

Relatamos nossa prática pedagógica no ensino da matemática utilizando o Tangram, que desperta o interesse e a compreensão dos alunos, de forma que estejam envolvidos e possam expor suas ideias e participar ativamente, dando condições ao aluno para potencializar seu raciocínio lógico e suas criatividades, relacionando os cálculos e relações matemáticas com seu cotidiano.

Os conceitos propostos a partir do uso do Tangram foram os seguintes: ponto médio para compor as peças do Tangram, a partir de uma folha de papel; área e perímetro de figuras planas e proporção entre as peças que foram comparadas de acordo com suas áreas. Dessas propostas, centramos atividades nas seguintes atividades: confecção do Tangram, jogos e atividades e contexto matemático na utilização da ferramenta.

Para tratarmos do processo de aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo dos alunos, vamos utilizar os fundamentos da proposição de Piaget, focando no período de operações concretas.

O lúdico no ensino da Matemática

A necessidade de dinamizar as aulas de matemática vem sendo um desafio presente na prática de professores e professoras que ensinam matemática na educação básica. Essa preocupação é dividida com pesquisadores e estudiosos da área de Educação Matemática que tratam da utilização de recursos didáticos para o desenvolvimento do processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Nas escolas os espaços destinados às atividades lúdicas são sempre muito frequentados e nos momentos de formação, ainda é muito presente a certeza de que a alegria e o prazer são os melhores caminhos para a aprendizagem significativa dos alunos. Então, o que se faz necessário para que possamos garantir que esse caminho seja percorrido por alunos e professores? Quais as alternativas que vem sendo desenvolvidas no sentido de promover uma maior aproximação dos professores, aos outros espaços da escola?

Para respondermos a esses questionamentos, buscamos a utilização de brinquedos didáticos como o Tangram, que é um conhecido *quebra-cabeça chinês* formado de sete peças: um quadrado, um paralelogramo, dois triângulos isósceles congruentes maiores, dois triângulos menores também isósceles e congruentes e um triângulo isósceles médio.

Sobre as relações entre os conceitos matemáticos e as vivências dos alunos, Carvalho (1991) afirma que:

> Os conceitos que os alunos têm ao chegarem na escola são formados por interação com situações da vida cotidiana e pela concepção prévia que elas já têm das relações matemáticas. Essas concepções prévias devem aflorar para que o professor possa perceber os erros e enganos decorrentes delas, e utilizá-las, transformando-as em conceitos mais sofisticados e abrangentes. É essencial que o professor proponha aos alunos um conjunto de situações, tornando-se capaz de analisar as coisas

> mais profundamente, de revisar e ampliar os seus conceitos. (CARVALHO, 1991, p. 88)

No sentido de propor situações aos alunos, visando mobilizar os conhecimentos que são adquiridos em suas atividades práticas e que trazem registros de conceitos matemáticos, nos propomos a utilizar o Tangram, como recursos didático, afim que de os alunos pudessem identificar alguns conceitos como a proporção, muito comum ás atividades cotidianas.

Sobre o ensino da Matemática

No que se diz respeito ao processo ensino-aprendizagem de algumas disciplinas, e em específico deste trabalho, a matemática tem se destacado nos últimos tempos neste processo pelo uso de material lúdico. Um dos destaques é o Tangram, no qual possibilita ao aluno uma maior clareza no entendimento de certos conteúdos da matemática, dentre eles, a geometria. Essa clareza vem não apenas no utilizar o Tangram já pronto, mas também na construção deste, como afirma Neto "a ação de produzir o material é mais importante que o próprio material produzido" (NETO, 1988, p. 45).

De acordo com os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998, p. 57), um dos princípios norteadores do ensino de matemática no Ensino Fundamental é a utilização dos recursos didáticos numa perspectiva problematizadora. Sobre esta questão diz:

> Os recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão.

O uso do Tangram vem acontecendo com frequência nas escolas. Professores de matemática observaram que a utilização desse jogo ajuda a esclarecer alguns conceitos geométricos que, a princípio estão arraigados nos livros, de forma que muitos alunos não observam com clareza certas características, e com o material lúdico disponível, o teórico se torna concreto, e isso facilita a percepção de conceitos outrora invisíveis nos textos dos livros.

Segundo Toledo e Toledo (1997, p. 221), há alguns anos, felizmente, esse panorama vem se modificando; a geometria passa a ser vista como um campo muito rico de oportunidade para:

- o desenvolvimento de outros tipos de raciocínio, na resolução de problemas que exigem visualização e manipulação de modelos de figuras geométricas;
- o desenvolvimento estético e da criatividade, com a utilização de formas geométricas em atividades de composição e decomposição;
- a valorização de alunos cujo raciocínio é mais voltado aos aspectos especiais que quantitativos da realidade, conseguindo, assim melhor desempenho nas atividades de geometria do que naquelas ligadas a números.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo que vive.

A utilização desse material tem grande valor, enquanto recurso didático. No entanto, é preciso um maior empenho do professor, além da adequação do material ao conteúdo a ser trabalhado e planejamento compatível com o tempo da aula e a interação dos alunos (MIYASAKI, 2003).

Com um professor capacitado, o estudo da matemática com o Tangram resulta não somente numa melhor forma de compreender o conteúdo, mas também que propicia ao aluno um desenvolvimento e aceleração no raciocínio.

> [...] O TANGRAM está cada vez mais presente nas aulas de Matemática. Sem dúvida as formas geométricas que o compõe permitem que os professores vejam neste material a possibilidade de inúmeras explorações, quer seja como apoio ao trabalho de alguns conteúdos específicos do currículo de Matemática, ou como forma de propiciar o desenvolvimento de habilidades de pensamento. (SOUZA, 1997, p. 3).

Educação Matemática e as atividades lúdicas

Um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente. Mas como fazê-lo pensar produtivamente? Para isso nada melhor que apresentar-lhe situações-problemas que o envolvam, o desafiem e motivem a querer resolvê-las. Esta é uma das razões pela qual a resolução de problemas tem sido reconhecida no mundo todo como uma das metas fundamentais da matemática na educação básica nas séries iniciais. É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.

Devemos ensinar o aluno a enfrentar situações novas, pois estamos vivendo uma era de grandes e rápidas transformações e diante da rapidez das mudanças sociais e o aprimoramento cada vez maior e mais rápido da tecnologia ficamos impedidos de fazer uma previsão exata de quais habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos seriam úteis hoje para preparar um aluno para sua vida futura e quando poderíamos considerá-lo pronto para enfrentar as situações do amanhã. Não devemos ensinar apenas conceitos e algoritmos que são importantes hoje, mas que futuramente poderão estar obsoletos, quando se deve trabalhar em cima da produtividade que hoje está inserida na criança, logo se faz necessário que preparemos o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas, por isso é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas.

O professor deve oportunizar o envolvimento do aluno com as aplicações da matemática, pois apesar da importância da matemática e do quanto ela auxilia no desenvolvimento do raciocínio do aluno, logo nos primeiros contatos com essa ciência, começam a detestá-la ou tornam-se indiferentes a ela. Isso pode ser atribuído à forma como esses primeiros contatos são feitos e ao exagero no treino de algoritmos e regras desvinculadas de situações reais, além do pouco envolvimento do aluno com aplicações da matemática que exijam o raciocínio e o modo de pensar matemático para resolvê-las. A oportunidade de usar os conceitos matemáticos no seu dia-a-dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à matemática. Não basta saber fazer mecanicamente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente na resolução de situações-problema.

O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, resolve o problema que foi apresentado a ele. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo.

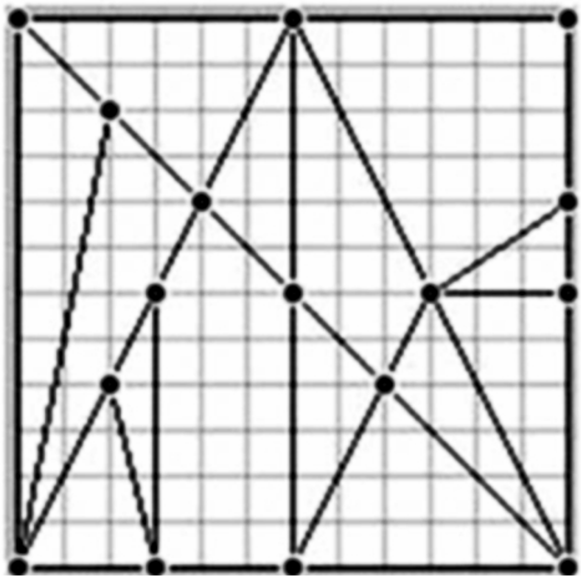
Durante uma aula deve-se buscar equipar o aluno com estratégias para resolver problemas desenvolvendo determinados planos que, em geral, se aplicam a um grande número de situações. Sendo assim, poderemos auxiliar na análise e na solução de situações onde um ou mais elementos desconhecidos são procurados. Adotando esta postura o professor ajuda o aluno a tornar-se capaz de enfrentar situações conhecidas e desconhecidas na escola ou fora dela.

Tangram

O Tangram é um jogo fantástico e ao mesmo tempo místico, onde sua história se mistura com lendas e mitos não sabem da sua real origem, assim como nos bastidores de algumas matemáticas, diferente dos outros tabuleiros semelhantes ao Tangram o stomachion formado por 14 peças criado por Arquimedes de Siracusa e que embora seja considerado um dos jogos geométricos mais antigo, sua história se perdeu ao passar dos séculos.

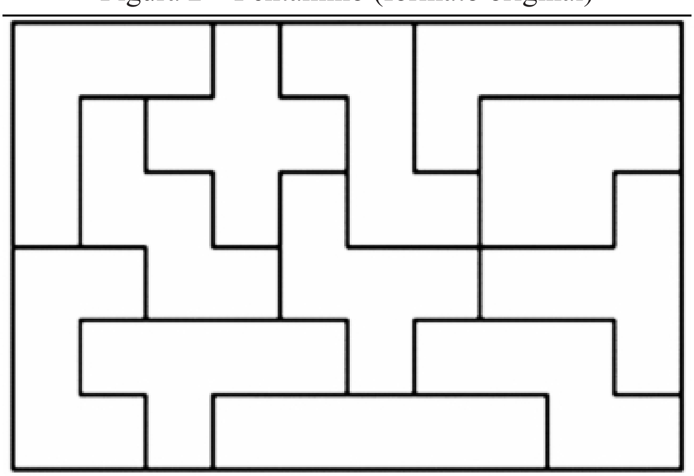
O pentaminó também tem sua particularidade no desenvolvimento lógico e cognitivo do aluno, porém nem o stomachion de Arquimedes, nem o pentaminó criado pelo americano Salomonw Golomb em 1953, são utilizados e conhecidos para o ensinamento da geometria plana em sala de aula como o Tangram.

Figura 1 – Stomachion (formato original)



Fonte: http://vinaemeustrabalhos.blogspot.com/2010/04/stomachion.html

Figura 2 – Pentaminó (formato original)



Fonte: http://www.educ.fr.ul.pt/icm/icm99/icm25/puzzles/pentaminos/direpentamino

A origem do Tangram se mistura entre lendas e mitos, que afirma trata-se de um jogo milenar com surgimento na china, originando-se de um acidente onde uma cerimônia de forma quadrada, que ao cair no chão se desfez em sete pedaços e desses pedaços se formava figuras como animais, plantas, objetos entre outros.

O Tangram que também é conhecido como jogo das sete peças é um quebra cabeça chinês formado por sete figuras geométricas. Dois triângulos grandes isósceles e congruentes, um triangulo isósceles médio, um paralelogramo, um quadrado e dois triângulos pequenos isósceles e congruentes (todos os triângulos são semelhantes entre si) de forma geral podemos dizer sete peças poligonais, juntas formam figuras humanas, abstratas e de diferentes tamanhos, de acordo com a forma e organização das peças.

Assim acreditamos que nesse movimento criativo de relação entre materiais didáticos e conceitos matemáticos.

Existem muitas lendas sobre o surgimento do Tangram desde a queda de um meteorito até um espelho mágico que em todos os casos, se quebra em sete pedaços. Seja como for a estrutura é sempre a mesma. Um sábio orienta seus discípulos a viajar pelo mundo registrando tudo de aprender pelo caminho.

Em uma das versões quando o jovem aprendiz retorna para falar ao seu mestre do que aprendeu viajando, num breve vacilo, deixa cair a tabua de argila onde fazia suas anotações. Em muitas versões é uma taboa de argila, que se quebra em sete pedaços. Para consolar o jovem, seu mestre lhe diz que aquelas pecas possuem o poder de representar tudo aquilo que o poder de representar tudo aquilo que o jovem deseja mostrá-lo (DANTAS, 2015). Enfim, essa e outras histórias, não passam de lendas não se sabe ao certo o surgimento do quebra cabeça.

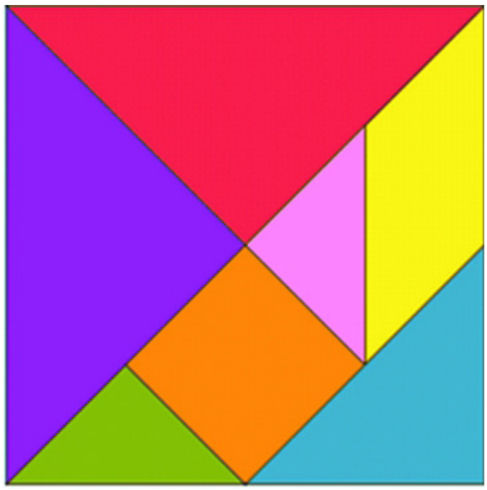
Como qualquer outro jogo, o Tangram tem suas regras definidas. Deve usar todas as sete peças, não deve haver grupos isolados de peças e também não pode se sobrepor.

A utilização do Tangram geometricamente não se limita apenas construir figuras, mas podem ser aplicados em estudos de áreas, ângulos, perímetros de algumas figuras geométricas.

A figura seguinte mostra o formato original do Tangram bem como algumas figuras que podem ser construídas.

As regras servem para organizar a disputas entre os jogadores.

Figura 3 – Quebra-cabeça no formato original



Fonte: Os autores.

A montagem de figuras com as peças do Tangram é um desafio estimulante, mas o professor deve propor adequadamente esse desafio. É importante que os alunos sejam motivados. Os professores devem incentivar os alunos na construção do Tangram por processo de dobraduras de papel e montagens das figuras em três níveis de manipulação, que são: inicial, intermediário e avançado.

Através do material concreto a manipulação da figura geométrica deixa a ideia de só o professor mostrar e o aluno imaginar, e passará a decompor as figuras de acordo com a explicação do educador, proporcionando uma melhor compreensão do conteúdo de geometria, mostrando que a matemática pode e deve ser aprendida de forma divertida.

Usando o Tangram nas atividades de geometria, especialmente na geometria plana e possível trabalhar os conceitos de ângulos, ponto médio, diagonais, retas paralelas e perpendiculares, a parte da construção do Tangram, ainda é possível calcular medidas de figuras planas como área e perímetro.

A utilização do Tangram geometricamente não se limita em apenas construir Figura. Mas a etapa de construção do quebra cabeça de várias figuras de certa forma já desperta no aluno a curiosidade em saber mais sobre as formas geométricas.

O jogo aprimora tais qualidades, bem como reflexão, criatividade, raciocínio logico visualização, percepção, especial e construção, proporcionando aos participantes habilidades e ideias necessárias. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 47) as atividades dos jogos permitem ao professor analisar e avaliar os seguintes aspectos:

Facilidade – construir a estratégia vencedora.

Compreensão – facilidade para entender o processo do jogo assim como o autocontrole e o respeito a si próprio.

Possibilidade de descrição – capacidade de comunicar o procedimento seguido e da maneira de atuar.

Propriedades do Tangram

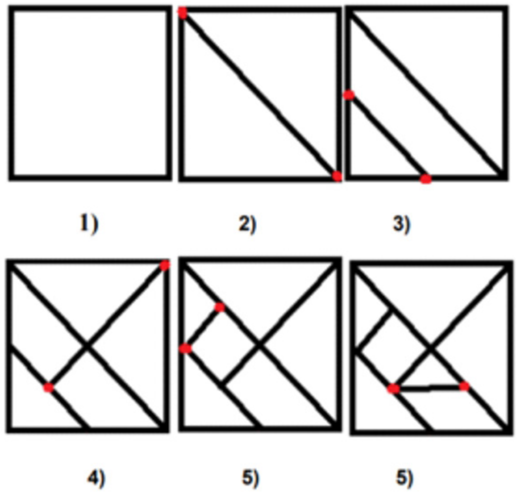
O jogo como ferramenta de estudo matemático, tem algumas propriedades que devem ser conhecidas antes de qualquer trabalho geométrico.

A Construção do Tangram

A forma geométrica que dá origem ao Tangram é um quadrado denominado aqui de quadrado inicial.

Traçando uma das diagonais, o quadrado se divide em dois triângulos congruentes. Num dos lados do quadrado, determina-se o ponto médio e por ele trace um seguimento paralelo a diagonal. Nesse seguimento traçado, determine o ponto médio, e trace outro seguimento perpendicular da diagonal até o vértice mais distante do quadrado. Até aqui construímos 3 triângulos retângulos e dois trapézios retângulos. Determine o ponto médio das bases maiores dos trapézios e por um deles trace a altura de um dos trapézios, pelo outro ponto médio, trace um seguimento até o vértice oposto do trapézio com os lados formam um ângulo reto, obtém então o Tangram por completo conforme indicado na figura seguinte.

Figura 4 – Construindo um Tangram



Fonte: GENOVA [3](1998, *apud* ALVES *et al.*, 2011).

Relações métricas no Tangram

Na sequência apresentamos algumas relações métricas entre o quadrado original, e obtemos os polígonos na construção do Tangram.

ÁREA – o Tangram na sua forma original representa um quadrado, por isso sua área é definida por: $1 \times 1 = 1^2$.

TRIÂNGULO – os 5 triângulos que compõem o Tangram são triângulos retângulos e isósceles.

O triângulo grande (Tg) representa um quarto da área de cada um desses triângulos, portanto sua área será $(1/4)^2$.

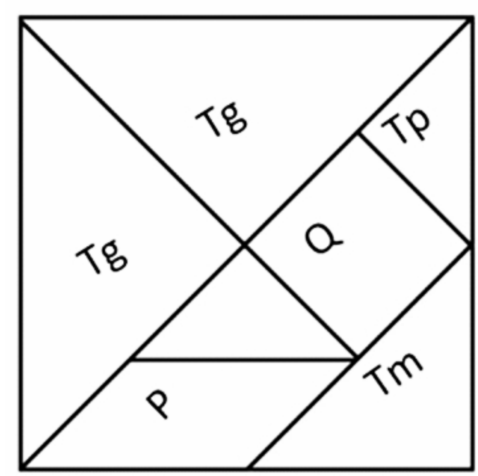
O triângulo médio (Tm), que tem sua hipotenusa, o seguinte que liga os pontos médios de dois dos lados adjacentes do quadrado inicial, sua base e sua área é determinada por $(1/2 \times 1/2)/2$ sua base e sua altura é a metade do lado do quadrado inicial.

Os dois triângulos pequenos (Tp) têm seus catetos com medida de 1/4 da diagonal do quadrado inicial, a área de cada um é definida por $(1^2)/16$.

O quadrado que compõe o Tangram possui lado igual, 1/4 da diagonal do quadrado inicial, possui área de $1^2/8$.

A base do paralelogramo encontrado no Tangram, mede a metade da altura um ¼ do lado do quadrado inicial, tem uma área definida matematicamente por ($1/2 \times 1/4 = 1^2/8$).

Figura 5 – Polígonos obtidos no Tangram



O presente artigo tem como objetivo geral mostrar a construção passo a passo do Tangram e como podemos usar nas atividades de geometria plana dentro da sala de aula do ensino fundamental II para facilitar o aprendizado sendo assim um ótimo instrumento de apoio metodológico, auxiliando na exploração de conceitos geométricos de um material motivado e agradável.

O Tangram foi apresentado como jogo lúdico tendo em vista a importância de práticas pedagógica em sala de aula, a escola deveria oportunizar tempo para brincar deveria incluir no calendário escolar, porque brincando se aprende, brincando se abstrai conhecimento. As brincadeiras trazem interação, uma forma nova de se relacionar, e também de se distrair.

A versatilidade do Tangram, como recursa disponível no processo de ensino aprendizagem, na matemática vai muito além da montagem das figuras metodológica.

Com as peças do Tangram podemos trabalhar perímetro e área de figuras planas, podemos também trabalhar a proporcionalidade entre suas peças já que elas representam figuras do nosso cotidiano.

7. Atividades

① Agora utilizando o TANGRAM podemos formar algumas figuras?

a) Com 3 peças construa um triângulo. Se a área do triangulo menor vale 1/2, qual é a área do triângulo formado?

b) Utilizando 3 peças, construa um retângulo. Se a área do retângulo menor vale 1/2, qual é a área do retângulo?

c) Utilizando 3 peças triangulares construa:

Um quadrado
Um triângulo
Um retângulo
Um paralelogramo

d) Com 2 peças construa um gato.

e) Com 7 peças construa uma casa, sendo a área do triângulo menor 1/2, qual é a área dessa figura?

f) Com 7 peças construa um polígono de 6 lados, sendo a área do triângulo menor1/2 qual a área desse polígono?

g) O que você percebeu ao montar e calcular a área das figuras utilizando as peças do Tangram?

8. Considerações finais

Após a aplicação da metodologia e da realização das atividades com os alunos do ensino fundamental pode-se comprovar que no trabalho do docente com o Tangram pode envolver teoria e prática em sala de aula, uma forma prazerosa e divertida no desenvolvimento das atividades, os alunos interagem de forma construtiva e dinâmica no ensino da geometria plana. Nesse processo de ensino e aprendizagem comentaram que gostaram bastantes das atividades desenvolvidas em sala de aula relacionada ao Tangram.

O professor deve sempre tentar incorporar novas possibilidades didáticas, para que as aulas se tornem mais atrativas e interessantes, trazendo o interesse daqueles alunos que não gostam da disciplina Matemática.

No processo de todo o desenvolvimento deste trabalho, surgiram novas ideias, de como tirar proveito do Tangram o jogo é rico em propriedades geométrica, porem pouco utilizado para o estudo da geometria. Seriam então essas ideias sem fundamentos para o trabalho com a matemática? São raras as bibliografias que tratam do assunto. A relação do Tangram com o estudo da geometria é vista em poucos livros e quando encontramos trata-se de pequenos comentários, nada que prenda a atenção do leitor, pra fazem um trabalho a este nível temos que procurar outras fontes, pois os livros não dão condições de executar esse tipo de trabalho.

Assim tiramos a geometria plana do papel através do Tangram, e ao representar para os alunos de forma clara e visível, comprovamos que o processo de ensino e aprendizagem se tornou atraente e divertido, uma forma de aprender brincando e cada vez mais fácil de entender a aula de matemática no ensino da geometria, poderíamos construir um quadrado de várias formas, trocamos o quebra-cabeça que sempre formava a mesma figura e passaram a criar suas próprias formas, formando ao mesmo tempo em que se diverte o raciocínio lógico, e assim como o chinês que quebram a cerâmica acidentalmente relata toda sua imaginação com apenas 5 triângulos, um quadrado e um paralelogramo.

Referências

BARSA, Enciclopédia. *Geologia-infantis*. Rio de Janeiro: Willian Benton, 1974. V.7.

DIRETRIZES Curriculares de Educação Básica, Matemática 2008. Disponível em: http://www.ciaducaciadattare.com.br

GÊNOVA, A Carlos. *Brincando com Tangram em origami*. 2. ed. São Paulo: Global, 1998

INOUE, Ana Amélia; MIGLIORI, Regina de Fátima; D'AMBROSIO, Ubiratan. *Temas transversais e educação e valores*. São Paulo: Peirópolis, 1999.

PIAGET, Jean. *Seis estudos de Psicologia*. 22. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1997

RIBEIRO, Flavia Dias. *Jogos e Modelagem na Educação Matemática*. 20. ed. Curitiba: Ibpex, 2008

ROMANOWSKI, Joana Paulin. *Formação e profissionalização docente*. 3. ed. Curitiba: Ibpex, 2008.

SADOVSKY, Patrícia. *O ensino de matemática hoje*. Enfoques, sentidos e desafios. São Paulo: Ética 2010.

SOUZA, Joamir Roberta de. *Novo olhar matemática*. São Paulo: FTD, 2010.

ZASLAVSKY, Claudia. *Jogos e Atividades Matemática do mundo inteiro*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

TDICS como recurso didático no ensino-aprendizagem de Matemática no ensino fundamental:
uma proposta com o *software* GCOMPRIS

Nilcilene da Silva Coelho

Rubenvaldo Monteiro Pereira

Resumo

O avanço das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), nas diversas áreas da educação, pode contribuir de maneira significativa no processo de ensino, uma vez que, o uso de *softwares* educacionais contam com diversos recursos, desde interfaces interativas até outras ferramentas que tornam mais atrativas e dinâmicas as aulas. Por essa razão, o presente trabalho propõe a utilização do *software* GCompris como recurso didático nas metodologias em sala de aula durante o processo de ensino-aprendizagem de Matemática. O GCompris foi utilizado como base dessa pesquisa, aplicado com a participação de professores e alunos em uma turma dos anos iniciais de Ensino Fundamental na cidade de Cametá/PA. Apresentamos os resultados obtidos por meio da Oficina "Brincando com o GCompris", ofertado no Infocentro do Campus Universitário do Tocantins Cametá (CUNTINS), sobre o nível de conhecimento dos alunos quanto às tecnologias, o contato com *softwares* educacionais e as impressões sobre o uso do programa nas aulas de matemática. Por outro lado, abordamos com os educadores sobre a infraestrutura tecnológica da escola, o nível de conhecimento em tecnologias digitais e impressões sobre o uso do GCompris como um recurso didático no ensino de matemática. A pesquisa mostrou que os participantes da oficina demonstraram ser favoráveis à aplicação dessa tecnologia como novo recurso de ensino para uma aprendizagem dinâmica e significativa da matemática em sala de aula.

Palavras-chave

GCompris. Tecnologias educacionais. Ensino de matemática.

Introdução

É notável, na sociedade atual, nos mais diferentes setores, a influência das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), pois estas estão, em alguma medida, cada vez mais presentes em nosso cotidiano. Desde uma simples comunicação – por meio de dispositivos eletrônicos estáticos, como desktops e notebooks; ou móveis, como smartphones –, para uso profissional e para o processo formativo, como uso softwares educacionais. Por essa razão, o uso de TDICs tem acarretado diversas mudanças na construção do sujeito como indivíduo em suas relações sociais e culturais e, em virtude disto, estas acabam ganhando espaço no ambiente educacional.

Desse modo, os avanços das TDICs podem influenciar no próprio processo de ensino-aprendizagem, uma vez que elas trazem consigo um repertório diversificado e dinâmico de contribuições para as inúmeras áreas do conhecimento. Por outro lado, é necessário compreendermos que as tecnologias estão em constantes mudanças, aperfeiçoamentos e diversificação, e, por conta disso, devem ser permanentemente lidas e criticadas por profissionais da educação e seus alunos (SAMPAIO; LEITE, 2013, p. 52), a fim de que possam ser melhor avaliadas, selecionadas e aplicadas essas tecnologias de acordo com as necessidades de aprendizagem dos educandos.

Nesse sentido, com base nas abordagens acerca das TDICs, em práticas de ensino já previstas no Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2014) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), nos questionamos até que ponto o uso dessas tecnologias pode auxilar de forma significativa o processo de ensino e aprendizagem. A partir disso, o presente estudo propõe a utilização do software GCompris como recurso didático nas metodologias em sala de aula durante o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, considerando que esse pode ser uma ferramenta fundamental para professores e alunos no processo educativo, por meio de aplicações de tarefas práticas, voltadas para uma turma do terceiro ano de uma escola da rede pública municipal.

No que tange ao ensino de Matemática, com o uso dessas tecnologias, o salto no aproveitamento do ensino de Matemática poderá ser ainda maior ao interligar conteúdos vistos, na maioria das vezes, de maneira descontextualizada, garantindo uma melhor compreensão sobre o mesmo conteúdo através desse software educativo, de modo que o uso desses recursos tecnológicos possibilitem a motivação e a inovação no processo educativo.

TDICs no processo de ensino e aprendizagem

Desde o surgimento e a popularização das TDICs é possível notar os grandes avanços e a importância do uso dessas tecnologias digitais em diversos setores da sociedade. Vaz *et al*. (2009) tratam essas inovações como uma "revolução tecnológica" que caracteriza nossa modernidade, pois, segundo eles,

> O desenvolvimento tecnológico tem provocado profundas modificações nos modos de vida da sociedade contemporânea. A cada dia, deparamo-nos com novos aparelhos tecnológicos e sistemas, sendo que, em particular, as áreas de telecomunicações e informações têm presenciado avanços até bem pouco tempo inimagináveis. (VAZ et al., 2009, p. 106)

O que antes era realizado somente com o uso dos computadores, agora se encontra bem mais acessível através do uso de aparelhos móveis como *smartphones*, IOS, *tablets*, *notebooks*, entre outros. Entretanto, no nosso cotidiano, elas não só refletem um modo inovador de comunicação, de interação e de informação, mas podem também contribuir, em alguma medida, para o processo educativo.

Quando se trata das tecnologias digitais em ambientes educacionais, surgem uma série de questionamentos sobre até que ponto o uso dessas ferramentas se torna possível nos currículos de ensino e de que maneira podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, a BNCC, assim como outros documentos educacionais, orienta para o uso das TDICs nas escolas. Essa prescrição se dá, pois, segundo o documento,

> O uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e

> testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 536).

Desse modo, trata-se de uma oportunidade de que as TDICs possam ser utilizadas como ferramentas de ensino, incluídas na prática docente, a fim de promover e motivar o apoio aos educadores à implementação em suas metodologias educacionais ativas, alinhando o processo de ensino-aprendizagem à realidade dos estudantes e despertando maior interesse e engajamento dos alunos em todas as etapas da Educação Básica.

Portanto, apesar da presença cada vez mais comum das TDICs no dia a dia de todos, no ambiente educacional, esse processo é mais lento. Por outro lado, a chegada e a utilização dessas tecnologias digitais nas escolas permitirão(iam) que os procedimentos de ensino se adequem à nova realidade, de modo a auxiliar o desenvolvimento da aprendizagem dos educandos, podendo lhes oferecer uma maior integração entre novos conhecimentos e práticas e essas tecnologias para um processo contínuo de suas capacidades.

PNE e BNCC: o uso de TDICs no ensino de Matemática

O uso das TDICs no ensino tem gerado debates há algum tempo, uma vez que não há consenso acerca de quais tecnologias digitais devem ser usadas e de como devem ser trabalhadas pelos educadores em sala de aula. Por outro lado, existem documentos oficiais normativos que devem fomentar a inclusão desses recursos por meio de planos e metas para a educação.

Nesse sentido, o Plano Nacional de Educação (PNE), que constitui um marco fundamental para as políticas públicas brasileiras, aprovado pela Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014, apresenta como um dos seus principais objetivos viabilizar o uso dessas tecnologias de maneira significativa, de modo que sejam inseridas como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Esse objetivo faz parte das 20 metas apresentadas pelo PNE para a educação. Em conjunto, elas buscam a articulação na intenção de consolidar um sistema educacional, garantindo o direito à educação de seus cidadãos e, dessa forma, reduzindo de maneira significativa as desigualdades sociais. (BRASIL, 2014).

Se por um lado, as Metas iniciais, de **1** a **6,** do PNE, têm por objetivo garantir o direito à educação básica com qualidade, como proposto na **Meta 6,** a qual visa "oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos (as) alunos (as) da educação básica" (BRASIL, 2014, p. 97), a partir de quatro estratégias que estabeleçam condições de infraestrutura educacional, das quais podemos destacar a estratégia **6.3** que busca

> Institucionalizar e manter, em regime de colaboração, programa nacional de ampliação e reestruturação das escolas públicas, por meio da instalação de quadras poliesportivas, laboratórios, inclusive de informática, espaços para atividades culturais, bibliotecas, auditórios, cozinhas, refeitórios, banheiros e outros equipamentos, bem como da produção de material didático e da formação de recursos humanos para a educação em tempo integral; (BRASIL, 2014, p. 99).

Por outro lado, as metas seguintes, como da **15** a **18,** dão ênfase à valorização dos profissionais da educação. Em especial, a Meta 15, a qual propõe um regime de colaboração entre a União, Estados, Distrito Federal e Municípios para Política Nacional de Formação dos Profissionais da Educação, adota algumas estratégias para esse objetivo. Destacamos a sessão **15.6** desta meta, cujo objetivo é,

> Promover a reforma curricular dos cursos de licenciatura e estimular a renovação pedagógica, de forma a assegurar o foco no aprendizado do (a) aluno (a), dividindo a carga horária em formação geral, formação na área do saber e didática específica e incorporando as modernas tecnologias de informação e comunicação, em articulação com a base nacional comum dos currículos da educação básica, de que tratam as estratégias 2.1, 2.2, 3.2 e 3.3 deste PNE. (BRASIL, 2014).

Essa proposta deve dar a oportunidade para o uso de novas tecnologias digitais no ambiente de aprendizado, uma vez que seja garantida ao educador a formação adequada para lidar com novos objetos de ensino. Nesse sentido, a conjunção entre o acesso a novas ferramentas educacionais e a qualificação do profissional de educação corrobora um conjunto de ações para o desenvolvimento das aprendizagens em sala de aula.

O produto dessa conjunção deve se refletir nas propostas curriculares. São elas que orientam de modo geral os planos de ensino e as metas de aprendizagem. Portanto, são parâmetros para que o educador possa desenvolver seus métodos e suas ações conforme os objetivos de ensino. Nesse sentido, foi desenvolvida uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e sua versão final foi homologada no dia 19 de dezembro de 2018, com a inclusão da etapa do Ensino Médio, sendo fundamental para toda a educação brasileira, na busca por uma educação pública com melhoria na qualidade da aprendizagem, por meio de orientações para práticas de ensino sobre as diferentes áreas do conhecimento.

No que tange o ensino de Matemática, no nível fundamental, a BNCC organiza as habilidades conforme as unidades de conhecimento da própria área, sendo elas, Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Essas unidades devem estabelecer relações com componentes do cotidiano do aluno e de diferentes temas matemáticos para que, desse modo, faça sentido para o conhecimento do aluno.

Nesse contexto, o currículo afirma que para o desenvolvimento de uma compreensão Matemática é necessário que sua aplicação esteja relacionada à concepção prática. Nesse sentido, torna-se fundamental o uso de ferramentas que possam, não apenas auxiliar o professor nas suas ações didáticas, mas, contribuir de maneira significativa para o processo de aprendizado do aluno. Por esse motivo, a BNCC lista alguns recursos que podem potencializar o aprendizado da matemática em sala de aula, como

> (...) recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas (BRASIL, 2018, p. 276).

De maneira geral, o uso das TDICs no ensino é enfatizada em algumas das sete Competências gerais da educação básica. Na Competência Geral (CG) 1, da BNCC, trata sobre a valorização e a utilização de conhecimentos construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para o melhor entendimento e explicação da realidade. Já na CG 2, ressalta-se a importância de exercitar a curiosidade intelectual fazendo a associação da tecnologia nas mais diversificadas áreas do conhecimento, propondo a possibilidade de criação de soluções nas resoluções de problemas. Especificamente, a CG 5, destaca-se das demais Competências, quanto ao uso de TDICs, por buscar

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9)

Sendo assim, as TDICs podem ocupar um papel determinante para o desenvolvimento de habilidades e competências, uma vez que essas novas ferramentas, em sala, são capazes de ajudar na produção de conhecimento, auxiliar significativamente para melhor compreensão de processos e resolução de problemas, tornando o aluno o protagonista da prática de aprendizagem.

Nesse sentido, para o ensino de matemática no contexto das novas tecnologias digitais, destacamos, dentre as 8 Competências Específicas (CE) da BNCC para o ensino fundamental, a CE 5 que ressalta a importância da utilização das TDICs para "para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados". (BRASIL, 2018, p. 267).

Portanto, é possível verificar nos breves comentários sobre o PNE e a BNCC a relevância do uso de TDICs no ambiente educacional. Enquanto a primeira tenta fomentar o acesso para as novas tecnologias, a segunda corrobora a inserção destas nas práticas de ensino e aprendizagem em sala de aula. Por outro lado, no que diz respeito ao conhecimento matemático, para uma melhor compreensão sobre a maneira como essas tecnologias estão sendo utilizadas no processo de ensino, apresentamos na próxima seção o *software* GCompris e suas possibilidades para o ensino e aprendizagem da Matemática.

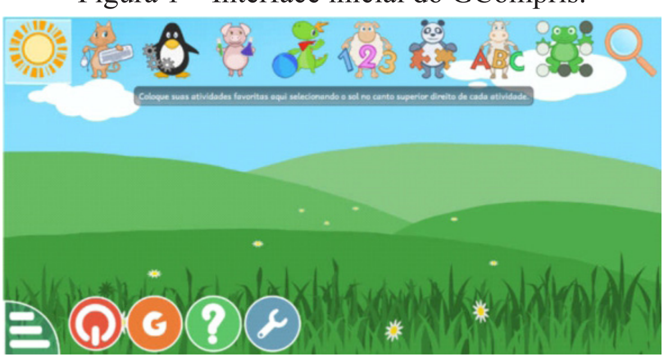
O uso do *software* GCOMPRIS como recurso educativo no ensino de Matemática

O uso de *Softwares* educacionais no ensino da Matemática nos mostra o quanto essas tecnologias se tornam importantes ferramentas nesse processo. O GCompris[1], o qual utilizamos nas oficinas para dados sobre a importância do uso dessas tecnologias em sala de aula, no ensino da matemática, permitem ao educador associar suas práticas de ensino ao contexto digital (COELHO, N.S., PEREIRA, R. M., 2018).

O Software educacional GCompris é parte integrante da plataforma Linux Educacional, presente em computadores distribuídos às instituições públicas de ensino pelo Governo Federal, e é composto, em sua versão atual, por mais de 100 atividades educacionais, destinadas a crianças com idades entre 2 e 10 anos. Trata-se de um software livre, nas versões para plataforma Linux e *shareware* para sistemas operacionais comerciais como Windows, IOS e Android.

As atividades nele contidas têm a finalidade de educar de maneira lúdica, por meio de elementos de uma interface interativa, atrativa e intuitiva, que busca dessa forma tornar o processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático uma tarefa dinâmica e contextualizada. Sua interface inicial está ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Interface inicial do GCompris.



Fonte: Os autores (2020).

[1] Este programa foi desenvolvido por Bruno Coudoin, em 2000.

O uso pedagógico em sala de aula do GCompris é defendido por Gulo et al. (2008, p. 258-259), como:

> [...] uma ferramenta de apoio ao ensino e a aprendizagem nas áreas do conhecimento de: língua portuguesa, matemática, ciências, geografia e atividades de educação artísticas, as atividades proporcionam o raciocínio lógico e o desenvolvendo de habilidades. (GULO et al. 2008, p. 258-259).

Portanto, algumas atividades desse programa, apesar do seu aspecto lúdico, trazem consigo tarefas de cunho educacional que buscam potencializar habilidades e conhecimentos em diferentes áreas. Podemos destacar as seguintes atividades e suas categorias com alguns exemplos:

▪ Descoberta do computador: teclado, mouse, touchscreen, ...

▪ Leitura: letras, palavras, prática de leitura, digitação de texto, ...

▪ Aritmética: operações com números, memorização de tabelas, enumeração, tabelas de entrada dupla, ...

▪ Ciências: controle do canal, ciclo da água, energia renovável, ...

▪ Geografia: países, regiões, cultura, ...

▪ Jogos: xadrez, memória, ligue 4, forca, jogo da velha, ...

▪ Outros: cores, formas, Braille, aprenda a dizer as horas, ...

Para o presente estudo, são abordados somente as atividades que trabalham com as competências em matemática. Atualmente, o GCompris possui 81 atividades no seu menu de jogos matemáticos e está em constante atualização. Essas atividades são divididas nas seguintes áreas: geometria, álgebra, operações de soma e subtração, operações de multiplicação, mastigadores de números, memória e contagem. Elas podem ser desenvolvidas a partir do primeiro ano do ensino fundamental. No quadro abaixo estão relacionadas as habilidades desenvolvidas em cada área de conhecimento anteriormente citada.

Quadro 1 – Relação das áreas e habilidades desenvolvidas em atividades matemáticas.

GCOMPRIS

ATIVIDADE	HABILIDADE
Geometria	Perceber as cores primárias, secundárias e terciárias; identificar os órgãos dos sentidos; diferenciar os meios de transportes; definir os tipos de animais e alimentos; classificar diversos objetos.
Álgebra	Treinar a memória; desenvolver as quatro operações fundamentais matemáticas.
Operações de soma e subtração	Desenvolver o raciocínio lógico, concentração; desenvolver a percepção das cores e do ambiente.
Operações de multiplicação	Desenvolver o raciocínio lógico e a concentração; intensificar a percepção das cores e do ambiente.
Mastigadores de números	Desenvolver o raciocínio, fixar as operações matemáticas.
Memória	Treinar a memória; desenvolver as quatro operações fundamentais matemáticas.
Contagem	Identificar quantidades; compreender as quatro operações matemáticas; desenvolver a percepção das cores; conhecer a importância e o nome das frutas; escrever palavras e produzir textos.

Fonte: Os autores (2020).

Já na Figura 2 é exibido o menu de alguns jogos matemáticos como: jogo da memória da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; comilão dos números múltiplos e outros, que podem ser utilizados como recurso didático com alunos na faixa etária entre 6 e 10 anos de idade.

Figura 2 – Interface das atividades de matemática.

Fonte: Os autores (2020).

Ao finalizar cada atividade, o GCompris exibe uma tela que retrata o término da etapa, onde é exibida uma florzinha. Se a mesma estiver com semblante feliz, resulta que a atividade foi concluída com êxito, mas se ela estiver triste, significa que a atividade não foi concluída com sucesso.

Para finalizar, é importante ressaltar que o GCompris é um *software* livre e diversificado, podendo ser compartilhado por crianças de idades e contextos sócio-culturais diferentes, o que significa que é possível adaptá-lo às necessidades do educando e melhorá-lo de acordo com os objetivos de ensino, com isso, tornando-se uma ferramenta importante no auxílio do aprendizado. Assim, as TDICs e os *softwares* educacionais se tornam aliados no processo de ensino e aprendizagem, pois o uso desses recursos tecnológicos podem possibilitar a motivação e a inovação no processo educativo, tornando as aulas mais interessantes e significativas, proporcionando assim, maior compreensão do conteúdo e interação entre os alunos e professores.

Metodologia da pesquisa

Este trabalho aborda sobre TDICs no processo de ensino de matemática por meio do uso de *softwares* educacionais, em especial o *software* GCompris. Com a popularização dessas tecnologias no cotidiano, verificou-se a necessidade de oferecer à comunidade escolar projetos que fomentam o uso dessas tecnologias no processo formativo, a partir disso, em parceria com a Faculdade de Matemática (FAMAT) do Campus Universitário Tocantins Cametá (CUNTINS), promoveu-se, nos anos de 2018 e 2019, projetos voltados para essa finalidade, além de oficinas como "Brincando com o GCompris", pela qual foram obtidos alguns dados que serão explanados na próxima seção.

A oficina "Brincando com o GCompris" foi ofertada no INFOCENTRO do CUNTINS aos alunos e professores responsáveis da turma do terceiro ano do ensino fundamental "A" e "B", de uma escola da rede municipal de ensino, com carga horária de 4 horas que contou com aproximadamente 30 alunos e 2 professoras responsáveis (Figura 3). Nesse período, o INFOCENTRO contava apenas com 26 computadores, por isso, utilizamos também alguns celulares com o *software* instalado. A oficina teve como objetivo apresentar o software GCompris como um auxílio no aprendizado de matemática, para que, ao brincar com o Software, a criança pudesse aprender.

Figura 3 – Ministração da oficina.

Fonte: Acervo dos autores (2020).

Dentre as propostas de atividades do GCompris envolvendo o ensino da matemática, buscamos as atividades que abordam a soma e subtração que foram adaptadas e desenvolvidas com os alunos e as professoras. Durante a oficina foram realizadas atividades. Citamos como exemplo duas dessas atividades:

a) **Chapéu Mágico:** Desenvolve competências em contagem, operações de adição e subtração de números naturais. É um jogo divertido que pode estimular também a socialização ao brincar em grupo. Com a aplicação dessa atividade são trabalhadas algumas habilidades como o desenvolvimento do raciocínio lógico, o estímulo do cálculo mental e a capacidade de calcular a soma proposta. Essa atividade pode ser usada nas aulas de matemática a partir do primeiro ano do ensino fundamental. Para utilizar basta clicar no chapéu para abri-lo, em seguida, algumas estrelas irão escapar, a partir disso deve ser feito o cálculo de quantas estrelas estão sobre o chápeu;

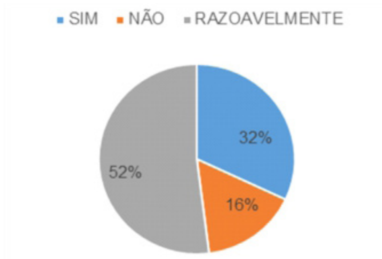
b) **Gnumch (mastigadores de números):** São jogos no estilo "come-come" para brincar com conceitos da aritmética de números naturais como diferença, igualdade, múltiplo, fatorial e primos. Na aplicação dessa atividade, em ambos conteúdos abordados, são trabalhadas as habilidades de desenvolvimento do raciocínio e fixação das operações matemáticas. Pode ser usada a partir do primeiro ano do ensino fundamental. Para isso basta apenas utilizar as teclas de setas para navegar pelo tabuleiro e evitar os monstrinhos que vão persegui-lo. Deve-se então resolver as operações propostas pressionando a barra de espaço para comer o número.

Ao final da realização da oficina foi aplicado um questionário para os alunos na faixa etária de 7 a 9 anos, e para as professoras que acompanhavam a turma. Para os alunos o objetivo foi aferir o conhecimento em informática e se o uso de TDICs e, em especial, o *Software* GCompris, podem ajudar de fato no processo de aprendizagem da matemática. Já para as professoras, além de aferir seu conhecimento quanto a informática; o objetivo era conhecer sobre seus pontos de vista quanto ao uso dessas TDICs em sala de aula. Como forma de aferir os resultados utilizamos a escala de 0 (zero) a 100% (cem por cento) nas perguntas objetivas. A seguir, apresentaremos os principais resultados obtidos na oficina voltados aos alunos e as professoras que acompanharam.

Resultados e discussões

Inicialmente, perguntou-se aos alunos se eles sabiam utilizar o computador. A partir dessa pergunta, verificamos que a maioria sabe, em alguma medida, utilizar o aparelho eletrônico:

Figura 4 – Autoavaliação sobre o conhecimento sobre o uso do computador dos alunos.



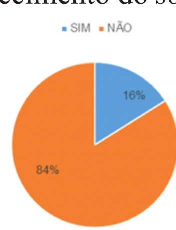
Fonte: Os próprios autores (2020).

Em seguida, se eles já haviam tido contato antes com algum *software* educativo. Cerca de 25% responderam que SIM, mas 75% responderam que NÃO. Por meio desses dados e dos da figura 4, é provável que, apesar de uma boa parte dos alunos terem algum conhecimento de informática básica, com uma minoria que ainda desconhece, o uso de *softwares* educacionais ainda não é comum na vivência escolar da maioria dos alunos, uma vez que desconhecem o uso dessas possibilidades.

Essa informação pressupõe que as TDICs ainda não figuram no espaço em sala de aula e que, por essa razão, não há uma condução de ensino de matemática com o auxílio desse *software*. No entanto, pelo que trata o PNE, deveria ser viabilizado o uso dessas tecnologias em sala, de modo que fossem inseridas como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem (BRASIL, 2014).

Sobre o *Software* GCompris, perguntamos se os alunos já o conheciam. Como podemos observar na figura abaixo, a maioria desconhece o *software*:

Figura 5 – Conhecimento do *software* GCompris.

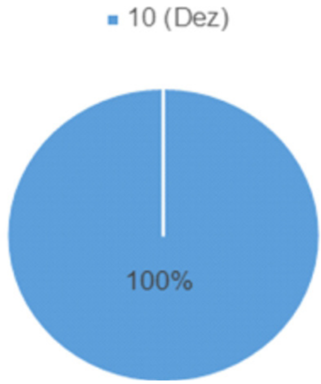


Fonte: Os próprios autores (2020).

Cerca de 84% não conheciam esse *software* educacional. Essa informação é, portanto, coerente com as informações anteriores, das quais a maioria dos alunos não experienciam o uso de tecnologias digitais educativas. Está situação ocorre, pois é necessário a compreensão de que que essas tecnologias estão em constantes mudanças, por esse motivo, devem ser permanentemente lidas e criticadas por profissionais da educação e seus alunos (SAMPAIO; LEITE, 2013, p. 52).

Em relação à escala de notas de 0 a 10, os alunos atribuíram ao Gcompris a seguinte nota:

Figura 6 – Nota atribuída ao Software GCompris.



Fonte: Os próprios autores (2020).

Obtivemos um resultado unânime por parte dos alunos, em que atribuíram a nota 10 ao uso do *software*. Esse dado nos dá indícios a respeito da eficácia da utilização dessa tecnologia para o favorecimento do processo educativo. Essa hipótese é reforçada quando perguntamos se o *Software* melhorou a compreensão dos conteúdos abordados durante a oficina. Cerca de 8% responderam que melhorou RAZOAVELMENTE as suas compreensões sobre os conteúdos de matemática, apesar disso, 92% responderam que SIM, o uso do GCompris melhorou e "*muito*" a compreensão dos conteúdos, como relatado por uma aluna participante da oficina em sua fala.

Por outro lado, ao indagarmos as professoras responsáveis pela turma que participaram da oficina, sobre a facilidade de manusear o computador, ambas responderam que SIM, têm facilidade para utilizar o aparelho eletrônico. Entretanto, quando perguntamos sobre quais eram as maiores dificuldades quanto a utilização do laboratório de informática da escola, tanto a professora “X” quanto a professora “Y”, responderam que, *“O número reduzido de computadores e a formação para o uso de jogos educativos”* são os principais impasses para uso dos computadores para fins educacionais.

Observa-se que ainda é necessário um maior investimento de infraestrutura educacional, uma vez que, é destacado na estratégia **6.3** da **Meta 6** no PNE o investimento em laboratórios inclusive de informática (BRASIL, 2014, p. 99). Contudo, essa é uma realidade ainda distante de muitas escolas interioranas, pois em sua grande maioria não contam com esse recurso, enquanto as que possuem laboratórios sendo minoria, contam com poucos computadores e não recebem devidas manutenções. Também, faz-se necessário a oferta contínua de formação continuada para os educadores prevista pela **Meta 15,** porém a ofertada ainda é baixa para os mesmos.

Sobre o uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, especialmente da matemática, a visão das educadoras sobre o uso dessas tecnologias em sala de aula são as seguintes: A educadora “X” responde *“sim, sim, pois é uma forma criativa de trabalhar a matemática”*; já a “Y” responde que *“é uma forma inovadora para trabalhar os objetos do conhecimento desse componente curricular”.* Ou seja, para as profissionais há uma necessidade de adequação das práticas de ensino as novas tecnologias, uma vez que essas podem proporcionar experiências dinâmicas e criativas para o aprendizado do aluno.

Nesse sentido, a BNCC enfatiza tanto nas CG 1, CG 2 e CG 5 quanto na CE 5 que o uso dessas tecnologias podem não apenas auxiliar o educador nas ações didáticas como contribuir para o processo de ensino do aluno trazendo melhor compreensão de processos e resolução de problemas (BRASIL, 2018).

Apesar delas preconizarem o uso de tecnologias digitais educacionais, ambas responderam que não conheciam o GCompris. Contudo, a experiência com o uso desta ferramenta resultou, em uma escala de 0 a 10, a nota 10 sobre o *software* pelas educadoras. Ainda, ao indagarmos se as educadoras acreditam que o uso de TDICs, especificamente, o *Software* utilizado na oficina, realmente poderiam melhorar as aulas para o desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos, ambas responderam que "SIM", o que ressalta ainda mais a importância para se refletir sobre a inserção dessas tecnologias nas metodologias em sala de aula.

Considerações finais

A proposta de se usar as TDICs como um recurso didático-pedagógico, no ensino da Matemática, tem se firmado como uma necessidade no Ensino Básico. Por essa razão, considerando que *softwares* educativos podem ser uma ferramenta fundamental para professores e alunos no processo educativo, surgiu a necessidade de se realizar a aplicação do *software* GCompris para os alunos de uma escola da rede municipal de ensino em Cametá/PA, a fim de saber até que ponto o uso dessas tecnologias podem auxiliar de forma significativa o processo de ensino e aprendizagem, por meio de aplicações de tarefas práticas.

As pesquisas realizadas com os alunos e com os professores responsáveis pela turma apontam para a aceitação do uso dos *softwares* em sala, uma vez que, puderam auxiliar em alguns conteúdos tornando-os mais claros. Enquanto que, para os alunos foi um momento diferente onde puderam aprender sobre o conteúdo ministrado em sala de aula através do *software* GCompris, facilitando assim o processo de aprendizagem, por outro lado, os professores responsáveis se sentiram entusiasmados ao conhecer uma nova ferramenta educativa que pode auxiliar durante as aulas, provocando uma mudança dos meios de ensino tradicional para novos meios que buscam facilitar, dinamizar e contextualizar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Porém, apesar da utilização do GCompris ter sido positiva, os dados também revelam que ainda é necessário um investimento maior na formação complementar do educador com a possibilidade de formações periódicas para capacitá-los ao uso desses novos recursos tecnológicos. Mesmo sabendo que ainda falta muito para inclusão de *softwares* educacionais como recursos pedagógicos nos sistemas de ensino, pois, ainda vivemos uma realidade em que há carência de laboratório de informática nas escolas da rede municipal de ensino, acreditamos que a continuidade de ações que venham a divulgar e capacitar professores e alunos, em novas tecnologias, é uma forma de repensar e despertar sobre inclusão digital e o uso das TDICs no ensino.

Portanto, as razões pelas quais as tecnologias e recursos digitais devem, cada vez mais, estar presentes no cotidiano das escolas se dá pelo fato de que o *software* GCompris auxiliam significativamente nas práticas de ensino dos professores e no aprendizado dos alunos. Por outro lado, ainda é necessário promover a alfabetização e o letramento digital, tornando os sujeitos do ambiente educacional acessíveis às tecnologias e as informações que circulam nos meios digitais e oportunizando a inclusão digital. Dessa forma, na medida em que vão sendo ampliados novas formas significativas de aprender, vão sendo superados paradigmas de ensino tradicionais.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF: MEC, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF _110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 08 fev. 2019.

LOPES, M. G. *Jogos na educação*: criar, fazer, jogar. São Paulo: Cortez, 2001.

MONTEIRO, N. A. Plano Nacional de Educação 2014-2024: As perspectivas tecnológicas nas escolas. *Revista Retratos da Escola*, Brasília, v. 8, n. 15, p. 489-503, jul./dez. 2014.

SAMPAIO, M. N.; LEITE, L. S. *Alfabetização tecnológica do professor*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

VALENTE, J. A. *Informática na Educação no Brasil: análise e contextualização histórica.* In: Valente, J. A. (org.). O Computador na sociedade do conhecimento. Campinas, SP: Unicamp/Nied, 1999. p. 11-30.

VAZ, C. R.; FAGUNDES, A. B.; PINHEIRO, N. A. M. O surgimento da ciência, tecnologia e sociedade (CTS) na educação: uma revisão. *In*: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, *Anais*... Paraná, 2009. Disponível em: http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/1%20CTS/CTS_ Artigo8.pdf. Acesso em: 29 abr. 2018.

O uso de materiais manipuláveis em oficinas pedagógicas no contexto do ensino médio

Oseas Rodrigues Cota

Daniele Esteves Pereira Smith

Resumo

O presente trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada em uma escola pertencente a rede pública estadual do município de Mocajuba, mais especificamente uma turma do 2º ano do Ensino Médio, cujo momento de realização foram as aulas de Geometria Espacial. Os objetivos da pesquisa são de apresentar os resultados referentes ao uso de oficinas pedagógicas que utilizam material manipulativo para o ensino dos poliedros e suas planificações. A oficina pedagógica ocorreu em três momentos: Construção das planificações, animação de mudança da segunda dimensão (planificação) para a terceira dimensão (sólidos) e avaliação das atividades. A pesquisa buscou apoio teórico a partir de Lorenzato, no que tange o material didático manipulável e Viera e Volquind que discutem sobre o uso de oficinas pedagógicas. Apresenta algumas considerações sobre o uso de materiais manipuláveis e oficinas pedagógicas nas aulas de Geometria. Concluímos que a construção de alguns poliedros e suas planificações por meio da oficina pedagógica facilitou a compreensão dos conceitos geométricos explorados. Evidenciamos também que os alunos, ao trabalhar com recursos dessa natureza, se envolvem, participam ativamente e aprovam aulas que atribuam significados ao que fazem em sala.

Palavras-chave

Educação Matemática. Materiais Manipuláveis. Oficinas Pedagógicas. Poliedros. Planificações.

Introdução

Na prática docente surgem inúmeras dificuldades com o processo ensino-aprendizagem indicam a necessidade de mudanças para que o discente possa interagir com o meio em que vive, e dar um sentido ao conhecimento construído, tornando-se assim, um cidadão participativo e crítico. Nessa busca é necessário empenho, criatividade e dinâmica para obter novas alternativas, e alcançar essas melhorias. Nesse sentido, é necessária uma mudança de paradigma, de forma que o professor torne se um mediador dessa construção e não um mero transmissor de conhecimento.

O presente trabalho apresenta os resultados de uma atividade prática sobre poliedros e suas planificações aplicada em uma turma do 2º ano do ensino médio de uma escola estadual no município de Mocajuba-PA, na qual atuei como professor e pesquisador. Foi fundamentado em estudos sobre atividades práticas, através do uso de material didáticos manipulável no ensino de Matemática e oficinas pedagógica de matemática no qual foram analisadas estratégias e alternativas para o ensino dos poliedros.

Atualmente os alunos estão cercados por uma diversidade de tecnologia que provem de uma vasta informação, cabe ao professor organizar essas informações e trazer ao seu favor esse mecanismo. Como afirma Nóvoa apud Machado Junior (2005, p. 11), “Nos dias de hoje, não basta ao professor abrir a porta, entrar na sala de aula e dar sua aula, ele tem que criar condições para que a educação possa acontecer”.

Nesse sentido Lorenzato (2006), afirma que o professor tem um papel muito importante no sucesso ou fracasso escolar do aluno. Para este autor, não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa. Mais importante do que isso é saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula.

Quando estudei o ensino médio de 2004 à 2006 observei que os professores de Matemática sempre deixavam os conteúdos de geometria em segundo plano, era o último conteúdo estudado e de forma rápida e totalmente na lousa sem qualquer interação, sempre íamos direto para os cálculos sem mesmo entender as formar geométricas. Durante a graduação e principalmente na pós-graduação entendi a importância da geometria e aprendi outras estratégias de ensino que podem facilitar o entendimento dos alunos e fazer com que eles possam se sentir mais motivados nas aulas de Matemática.

Como professor tive a oportunidade de aplicar e investigar como funcionam essas metodologias, por isso busquei dinamizar e combinar os poliedros para que a imagem tridimensional não fique somente no papel, mais tenha um significado para o aluno, despertando assim a autonomia dos estudantes para registrar suas concepções. Diante dessas informações destacamos o seguinte questionamento, que norteou o trabalho.

De que maneira os materiais manipuláveis, através de oficinas pedagógicas favorecem no desenvolvimento de habilidades e na compreensão dos poliedros e suas planificações?

A partir das dificuldades em associar os poliedros e suas planificações a sua realidade, usamos a confecção desses sólidos como alternativa para subsidiar a construção do conhecimento, por parte do educando valorizando cada conceito absorvido por meio de uma prática que o leve a resgatar o interesse pela Matemática. Assim, partimos de uma investigação sobre como as atividades com material manipulável pode auxiliar e contribuir na resolução de problemas, e consequentemente na construção do conhecimento por parte do aluno fazendo com que o mesmo perceba que está rodeado de formas geométricas.

Então nessa proposta, foi sugerido como recurso didático o material didático manipulável e como estratégia de ensino as oficinas pedagógicas no ensino dos poliedros. A ideia desse tipo de abordagem é mostrar que a Matemática não é um saber pronto e acabado ou um conjunto de técnicas, e sim um conhecimento vivo, presente no seu dia a dia que está ali para atender suas necessidades numa linguagem simbólica e ao mesmo tempo concreta. Pois segundo os PCNs, "sendo a matemática uma forma especial de pensamentos e linguagem, a apropriação deste conhecimento pelo aluno se dá por um trabalho gradativo, interativo e reflexivo" (BRASIL, 1998, p. 107).

Os resultados foram obtidos após a realização de uma oficina para a construção dos sólidos aplicada numa Escola Estadual de

Ensino Médio, na cidade de Mocajuba-PA. Nessa oficina foram utilizadas atividades diversificadas envolvendo a geometria plana e espacial, culminando na construção das planificações. Durante a aplicação da atividade os alunos tiveram aulas expositivas, de geometria espacial. Nas aulas seguintes aconteceu o contato com os instrumentos de construções das planificações, os quais foram analisados tendo como base os pressupostos teóricos que fundamentam a pesquisa.

Importância do estudo da geometria espacial

Vivemos num mundo rodeado de formas geométricas especialmente a espacial, seja na natureza ou dentro de casa. Ou seja, a geometria plana é uma ferramenta de embasamento para a geometria espacial, na qual o aluno necessita desses conhecimentos para moldar e ter visão de mundo dos objetos que o rodeiam.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância desse ramo da matemática que também serve de instrumento para outras áreas do conhecimento:

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 39).

Esse elo entre a teoria e a prática é fundamental para a aprendizagem, na qual irão conhecer vários elementos básicos que constituem a geometria. Batizada como a ciência do espaço essa ciência favorece noções básicas que lhe darão suporte para explorar cada vez mais as figuras tanto como geometricamente como algebricamente.

Segundo Angeli (2007), ao iniciar o estudo da geometria espacial, uma grande ênfase é dada à visualização de situações geométricas e à sua representação no plano. Sem essas habilidades é praticamente impossível desenvolver qualquer trabalho em geometria. A geometria é considerada uma ferramenta que descreve o espaço em que vivemos. É usada em aplicações e é, segundo o autor, a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade.

A geometria espacial é a área da matemática que estuda as figuras tridimensionais, onde tem porção finita e são limitados por superfície planas e curvas, além das áreas, volumes, propriedades e relações. A geometria em primeiro momento é apresentada ao aluno a partir da geometria plana, enfatizando na grande maioria a figuras planas, como quadrado, círculo e o triângulo dando menos ênfase à tridimensionalidade.

A geometria também pode propiciar o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial. Fürkotter e Morelatti (2009, p. 29) apontam que "é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno".

Essa pesquisa tem como proposta resgatar os alunos do ensino médio através de uma pesquisa associada à construção das planificações, o objetivo será que os participadores tornem pesquisadores e logo questionadores das formas geométricas estudadas, na qual poderão alcançar uma melhor visualização e representação das formas geométricas buscando uma correlação com o seu dia a dia fazendo com que os mesmos tenham uma melhor aplicabilidade.

A teoria e a prática junto com a visualização tornam se um princípio fundamental para a formação do conhecimento. De acordo com Gutierrez (1992 *apud* BECKER 2009, p. 27) afirma que quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias.

Material didático manipulável

Lorenzato (2006, p. 18) define material didático como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem". Entram, nessa definição, materiais como o giz, calculadora, jogos, cartaz, caderno, caneta e etc. Em meio a essa variedade de materiais, o autor destaca, em especial, o material didático manipulável que, de acordo com ele, pode ter duas interpretações: "uma delas refere-se ao palpável, manipulável e a outra, mais ampla, inclui também imagens gráficas" (LORENZATO, 2006, p. 22-23). Ainda em relação ao material didático manipulável, o autor estabelece uma classificação para esses tipos de materiais:

1) O material manipulável estático: material que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação. Durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele algumas propriedades. Ao restringir o contato com o material didático apenas para o campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto.

2) O material manipulável dinâmico: material que permite a transformação por continuidade, ou seja, a estrutura física do material vai mudando à medida em que ele vai sofrendo transformações, por meio de operações impostas pelo sujeito que o manipula. A vantagem desse material em relação ao primeiro, na visão do autor, está no fato de que este facilita melhor a percepção de propriedades, bem como a realização de redescobertas que podem garantir uma aprendizagem mais significativa.

Segundo Lorenzato (2006), há ainda a diferença de potencialidades entre o material didático manipulável e sua representação gráfica. O autor explica que a representação gráfica não "retrata as reais dimensões e posições dos lados e faces dos objetos, uma vez que camufla o perpendicularismo e o paralelismo laterais" (LORENZATO, 2006, p. 27). Em relação a isso, Kaleff (2006) se posiciona em defesa do material didático manipulável, explicando que por mais sofisticadas que sejam as simulações produzidas na tela do computador, essas representações tridimensionais permanecem planas, não dispensando a utilização do material manipulável. Neste caso, uma experiência não invalida a outra, pois ambas podem se completar.

Assim, ainda segundo Lorenzato (2006), os materiais didáticos podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a redescoberta.

Em relação aos materiais didáticos, Passos (2006) revela que:

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (PASSOS, 2006, p. 81).

A autora defende, portanto, que o aluno não aprende Matemática apenas manipulando objetos, isto é, os conceitos matemáticos não residem somente no material, ou na simples ação sobre ele. É preciso, então, que haja uma atividade mental por parte do aluno mediado pelo professor, permeada de reflexões sobre a ação manipulativa, que deve permitir ao aluno o reconhecimento de relações que o levem a pensar, analisar e agir. (PASSOS, 2006). Em relação a isso, o professor poderá formular questões adequadas que permitam ao aluno passar do concreto ao abstrato por meio de construções racionais bem elaboradas.

Nesse contexto, para que haja uma experiência matemática que "toque" o aluno, é recomendável que este, de acordo com Lorenzato (2006), além da exploração e reflexão sobre o material didático também participe da construção do mesmo. Assim, o professor poderá garantir que o aluno possa tirar o maior proveito possível desse material manuseado.

Oficinas pedagógicas

O que viria ser uma oficina? E qual sua importância pedagógica? Para Viera e Volquind (2002, p. 11) a oficina se caracteriza como sendo "um sistema de ensino-aprendizagem que abre novas possibilidades quanto à troca de relações, funções, papéis entre educadores e educandos". Portanto, aderir às oficinas de ensino pode ser considerado um meio de articular e integrar saberes.

> As oficinas pedagógicas são situações de ensino e aprendizagem por natureza abertas e dinâmicas, o que se revela essencial no caso da escola pública – instituição que acolhe indivíduos oriundos dos meios populares, cuja cultura precisa ser valorizada para que se entabulem as necessárias articulações entre os saberes populares e os saberes científicos ensinados na escola (MOITA; ANDRADE, 2006, p. 11)

Para uma atividade prática possa contribuir de forma positiva para a aprendizagem do aluno, é fundamental que essa atividade esteja acompanhada de um momento de reflexão e discursão de ideias sobre a prática em si (POSSOBOM; OKADA; DINIZ, 2003). Embora as atividades práticas possuam um grande potencial pedagógico, muitos professores ainda não as utilizam por várias razões, entre elas, podemos citar a falta de materiais e recursos para a realização das mesmas ou até mesmo a falta de tempo do professor ao planejar a realização de tais atividades (BORGES, 2002). Cabe citar também, que a falta de preparo do professor pode caracterizar uma razão para a não utilização desse tipo de atividade em sua sala.

Segundo, Andrade e Massabni (2011), as aprendizagens proporcionadas pelas atividades práticas dependem do modo como estas são planejadas e conduzidas, pois para que o aluno possa construir conceitos, é necessário que essa atividade possua um caráter investigativo e questionador das ideias e conhecimentos prévios dos alunos. As oficinas pedagógicas são exemplos de atividades que proporcionam aprendizagens oriundas da interação entre teoria e prática. Podemos então, dizer que uma oficina, representa uma atividade prática onde se trabalha com resolução de problemas que levam em consideração os conhecimentos teóricos e práticos dos alunos (MARCONDES, 2008).

A interação entre o pensar e o agir requer um conjunto de fatores que irão impulsionar um indivíduo a executar conscientemente uma determinada tarefa, essa é a característica principal de uma oficina pedagógica, pois trata-se de uma forma de construção de conhecimento por meio de uma ação, sem é claro, desconsiderar sua natureza teórica (PAVIANI; FONTANA; 2009). Desse modo, pode-se afirmar que uma oficina pedagógica provê uma interação mais significativa entre os participantes e o objeto de estudo. Para Valle e Ariada (2012) as oficinas pedagógicas proporcionam a construção do conhecimento por meio da relação ação-reflexão-ação, fazendo o aluno vivenciar experiências mais concretas e significativas baseadas no sentir, pensar e agir. É necessário ressaltar também que, para Moita e Andrade (2006) as oficinas pedagógicas são capazes de promover a articulação entre diferentes níveis de ensino e diferentes níveis de saberes, sendo assim, essa atividade serve como meio de formação continuada de professores e como base para a construção criativa e coletiva do conhecimento de alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) descrevem as atividades práticas como um importante elemento para a compreensão ativa dos conceitos científicos, pois os participantes podem estabelecer uma relação mais significativa com assunto ou o objeto de estudo, tornando assim, a aprendizagem dos participantes mais significativa.

Segundo a visão de Rosalen, Rumenos e Massabni (2014): As atividades práticas são importantes quando ensinadas de forma a trabalhar a busca e resolução de problemas, pois assim os alunos passam de meros espectadores à protagonistas de seu ensino, podendo experimentar e deduzir resultados, criando maior capacidade de argumentação e indução, e finalmente formando verdadeiros cientistas.

Encaminhamentos metodológicos

Nesta sessão, abordaremos a metodologia usada na pesquisa, quais procedimentos e instrumentos utilizados para a investigação, além dos indicadores usados para avaliação e análise, observando a importância dos recursos visuais e estruturais para a dinamização do ensino dos poliedros para auxilia-los na resolução de problemas.

Neste trabalho, foi realizado uma pesquisa-ação, onde o pesquisador também é o professor da turma, objetivando na construção de planificações dos poliedros, com o constante envolvimento dos alunos da classe com a qual foi desenvolvida a oficina pedagógica, bem como minha participação como professor orientador e pesquisador. A pesquisa-ação, conforme Gil (2002) difere dos outros tipos de pesquisa pelo fato de haver grande flexibilidade, além de envolver também as ações do pesquisador, podendo isso ocorrer em qualquer momento do desenvolvimento dos trabalhos.

O propósito da utilização do material manipulável foi uma estratégica de suporte para as aulas dinamizadas de Matemática com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, cujo propósito é alcançar uma melhoria na qualidade do ensino da matemática durante o ensino dos poliedros.

A oficina de montagem das planificações tem como proposito analisar a importância da matemática no cotidiano das pessoas, desmitificando que a matemática é uma ciência para poucos. Analisamos quais elementos compõem essas figuras geométricas, aprofundando os conceitos básicos sobre espaço, forma e medidas, voltadas para o ensino da geometria espacial.

Os trabalhos juntamente com a oficina foram programados através de análises e socialização dos sólidos geométricos com a montagem das planificações, aplicando uma atividade na qual foi feito um comparativo entre antes da oficina e pós-oficina pra podermos perceber e nos orientar o quanto o aluno possui de conhecimento prévio e o quanto ele pode colocar em prática logo depois com a oficina em exercício.

O percurso a ser seguido com a turma em questão é a divisão da mesma em grupos, de forma que cada um deles possa discutir e comentar sobre a sua construção o seu foco de pesquisa, onde a partir de cada um analisaremos o seu modelo matemático no decorrer da oficina.

A partir do objeto de estudo estruturado o objetivo do trabalho é que a partir da construção os alunos começam a identificarem que assuntos estão por trás da mesma e como pode-se associá-los ao nosso cotidiano.

A pesquisa foi estruturada em três etapas que serão descritas a seguir:

1ª etapa: Construção das planificações.

Materiais: Lápis, caderno, caneta, papel A4, régua, tesoura, celular.

Objetivo: Analisar quais elementos compõem os poliedros.

Procedimentos: Os alunos foram organizados em equipes de quatros integrantes e orientados a utilizaram os seus aparelhos celulares para pesquisarem os poliedros e suas respectivas planificações. Após a pesquisa na internet os alunos deram início à construção das planificações que escolheram. Nessa atividade foram necessárias quatro aulas.

2ª etapa: Animação da segunda dimensão (planificações) para a terceira dimensão (sólidos).

Objetivo: Observar faces, arestas e vértices dos poliedros.

Materiais: Lápis, caneta, papel A4, régua, tesoura, papelão, cola e barbante.

Procedimentos: Com as planificações prontas foi sugerido que os alunos colassem um dos lados do poliedro, em seguida fizessem pequenos furos próximo dos vértices de cada lado da figura e passar o barbante por esses furos e tentassem fazer o caminho inverso, ou seja, sair da planificação e reconstruir o poliedro. Nessa segunda atividade foram realizadas em quatro aulas.

3ª etapa: Avaliação

Nessa última etapa do desenvolvimento ocorreu a avaliação do conhecimento prévio do aluno fazendo um comparativo entre a aplicação e a reaplicação no final da proposta. Foi aplicada uma atividade antes da oficina, em que todos os alunos resolveram baseando-se apenas nas explicações de sala de aula, ministrados em uma aula tradicional, e outra atividade depois da oficina. O objetivo desse momento é perceber e avaliar o que de significativo ficou logo após a oficina.

Resultados e discussões

É importante ressaltar que antes da realização da oficina pedagógica foram trabalhados os conteúdos de geometria espacial, como planos, retas, projeções, poliedros, faces, arestas, vértices, planificação, corpos redondos, cálculo de áreas e volumes.

Nessa proposta um dos intuitos foi verificar quais os elementos constituem os sólidos geométricos: vértices, faces e arestas. Fazendo com que antes da montagem os alunos observem bastante para que em seguida, o aluno verifique como será a figura planificada. Como mostra a figura a seguir:

Figura 1 – Alunos desenhando as planificações

Figura 2 – Alunos construindo as planificações

Fonte: Próprio autor do trabalho.

Durante a realização da oficina analisamos quais elementos compõem essas figuras geométricas, aprofundando os conceitos básicos sobre espaço, forma e medidas voltadas para o ensino da geometria espacial. Observou-se a discursão e descobertas nos grupos e compartilhadas ao restante da turma. Quando solicitado que os alunos pesquisassem na internet as planificações dos poliedros tiveram descobertas importantes, como podemos observar na fala do aluno "A".

Aluno "A": "*O cubo tem várias planificações*!"

Podemos perceber pela fala do aluno que até o 2º ano do ensino médio ele não tinha conhecimento de que os poliedros podem ter várias planificações, sendo que desde o 3º ano do ensino fundamental o conteúdo de planificações faz parte da grade curricular, segundo a BNCC: Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prisma retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.

Essa descoberta é de suma importância, pois uma coisa é o aluno ser informado pelo professor outra é o aluno poder descobrir sozinho ou com outros colegas fazendo pesquisas, essa descoberta faz com que os alunos se sintam confiantes, entusiasmados e motivados, pois se sentem donos da descoberta.

Assim, que fizeram a pesquisa, começaram a desenhar as planificações na folha de papel A4, em seguida sugerir que eles recortassem as planificações e medissem as arestas das figuras e depois calculassem as áreas laterais e área total. Com o material manipulável que construíram observou-se que tiveram mais facilidade em entender como se calcula as áreas, como podemos observar pela fala do aluno "B".

Aluno "B": "Assim, é mais fácil entender como calcular a área total!"

Quando o conteúdo de cálculo de áreas foi trabalhado utilizando somente a lousa e o livro didático, a turma sentiu muita dificuldade em entender o que era e como se calculava a área total dos poliedros, pois o desenho no quadro ou no livro não permite observar algumas características. A partir, da manipulação e confecção das planificações o desempenho melhorou e facilitou o entendimento como observamos na fala do aluno "B" anteriormente.

No processo de animação dos Poliedros, desde a planificação em duas dimensões para o sólido na terceira dimensão os alunos ficaram entusiasmados de que o Ensino-aprendizagem de Matemática pode ser prazeroso e poder aprender os conteúdos com materiais manipuláveis facilita o entendimento.

Nessa busca em fazer o processo inverso saindo da planificação para o sólido, tiveram que analisar, raciocinar e fazer uma troca de conhecimento. Podemos relatar a fala de um aluno que representa bem esse raciocínio:

Aluno "C": "Temos que analisar bem que face da figura vamos colar no papelão, senão não fecha o poliedro."

Através, da fala do aluno acima fica bem claro que para acontecer a mudança da segunda dimensão para a terceira dimensão os alunos tiveram que planejar e analisar onde seriam os furos para o barbante passar e qual face colar para que o poliedro fosse reconstruído corretamente. Como na figura a seguir:

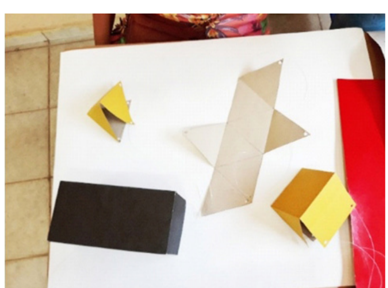
Figura 3 – Planificações construídas pelos alunos

Figura 4 – Planificações construídas pelos alunos

Fonte: Próprio autor do trabalho.

O resultado final da oficina que foi a animação dos poliedros foi apresentado pelos alunos na feira pedagógica da escola como uma proposta de ensino dos poliedros. Como podemos perceber na figura a seguir:

Figura 5 – Processo inverso da Planificação para o Sólido feita pelos alunos.



Fonte: Próprio autor do trabalho.

Dessa forma, identificamos que os sujeitos da pesquisa alunos do 2º ano do Ensino Médio, aprovaram e gostaram de trabalhar com materiais manipulativos, através da oficina pedagógica, uma vez que trouxe significados ao que estavam fazendo. No momento da construção todos tentavam se envolver da melhor forma possível, pois era momento de aprender com prazer. Diante das construções realizadas pelos discentes podemos perceber a euforia dos mesmos, querendo aprender a montar, aprender os conceitos e vimos um resultado prazeroso, onde os alunos não sentiram dificuldade em responder as questões que foram feitas ao final da oficina pedagógica.

Foi muito satisfatório, pois constatamos que muitas descobertas sobre os sólidos foram sanadas, minimizando e aproximando o aluno do conhecimento, na qual possa conduzir tanto o professor quanto os alunos à reflexão do aprendizado através dessa experimentação. Pois o propósito é contribuir para atenuar essas lacunas da formação do aluno, identificando os problemas de aprendizagem não consumados nas séries anteriores.

Considerações finais

Este trabalho relata o resultado de uma oficina pedagógica desenvolvida numa Escola Estadual de Ensino Médio em Mocajuba-Pa com uma turma de 2º ano do Ensino Médio, que envolveu o uso de material didático manipulável e oficinas pedagógicas no ensino de geometria espacial, particularmente sobre os Poliedros. Esse tipo de metodologia motiva a busca de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que a material manipulável pode ser uma estratégia de ensino eficiente, que visa à construção do conhecimento.

A pesquisa teve a pretensão de incentivar o conhecimento e o gosto pela geometria, fazendo com que os alunos se sentissem envolvidos pelo trabalho e perceberam durante seu desenvolvimento que a atividade com formas geométricas podem ser agradáveis, bem compreendida e situada.

A busca pelo material manipulável e oficinas é uma forma de unir a teoria e a prática, alcançando aulas que não sejam tradicionais e oportunizando aos alunos novas ferramentas que possam facilitar o processo ensino-aprendizagem.

Algumas dificuldades foram encontradas pelo percurso, como o fator tempo, turma numerosa, falta de materiais, entre outras. No entanto a grande maioria delas foi sanada, com uma melhor interação do grupo. As discussões permanentes proporcionaram novos caminhos para tentar diminuí-las durante o processo ensino-aprendizagem.

Pode-se relatar que as habilidades relevantes na pesquisa foram destacadas pelo envolvimento dos alunos com os materiais manipuláveis, como medir, recortar, montar, colar, calcular e analisar qual seria a melhor forma de confeccionar suas planificações.

Considera-se que a pesquisa pôde proporcionar experiências matemáticas significativas, uteis e estimulantes aos alunos, envolvendo a escolha de um tema, a investigação, a criação de hipótese e a construção dos poliedros e suas planificações o que completa a aula para um bom raciocínio e desenvolvimento do conteúdo.

A utilização do uso de Material Manipulável e as Oficinas como recurso em sala de aula se mostrou com forte potencial, uma vez que despertou a curiosidade, o gosto, a capacidade de investigar, construir, de pensar e agir, possibilitando que o aluno tenha diferentes experiências e construa sua aprendizagem. Assim entendemos que é necessário continuar o trabalho com Materiais Manipulativos e as oficinas nas salas de aula de Matemática, explorando ideias, opiniões e ponto de vista relacionado a cada aluno, bem como trabalhar com seu raciocínio Geométrico.

Constatamos que, como vivemos em um mundo globalizado e repleto de informações, devemos estar abertos a novos desafios, principalmente aqueles que aproximem cada vez mais da realidade. Desta forma, a aplicação da oficina proporcionou trocas diárias de informações e a cada dificuldade apresentada, um novo momento de aprendizagem. São necessários que os alunos estejam motivados durantes esses encontros para que haja uma boa integração, contemplando a construção de uma aprendizagem a fim de lembrar conceitos e soluções com mais facilidade, além de dar mais importância à disciplina de Matemática e seus conteúdos.

Referências

ANDRADE, Marcelo L. F. de; MASSABNI, Vânia G. O desenvolvimento de atividades práticas na escola: um desafio para os professores de ciências. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 17, n. 4, p. 835-854, 2011.

ANGELI, Angela Maria A.; NOGUEIRA, Clélia Maria I. A Resolução de Problemas como um caminho para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, 2007. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/945-4.pdf. Acesso em 16 ago. 2013.

BECKER, Marcelo. *Uma alternativa para o ensino de Geometria*: Visualização Geométrica e representações de sólidos no plano. 111 p. Dissertação. Porto Alegre, RS. 2009. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17161/000712216.pdf?sequence=1. Acesso em: 18 fev. 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnologias. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (*PCN*). Brasília: Ministério da Educação, 1998, p. 107.

BALDISSERA, Altair. *A Geometria trabalhada a partir da construção De figuras e sólidos geométricos*. Santa Terezinha de Itaipu – Pr. 2007.

DEODATO, André Augusto. *Probabilidade em uma Oficina de Matemática*: uma análise à luz da aprendizagem situada e da teoria da atividade. *São Paulo,* 2015.

DO VALLE, H. S.; ARRIADA, E. "Educar para transformar": a prática das oficinas. *Revista Didática Sistêmica*, v. 14, n. 1, p. 3-14, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M, A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim da SBEM,* São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FÜRKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. *A Geometria da Tartaruga: uma introdução à Linguagem* LOGO. *In*: SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA, 4, 2009, Presidente Prudente, *Anais*... Presidente Prudente, SP, 2009.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades deenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. *In*: LORENZATO, Sérgio. *Laborató-*

rio de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 113-134.

LORENZATO, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO JUNIOR, A. G. *Modelagem matemática no ensino-aprendizagem*: ação e resultados. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MARCONDES, Maria Eunice Ribeiro. Proposições metodológicas para o ensino de química: oficinas temáticas para a aprendizagem da ciência e o desenvolvimento da cidadania. *Extensão*, Uberlândia, v. 7, n. 1, p. 67-77, 2008.

MOITA, F. M. G. S. C.; ANDRADE, F. C. B. de. O saber de mão em mão: a oficina pedagógica como dispositivo para a formação docente e a construção do conhecimento na escola pública. *Reunião Anual da ANPED*, v. 29, p. 16, 2006.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PEREIRA, Daniele esteves. *Globos E Mapas Ao Alcance Das Mãos:* Ensino De Matemática Numa Perspectiva de Alfabetização Funcional Na EJA. Natal-RN, 2008.

POSSOBOM, Clívia Carolina Fiorilo; OKADA, Fátima Kazue; DINIZ, Renato Eugênio da Silva. *Atividades práticas de laboratório no ensino de biologia e de ciências*: relato de uma experiência. Núcleos de ensino. São Paulo: Unesp, Pró-Reitoria de Graduação, p. 113-123, 2003.

ROSALEN, S.; RUMENOS, N. N.; MASSABNI, V. G. Atividades práticas e recursos de informática como apoio ao ensino de biologia. *In*: JORNADA DAS LICENCIATURAS DA USP, v. 5, 2014.

SANTIAGO, Thiago Lopes N. *O Ensino Dos Sólidos Geométricos*: Um Estudo Utilizando A Modelagem Matemática. Juazeiro, BA, 2018.

SOUZA, Karina Martins de. *A construção de Sólidos Geométricos com materiais manipuláveis.* Patos-PB, 2017.

VIEIRA, Elaine; VOLQUIND, Lea. *Oficinas de ensino:* O quê? Por quê? Como? 4. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

Sistemas de equações lineares do primeiro grau:

uma compreensão praxeológica em livro escolar

Pedro de Jesus Wanzeler Pompeu

Denivaldo Pantoja da Silva

Resumo

O objetivo desse trabalho é construir uma compreensão da praxeologia de Sistemas Equações do 1º Grau em termos da funcionalidade dos componentes praxeológicos básicos: tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Consideramos essencial que as tarefas do livro se apresentem de forma articuladas e as técnicas justificadas em determinada instituição. Para tanto recorremos à Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard por disponibilizar noções para estudos praxeológicos como a noção de praxeologia ou organização praxeológica a partir da teoria da transposição didática. Os resultados mostraram que a praxeologia do livro estudado evidencia incompletude em relação aos elementos básicos da noção de praxeologia o que poderá ocasionar incompreensões sobre a epistemologia do objeto matemático estudado na escola, os Sistemas de Equações do 1º Grau.

Palavras-chave

Praxeologia. Sistemas de Equações. TAD. Ensino. Didática.

Introdução: apresentação do problema

Sabemos pela experiencia enquanto docente que o livro escolar exerce grande influência no planejamento e desenvolvimento da prática docente, não é o único, mas o suporte principal na condução e orientação das aulas. Desse modo, acreditamos que uma análise mais detalhada de sua composição geral em termos praxeológicos nos permitirá compreender possíveis razões, caso existam, do surgimento de dificuldades relacionadas à aprendizagem matemática evidenciada pelos estudantes.

Neste trabalho investigamos a Organização Matemática de um capítulo do livro escolar do 7º ano do ensino fundamental de autoria de Bianchini (2015) bastante utilizado nas instituições de ensino. Tomamos como parâmetros de analise elementos componentes de uma praxeologia ou Organização Praxeológica.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD, daqui em diante) vem sendo utilizada por pesquisadores em abordagens de suas investigações. No Brasil podemos destacar Menezes (2010), Guerra e Andrade (2013), Almouloud (2015), Barbosa e Lima (2014) e Silva (2017). Temos a intenção de realizar um estudo investigativo da praxeologia que o livro escolar disponibiliza, tentando compreender o sentido das tarefas propostas, encontrar parâmetros que possam ajudar a identificar os elementos básicos praxeológicos dos Sistemas de Equações presentes no livro.

A TAD nos permite entender, tanto o processo de transformação que um determinado saber passa para tornar-se objeto de ensino, a transposição didática, quanto identificar os elementos de uma organização didático-matemática. Diante isso, buscamos respostas à seguinte questão: Como construir uma compreensão da praxeologia dos Sistemas de Equações do 1º Grau presente no livro escolar? Nesse sentido, propomos como objetivo principal buscar construir uma compreensão da praxeologia de Sistemas Equações do 1º Grau em termos da funcionalidade dos componentes praxeológicos básicos tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Desse modo, para alcançarmos nosso objetivo partimos da hipótese de que existe uma praxeologia no livro escolar na qual é possível identificar os elementos praxeológicos essenciais.

Estruturamos este trabalho da seguinte forma: na primeira parte abordaremos tópicos sobre a transposição didática para tentar compreender as transformações pelo qual um saber passa desde a sua criação até se tornar objeto de ensino em particular no livro escolar selecionado. Na segunda etapa faremos uma apresentação da TAD, a qual situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais (CHEVALLARD, 1999).

Na terceira seção apresentaremos a praxeologia de sistemas lineares como referência, fazendo uma abordagem sobre a organização matemática de um livro técnico utilizado em estudos em nível de graduação, que trata de sistema de equações lineares, analisando a transposição dos sistemas. Abordaremos também sobre o Método de resolução de sistemas, denominado Eliminação de Gauss que é o suporte teórico do método da substituição aplicado a um sistema de equações lineares.

Em seguida, faremos o estudo praxeológico do livro escolar, mais especificamente do capitulo 6, partindo da organização do livro buscando identificar parâmetros de análise praxeológicos, descrevendo os elementos básicos, classificando as organizações e analisando como as tarefas propostas estão articuladas e se as técnicas estão justificadas.

Transposição didática: tópicos teóricos

A noção de transposição didática está atrelada à transformação que um saber passa desde sua origem de produção até seu ensino em sala de aula pelo professor. Essa transformação e adaptação de um conhecimento tornam-se evidentes nas práticas educacionais (PANTOJA, 2017). Em uma das etapas do percurso transpositivos o saber passa pelos autores de livros que destinam tais conteúdos observando uma série de condições tais como com a faixa etária dos estudantes. Mais especificamente,

> [...] um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O "trabalho" que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de *transposição didática.* (CHEVALLARD, 1991, p. 45, tradução dos autores).

Essa noção cunhada por Chevallard, leva em consideração a abordagem desse saber em relação à instituição em que este é apresentado. O processo de Transposição Didática se faz presente em uma seleção que ocorre por meio de grande influência no sistema educacional. O decorrer de uma transformação de saberes científicos em saberes a ensinar ocorre no espaço em que Chevallard (1991) intitula de noosfera (MENEZES, 2010). A noosfera é responsável por determinar o conjunto de influências pelas quais um saber passa na sua reformulação desde a descoberta até sua apresentação em saber a ser ensinado. Para Chevallard, (1991, p. 40, tradução dos autores), "O trabalho que a noosfera faz para elaborar o novo texto do conhecimento é, portanto, dedicado a uma estratégia de ataque das dificuldades de aprendizagem cuja aceitação entre professores e sua grande estabilidade deve ser aceita [...]". Nesse espaço estão presentes representantes do sistema de ensino, pais de alunos, especialistas e representantes de comissões ministeriais. (KLUTH; ALMOULOUD, 2020).

> A noosfera é o centro operacional do processo de transposição, que traduzirá em fatos a resposta ao desequilíbrio criado e comprovado (expresso por matemáticos, pais, próprios professores). Existe todo conflito entre sistema e ambiente e aí encontra seu lugar privilegiado de expressão (CHEVALLARD, 1991, p. 34, tradução dos autores).

Para compreender as transformações oriundas do saber produzido em saber ensinado, fazemos o uso da transposição didática o que corresponde à transposição de saberes divididos da seguinte forma: O saber sábio, o saber a ensinar e o saber ensinado.

De acordo com Chevallard (1991):

> O saber que produz a transposição didática será, então, um saber exilado de suas origens, e separado de sua produção histórica na esfera do saber científico, legitimando-se, então, o saber ensinado como algo que não é de tempo algum nem de lugar algum, e não se legitimando mediante o recurso à autoridade de um produtor, qualquer que seja (CHEVALLARD, 1991, p. 18, tradução dos autores).

O Saber sábio é fruto do trabalho do cientista que de acordo com Silva (2017, p. 48) “[...] consideramos o *Saber Sábio* como sendo aquele referente à Ciência Matemática, ao que é tido como referência para estudo e produzido nos meios acadêmicos por cientistas, no nosso caso, matemáticos”. Quando esse conhecimento é aceito pela comunidade científica ele deve ser comunicado e esse processo ocorre por meio de artigos, teses, livros, dentre outros.

O Saber a ensinar ou escolar é o saber repassado aos profissionais de ensino, em nosso estudo aos profissionais de matemática. Mas esse processo é o resultado de transposição didática pela qual o saber sábio passou.

> Porque a noosfera opta como prioridade para um requerente para uma manipulação do conhecimento. É isso, então, que procederá à seleção dos elementos do conhecimento que, designamos como “saber ensinar”, serão então submetidos ao trabalho de transposição; é também essa que assume a parte visível desse trabalho, o que podemos chamar de trabalho externo realizado dentro do próprio sistema de ensino, basta após a introdução oficial dos novos elementos no conhecimento ensinado (CHEVALLARD, 1991, p. 36, tradução dos autores).

O saber a ensinar passa por adequações e é apresentado nos currículos escolares, livros didáticos, guias escolares, entre outros (PANTOJA, 2017). Essas transformações surgem como um novo modelo de conhecimento ajustado de acordo com o grau de dificuldade do público alvo.

O Saber ensinado é o resultado de uma nova transposição didática.

> O saber que o professor desenvolve em sala de aula é o *Saber Ensinado*, o qual difere, em alguma medida, do que era para ser ensinado e até mesmo do que ele preparou já que, no exercício da prática docente, outras variáveis como as dificuldades dos alunos, o tempo de aprendizagem e interferências decorrentes do próprio contexto escolar, aparecem. (PANTOJA, 2017, p. 48).

O saber ensinado se materializa no conteúdo preparado pelo professor em seu plano de aula levando em consideração os fatores referentes ao ambiente escolar.

Evidencia-se aqui que o processo de transposição didática que transforma um saber sábio em saber a ensinar é visto como uma transposição externa ela é decidida em uma esfera superior, já a transposição pela qual passa um saber a ensinar para o saber ensinado é uma transposição interna, ou seja, ocorre dentro do ambiente escolar (CHEVALLARD 1991).

Teoria antropológica do didático: noções fundamentais

Como anunciamos a TAD será aqui tomada como recurso teórico para a análise de práticas institucionais dentre elas destacamos a instituição livro escolar que abriga o objeto de investigação deste estudo, a praxeologia de Sistemas de Equações Lineares. Essa teoria desperta o interesse de pesquisadores em diversos lugares do mundo inclusive no Brasil. Destacamos aqui obras como a de Silva (2017), Guerra e Andrade (2013), Pantoja (2017) e Freitas (2016) como referências na abordagem dessa teoria.

A TAD estuda o funcionamento de sistemas didáticos por meio de uma relação entre sujeito, instituição e saber. Estuda o homem frente ao saber matemático, situando a atividade matemática no âmbito de um conjunto de atividades humanas e instituições sociais (CHEVALLARD, 1999).

> A Didática da Matemática, na perspectiva da TAD, é posta como o estudo do homem (ou das sociedades) aprendendo, ensinando e pesquisando Matemática. Como uma atividade humana, pode ser modelada nos termos de praxeologias, chamadas de Praxeologias Matemáticas ou Organizações Matemáticas, que proporcionam um método de descrição e análise das práticas institucionais e o estudo das condições das mesmas. (GUERRA; ANDRADE, 2013, p. 111).

A antropologia didática considera que tudo é objeto, mencionando os diferentes tipos de objetos como: os indivíduos, as instituições, e as posições que os indivíduos tomam nas instituições, considera-se também que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece ou estabelece uma relação com ele (CHEVALLARD, 1991).

> O objeto O existe para o indivíduo X se X tem uma relação pessoal com ele, designada de R (X, O): relação de X com O. Igualmente, o objeto O existe para a instituição I – é um objeto institucional para I – se I tem uma relação institucional com O, RI (O). Notemos que esse objeto existe – é um objeto – se é um objeto ao menos para um indivíduo X ou uma instituição I. Dado isto, dizemos que X conhece O se X tem uma relação com O (o que significa dizer que O existe para X). Diremos que, para o sujeito Z de uma instituição I, X conhece O se Z supõe um juízo de conformidade de R(X, O) com RI (O). (CHEVALLARD, 1991, p.148, tradução dos autores).

Segundo Chevallard (1991) todo saber é saber de uma instituição. Para Bittar (2017 p. 366), "Cada instituição tem um conjunto de condições e restrições que devem ser respeitadas para que certo saber possa existir nesta instituição". Uma vez que esse saber passa por alguns processos de transformação e adaptação para fazer parte e viver em determinada instituição ele compõe o objeto principal da Transposição Didática como vimos anteriormente.

> Segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD), quando se fala de saber, está se falando de atividade humana *situada,* ou seja, que é realizada no interior de um espaço social concreto, chamado instituição, em um dado tempo que inclui um modo de pensar e de fazer essa atividade. (SILVA, 2017, p. 26).

Para Chevallard (1999) toda atividade matemática pode ser analisada por meio da noção de praxeologia. Todas as atividades humanas e matemáticas são compostas por certo número de tarefas, para o cumprimento dessas tarefas é necessário o desenvolvimento de técnicas. A palavra técnica nesse contexto é expressa como uma "maneira de fazer" que de acordo com o postulado III da TAD devem ser compreensíveis, legíveis e justificadas que são chamadas de tecnologias ou discurso tecnológico e, essa tecnologia também pode ser justificada, essa justificativa por sua vez recebe o nome de teoria.

A organização praxeológica para descrever qualquer atividade matemática ou não, é composta por: Tarefas T; técnicas que são usadas para resolver as tarefas τ; tecnologia que é o discurso racional e garante a validade da técnica e sua justificativa θ, e, a teoria que é a justificativa da tecnologia Θ, assim representamos por [T, τ, θ, Θ] denominada praxeologia. Por conseguinte, divide-se em dois blocos, práxis e logos. O bloco [T, τ] é o bloco técnico-prático, ou o bloco do saber fazer (práxis), já o bloco denotado por [θ, Θ] é denominado como bloco tecnológico-teórico, ou o bloco do saber (logos).

> Essa teoria estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações Matemáticas. Um motivo para utilização do termo *antropológica* é que a TAD situa a atividade Matemática e, em consequência, o estudo da Matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. (BARBOSA; LIMA, 2014, p. 118).

De acordo com Chevallard (1999) e Almouloud (2015) um conjunto de técnicas, tecnologias e teorias Θ organizadas para atender um tipo de tarefa T constitui uma Organização Praxeológica ou Praxeologia. Desse modo, uma praxeologia será considerada:

- **Pontual** quando se mantém um tipo de tarefa T, uma técnica τ, uma tecnologia θ e uma teoria Θ. [T, τ, θ, Θ], ou seja, se uma determinada técnica resolve um conjunto de tipo de tarefas.

- **Local** [Ti, τ j, θ, Θ] quando se considera uma determinada tecnologia, podendo ter várias tarefas e técnicas trabalhadas, mas por uma única tecnologia e teoria. Ou seja, se agrupa várias praxeologias pontuais em torno de uma mesma tecnologia.

- **Regional** [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ] quando configurada por uma única teoria. São mantidos vários tipos de tarefas T_{ij} sendo executadas por várias técnicas τ_{ij}, são justificadas e explicadas por várias maneiras, mantendo-se dessa forma várias tecnologias θ_j, mas sendo mantida uma única teoria que explique de maneira aprofundada essas tecnologias. Ou seja, quando agrupa várias organizações locais com a mesma teoria justificando as tecnologias associadas.

- **Global** [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{jk}, Θ_k] quando desenvolvida em torno de várias teorias. Ou seja, a praxeologia global é a agregação de várias organizações praxeológicas regionais atuantes às várias teorias Θ_k.

Segundo Freitas (2016), a TAD e, em particular, as noções de organização matemática e didática têm sido utilizadas com sucesso em pesquisas que analisam as práticas docentes e principalmente os livros escolares. Dessa maneira, buscamos apoio na TAD no decorrer de nossa pesquisa como justificativa de análise praxeológica.

Em resumo, a TAD pertence ao campo da Didática da Matemática que permite analisar situações de ensino e aprendizagem. Essa teoria apresenta os elementos da noção de Praxeologia presente no processo de ensino e aprendizagem. É uma ampliação da Teoria da Transposição Didática baseada na relação ao saber.

Praxeologia de referência: sistemas lineares

Descrevemos aqui a abordagem apresentada na obra de Lima (2014), um livro da Coleção de Matemática Universitária do IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) com o intuito de mostrar aspectos do processo de transposição didática. Em seguida será abordado o Método da Eliminação de Gauss emprestado de uma obra de Rincon e Fampa (2017), para mostrar o componente teórico do Sistema de Equações, ou seja, a teoria na qual o método da substituição se baseia.

Sistemas de Equações Lineares com duas Incógnitas

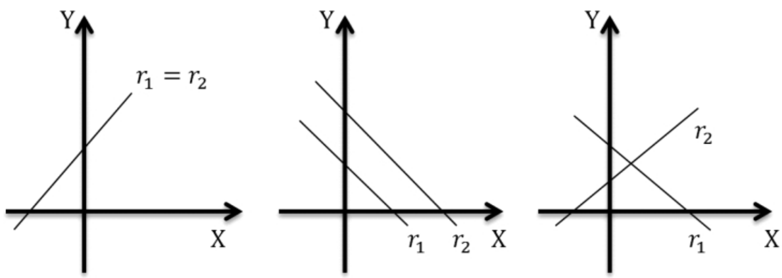
Assumimos que salvo menção explícita em contrário, fica convencionado que, ao escrevermos uma equação $ax + by = c$, estaremos admitindo tacitamente que $a^2 + b^2 \neq 0$, isto é, que os coeficientes a e b não se anulam simultaneamente.

Uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

é um par (x,y) pertencente ao R^2 cujas coordenadas x,y satisfazem ambas equações. Desse modo, o sistema (1) se diz indeterminado, impossível ou determinado quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente. Como sabemos, cada equação em (1) tem como soluções as coordenadas (x,y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas r_1 e r_2, representadas pelas duas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente.

Figura 1 – Sistemas com duas incógnitas: indeterminado, impossível e determinado.



Fonte: Adaptado de Lima (2014)

Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema , devemos examinar os quadros dos coeficientes

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Eles são exemplos de matrizes: m é uma matriz quadrada, com duas linhas e duas colunas, ou seja, uma matriz 2×2. Suas linhas são os vetores $l_1= (a_1, b_1)$ e $l_2= (a_2, b_2)$, e suas colunas são os vetores $v = (a_1, a_2)$, $w = (b_1, b_2)$, todos em R^2. Já M tem duas linhas e três colunas; é uma matriz 2×3. Suas linhas são os vetores $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$, em R^3, enquanto suas colunas são os vetores $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$ e $w = (c_1, c_2)$, pertencentes a R^2. Diz-se que m é a matriz e M é a matriz aumentada do sistema (1).

Duas retas que possuem mais de um ponto em comum devem coincidir. Logo, o sistema é indeterminado se, e somente se, suas equações definem a mesma reta.

Isto ocorre se, e somente se, existe um número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 = kc_1$ isto é, os vetores-linha $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$ da matriz M são colineares (múltiplos um do outro). Uma forma de exprimir esta condição sem referência ao número k consiste em dizer que

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0.$$

O sistema (1) é impossível quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são paralelas. Para que isto aconteça, é necessário e suficiente que exista $k \neq 0$ com $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ e $c_2 \neq kc_1$. Equivalentemente, o sistema (1) é impossível se, e somente se $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$, mas pelo menos um dos números $a_1 c_2 - c_1 a_2$, $b_1 c_2\text{-}c_1 b_2$ é diferente de zero.

O número $a_1 b_2 - b_1 a_2$ chama-se o determinante da matriz

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, o sistema (1) é determinado quando não é indeterminado nem impossível. Isto ocorre quando as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$ são concorrentes, ou seja, quando o determinante $a_1b_2 - a_2b_1$ é diferente de zero. Dito de outro modo: quando os vetores-linha $l_1 = (a_1, b_1)$ e linha $l_2 = (a_1, b_1)$ da matriz m não são múltiplos um do outro.

Por outro lado, diz-se que um vetor w é combinação linear dos vetores u e v quando existem números x, y tais que $w = xu + yv$.

O sistema (1), analisado acima sob o ponto de vista de suas linhas, pode também ser olhado em termos das colunas $u = (a_1, a_2)$, $v = (b_1, b_2)$, $w = (c_1, c_2)$, de sua matriz aumentada. Sob esse olhar, afirmar que (x,y) é uma solução do sistema equivale dizer que $w = xu + yv$. Portanto, o sistema possui solução se, e somente se, w é combinação linear dos vetores u e v.

Resulta, então, da discussão acima que se esses vetores $u = (a_1, a_2)$ e $v = (b_1, b_2)$ são tais que a $a_1 b_2 - a_2b_1 \neq 0$ então qualquer vetor $w = (c_1, c_2)$ em R^2 se exprime (de modo único) como combinação linear deles. Neste caso (isto é, quando u e v não são múltiplos um do outro), afirma-se que os vetores u e v são linearmente independentes.

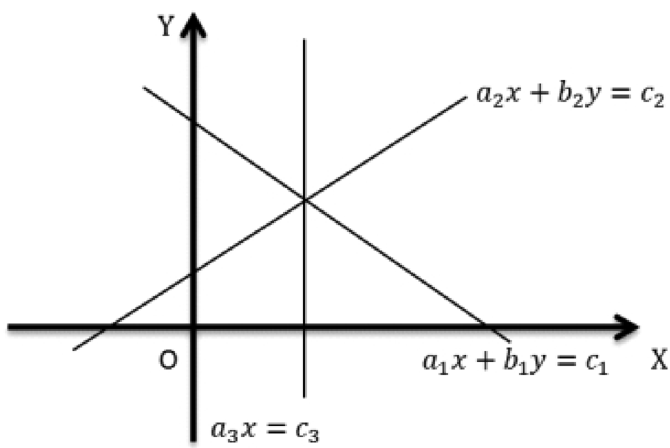
Dois sistemas dizem-se equivalentes quando admitem as mesmas soluções. Quando se substitui uma das equações do sistema pela soma desta equação com um múltiplo da outra, obtém-se um sistema equivalente. De outra forma, para todo $k \in R$, os dois sistemas abaixo possuem as mesmas soluções:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y = c_2 + kc_1 \end{cases}$$

Para resolver o sistema pelo método da eliminação, escolhe-se o número k de modo que um dos coeficientes $a_2 + ka_1$ ou $b_2 + kb_1$ seja zero. Isto dá imediatamente o valor de uma das incógnitas, o qual é substituído na primeira equação para encontrar o outro valor.

Do ponto de vista geométrico, quando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ as retas $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2\,x + b_2y = c_2$ se cortam num certo ponto (x_0, y_0). Para qualquer número k, pondo $a_3 = a_1 + ka_2$, $b_3 = b_1 + kb_2$ e $c_3 = c_1 + kc_2$, a reta $a_3x + b_3y = c_3$ ainda passa pelo ponto (x_0, y_0). Escolher k de modo a anular um dos coeficientes a_3 ou b_3 equivale obter a reta $a_3x + b_3y = c_3$ horizontal ou vertical, o que permite determinar imediatamente uma das coordenadas x_0 ou y_0.

Figura 2 – O método da eliminação, visto geometricamente



Fonte: Adaptado de Lima (2014)

O Método da Eliminação de Gauss

Considerando a matriz aumentada [A|b], onde A é uma matriz triangular superior de ordem 3 dada por:

$$[\mathrm{A}|\mathrm{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

Que representa o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Se $a_{ii} \neq 0$, então o sistema linear pode ser resolvido por retro substituição.

$$x_3 = b_3/a_{33}$$
$$x_2 = (b_2 - (a_{23}x_3))/a_{22}$$
$$x_1 = (b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3))/a_{11}$$

De um modo geral, se a matriz quadrada é de ordem então o algoritmo para a determinação da solução é dado por:

Seja $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Então $x_n = b_n / a_{nn}$.

Para $j = n - 1, n - 2, \ldots, 2, 1$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k}{a_{jj}}$$

Seja Ax = b um sistema linear. Aplicar o método da eliminação de Gauss para resolução do sistema consiste em:

1) Obter a matriz aumentada [A|b] do sistema;
2) Transformar a matriz aumentada [A|b] em uma matriz aumentada [Ā|b̄] onde $\bar{A}$ é uma matriz diagonal superior;
3) Resolver o sistema linear [Ā|b̄] da etapa 2 por retro substituições.

Etapa 1: Considere o sistema linear de ordem 3 dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$[\mathrm{A}|\mathrm{b}]^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

Etapa 2:

1ª fase: Zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal principal. Seja $a_{11} \neq 0$, definimos os seguintes multiplicadores:

$m_{21} = a_{21}/a_{11}$ e $m_{31} = a_{31}/a_{11}$ e façamos a seguinte operação:

$$\begin{cases} L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1 \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1 \end{cases}$$

Após as operações realizadas, obtemos:

$$[\mathrm{A}|\mathrm{b}]^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

2ª fase: Zerar todos os elementos da 2ª coluna abaixo da diagonal principal. Agora o pivô é o elemento $a_{22}^{(01)}$ e linha pivô é a linha 2 de $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]^1$. Suponha $a_{22}^{(01)} \neq 0$ definimos o multiplicador $m_{32} = a_{32}^{(01)} / a_{22}^{(01)}$ e façamos a seguinte operação: $L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - m_{32} \,.\, L_2^{(1)}$

Após as operações realizadas, obtemos:

$$[\mathrm{A}|\mathrm{b}]^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

Note que $[A|b]^{(2)}$ é uma matriz aumentada cuja matriz é uma matriz triangular superior.

Etapa 3: Resolução do sistema $[A|b]^{(2)}$ que na forma triangular superior, ou seja:

$$x_3 = b_3^{(2)}/a_{33}^{(2)},\ a_{33}^{(2)} \neq 0$$
$$x_2 = (b_2^{(2)} - \left(a_{23}^{(2)}x_3\right))/a_{23}^{(2)}$$
$$x_1 = (b_1^{(2)} - \left(a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3\right))/a_{11}^{(2)}$$

Assim, a solução $\{x_1, x_2, x_3\}$ de $[A|b]^{(2)}$ é a mesma solução de $[A|b]$.

Observação: Note que sendo a matriz triangular superior então

$$\det(A^{(2)}) = a_{11}^{(2)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(2)} = \det(A).$$

Praxeologia escolar: sistemas lineares no livro didático

Será abordado de forma descritiva alguns conteúdos preliminares importantes do capítulo 6 do livro de Bianchini (2015) para se introduzir o Método da Substituição de Sistema de Equações do Primeiro Grau e os elementos praxeológicos.

Bianchini (2015) inicia o capítulo sobre Sistema de Equações abordando inicialmente a ideia de equações com duas incógnitas. O capítulo apresenta uma manchete de jornal considerando uma partida de futebol do Campeonato Cearense no estádio Presidente Vargas, em Fortaleza no ano de 2015, como mostra a Figura 3:

Segundo o autor, com essas informações não é possível saber quantos gols cada equipe marcou. Se for considerado x a quantidade de gols marcados pelo Ceará e y os gols marcados pelo Maranguape, pode-se escrever a equação:

$$x + y = 7$$

Figura 3 – Manchete de jornal

Fonte: Bianchinni (2015)

Uma equação do primeiro grau com duas incógnitas, nesse caso x e y.

Em seguida, é ilustrado um quadro (Figura 4) com os possíveis resultados do jogo de acordo com a manchete.

Figura 4 – Possíveis resultados do jogo

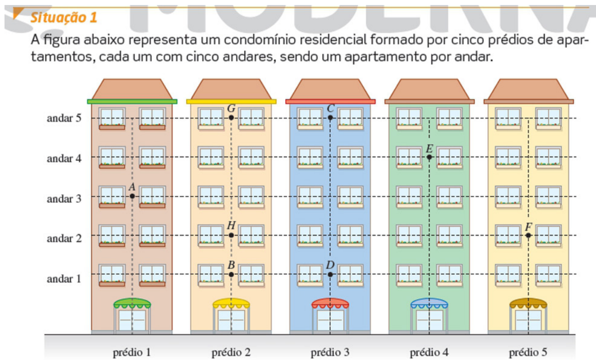
Gols marcados pelo Ceará (x)	Gols marcados pelo Maranguape (y)
7	0
6	1
5	2
4	3
3	4
2	5
1	6
0	7

Fonte: Bianchini (2015)

Esses resultados consequentemente são soluções da equação e são chamados de pares ordenados.

O autor também aborda o conceito de par ordenado, inicialmente considerando um condomínio residencial, contendo neste, cinco prédios e cada prédio com cinco andares como uma situação contextualizada para se explorar tal conceito. A localização de cada apartamento desse condomínio é indicada pelo par ordenado levando em consideração prédio e andar do conjunto como vemos na Figura 5 a seguir:

Figura 5 – Condomínio residencial



Fonte: Bianchini (2015)

Já a segunda situação de pares ordenados começa com o título "Cruzando palavras", em que é apresentado um quadro e o quadro é composto por palavras na vertical e na horizontal. Esse quadro é enumerado tanto na vertical quanto na horizontal e em seguida é feito algumas associações para encontrar pares ordenados como vemos na Figura 6:

Figura 6- Cruzando palavras

Fonte: Bianchini (2015)

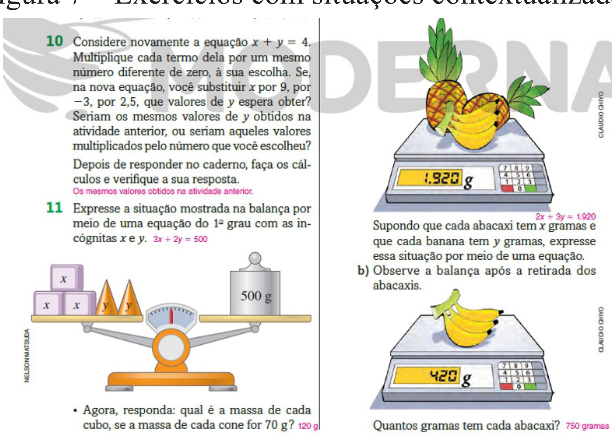
Após mostrada a situação o autor destaca: "Os pares de números associados a situações em que a ordem dos elementos deve ser respeitada são chamados de pares ordenados" (BIANCHINI, 2015, p. 147). Para finalizar, o autor faz uma abordagem da representação geométrica de pares ordenados, definindo a reta horizontal como eixo x e a reta vertical como eixo y, o par ordenado (0, 0) com nome de origem, a associação dos pontos dos pares ordenados chamados de coordenada dos pontos e a representação que recebe o nome de sistema de coordenadas.

A próxima seção, trata-se de Equações do 1º grau com duas incógnitas, retomando a equação do início do capítulo e considerando que se trata de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

"Uma equação pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é chamada de equação do 1º grau com duas incógnitas" (BIANCHINI, 2015, p. 149).

O autor toma como exemplo a equação $5x + 2y = 7$, em que x e y são números reais. Em seguida ele propõe um modo de encontrar uma das soluções dessa equação. Para isso, será escolhido um valor qualquer para x e, em seguida, esse valor será substituído na equação para determinar o valor de y. E por fim o par (x, y) será uma das soluções da equação. Nesse caso quando atribuído o valor de –2 para x, é encontrado 17/2 para y formando o par ordenado (–2, 17/2) como uma das soluções para a equação dada. Ainda nesta seção são propostos exercícios do referente conteúdo e alguns deles com situações contextualizadas como mostra a figura 7.

Figura 7 – Exercícios com situações contextualizadas


10 Considere novamente a equação $x + y = 4$. Multiplique cada termo dela por um mesmo número diferente de zero, à sua escolha. Se, na nova equação, você substituir x por 9, por −3, por 2,5, que valores de y espera obter? Seriam os mesmos valores de y obtidos na atividade anterior, ou seriam aqueles valores multiplicados pelo número que você escolheu?

Depois de responder no caderno, faça os cálculos e verifique a sua resposta.
Os mesmos valores obtidos na atividade anterior.

11 Expresse a situação mostrada na balança por meio de uma equação do 1º grau com as incógnitas x e y. $3x + 2y = 500$

- Agora, responda: qual é a massa de cada cubo, se a massa de cada cone for 70 g? 120 g

$2x + 3y = 1.920$
Supondo que cada abacaxi tem x gramas e que cada banana tem y gramas, expresse essa situação por meio de uma equação.

b) Observe a balança após a retirada dos abacaxis.

Quantos gramas tem cada abacaxi? 750 gramas

Fonte: Bianchini (2015)

A seção 3 trata de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas que é a seção de análise desse trabalho. Nesse item é retomada a manchete do início do capítulo e uma segunda manchete, de outro jornal, tratando da mesma notícia da seguinte forma:

Figura 8 – Segunda manchete de jornal

Fonte: Bianchini (2015)

É evidente que se levado em consideração apenas a segunda manchete não é possível determinar exatamente a quantidade de gols de cada equipe, assim como não foi possível com informações somente da primeira. Porém, se for juntado às duas informações será possível resolver o problema.

Associando as informações das duas manchetes é possível obter duas equações com duas incógnitas, $x + y = 7$ e $x = y + 1$, em que x e y são números naturais. Em seguida, são determinados vários pares ordenados com possíveis resultados e um comum às duas situações que é o par (4, 3), sendo o único em que a soma de gols é igual a 7 e que representa a vitória do Ceará por um gol de diferença, sendo 4 a 3. Este é um exemplo de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, que pode ser representado por:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Nesse caso, o par ordenado (4, 3) é a solução do sistema.

Finalmente, o autor inicia a seção tratando das soluções de sistemas pelo processo algébrico chamado de Método da Substituição. "O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir na outra equação a expressão encontrada" (BIANCHINI, 2015, p. 154), em seguida é resolvido pelo autor duas situações problemas, e logo após apresentado os exercícios propostos com questões contextualizadas.

A seguir, passaremos a analisar e descrever os elementos praxeológicos presentes no livro escolar de Bianchini (2015), do 7º ano sobre sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Parâmetros e Análise Praxeológica

Utilizando as noções da TAD (CHEVALLARD,1999), como suporte teórico para identificar elementos de uma Organização Matemática e Organização Didática, como os níveis do saber fazer (tarefa e técnica) e do saber (tecnológico e teórico), os quais permitem analisar uma organização didática, tanto no que diz respeito a sua construção quanto da sua efetiva aplicação em sala de aula. A partir da leitura do tema abordado no capítulo, sobre Sistemas de Equações, presente no livro escolar de matemática 7º ano de Bianchini (2015), tentaremos analisar as tarefas e as técnicas apresentadas.

Aspectos Analíticos da Praxeologia Escolar

Segundo a TAD, para a resolução efetiva de uma tarefa a técnica utilizada deve ser compreensível, legível e justificada. Além disso, toda técnica necessita de uma justificativa descritiva, denominada tecnologia, onde existe uma teoria que justifica tal tecnologia, sendo uma condição mínima para permitir seu controle e garantir a eficácia das tarefas feitas. Desse modo, para tentar descrever os elementos de uma praxeologia recorremos à duas tarefas de sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas resolvidas pelo autor do livro.

Tarefa 1: Em uma competição de esportes aquáticos, nas modalidades de natação e saltos ornamentais, participaram 32 equipes e 344 atletas. Cada equipe de natação inscreveu 12 atletas, e cada equipe de saltos ornamentais, 10 atletas. Quantas equipes de natação participaram da competição?

Indicando por x a quantidade de equipes de natação e por y a quantidade de equipes de saltos ornamentais, podemos montar o seguinte sistema de equação do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da substituição, podemos escolher, por exemplo, a equação e isolar a incógnita . Assim temos:

$$x + y = 32$$
$$x + y - y = 32 - y$$
$$x = 32 - y$$

Agora, substituímos x por $(32 - y)$ na equação $12x + 10y = 344$, temos:

$$12x + 10y = 344$$
$$12 \cdot (32 - y) + 10y = 344$$

Ao resolver essa equação, encontramos o valor de :

$$384 - 12y + 10y = 344$$
$$-2y = -40$$
$$2y = 40$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{40}{2}$$
$$y = 20$$

Substituindo y por 20 na equação $x + y = 32$, encontramos o valor de x:

$$x + y = 32$$
$$x + 20 = 32$$
$$x = 32 - 20$$
$$x = 12$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (12, 20).

Portanto, 12 equipes de natação participaram da competição.

Identificamos nessa tarefa que o autor fez uso da técnica que contêm quatro passos descritos a seguir para resolver o sistema:

1) Isolar o valor de *x* em na primeira equação do sistema.
2) Substituir o valor de *x* obtido no item anterior na equação que ainda não foi utilizada para obter uma equação com uma incógnita.
3) Resolver a equação com uma incógnita encontrada.
4) Substituir o valor encontrado de *x* na primeira equação do sistema e resolver, determinando o valor da outra incógnita, nesse caso o valor de *y*.

De acordo com Chevallard (1999), toda técnica necessita de um discurso racional que permite justificar seu desenvolvimento, esse discurso recebe o nome de tecnologia da técnica. Neste caso, a técnica pode ser justificada do seguinte modo:

TECNOLOGIA:

Trata-se de equações do primeiro grau com duas incógnitas, no processo é utilizado o princípio aditivo de equivalência de equações, onde é adicionado ou subtraído um mesmo número em ambos os membros da igualdade e obtém-se outra sentença que mantem ainda a igualdade, a adição de simétricos em que foi fundamentado o princípio de equivalência.

Após essa etapa foi feito uso da propriedade distributiva de equações algébricas. Em seguida é utilizado o princípio multiplicativo de equivalência. Nesse princípio é multiplicado ou dividido por um mesmo número (diferente de zero) os dois membros de uma igualdade e obtém-se uma nova sentença e, essa sentença continua sendo uma igualdade e por fim é utilizado o princípio aditivo de equivalência de equações.

A tecnologia por sua vez precisa ser sustentada e justificada por uma teoria.

TEORIA:

A teoria referente a Tarefa 1 decorre do campo da Álgebra Linear que trata Métodos de resolução de Sistemas Algébricos, em destaque o método Eliminação de Gauss que justifica a validade da tecnologia empregada.

Tarefa 2:

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ pelo método da substituição.

Isolando a incógnita na equação $2x + y = 12$, temos:

$$y = 12 - 2x$$

Substituindo y por $(12 - 2x)$ na equação $x + 3y = 11$, encontramos o valor de x:

$$\begin{gathered} x + 3y = 11 \\ x + 3 \cdot (12 - 2x) = 11 \\ x + 36 - 6x = 11 \\ x + 6x = 11 - 36 \\ -5x = -25 \\ 5x = 25 \\ \frac{5x}{5} = \frac{25}{5} \\ x = 5 \end{gathered}$$

Substituindo x por 5 em $y = 12 - 2x$, encontramos o valor de y:

$$\begin{gathered} y = 12 - 2x \\ y = 12 - 2 \cdot 5 \\ y = 12 - 10 \\ y = 2 \end{gathered}$$

Logo, o par (5, 2) é solução do sistema.

Percebemos também que para o desenvolvimento da tarefa 2 o autor do livro faz uso da técnica seguinte:

TÉCNICAS:

1) Isolar o valor de *y* em na primeira equação do sistema.
2) Substituir o valor de *y* obtido no item anterior na equação que ainda não foi utilizada e obter uma equação com uma incógnita.
3) Resolver a equação com uma incógnita encontrada.
4) Substituir o valor encontrado de *y* na primeira equação do sistema e resolver, determinando o valor da incógnita *x*.

TECNOLOGIA:

Essa técnica se justifica pelas tecnologias presentes, tratam-se de equações do primeiro grau com duas incógnitas nesse caso é utilizado o princípio aditivo de equivalência de equações. Nessa equivalência é adicionado ou subtraído um mesmo número nos dois membros da igualdade e obtém-se outra sentença que ainda é uma igualdade, a adição de simétricos ($-2x$) em ambos os membros da equação. Em seguida foi feito uso da propriedade distributiva de equações algébricas. Logo após é utilizado o princípio multiplicativo de equivalência. Nesse caso, quando multiplicado ou dividido por um mesmo número (diferente de zero) os dois membros de uma igualdade obtêm-se uma nova sentença que continua sendo uma igualdade e por fim é utilizado o princípio aditivo de equivalência de equações.

Discurso Tecnológico referente às tarefas 1 e 2.

Em um sistema linear, podemos resolver uma das equações isolando uma incógnita e substituir em outra equação, dessa forma, o sistema se mantém equivalente. A validade se fundamenta nos Princípios de equivalência (Aditiva e Multiplicativa) o que garante que a solução da tarefa não altere o conjunto solução.

TEORIA:

A explicação das tecnologias decorre do domínio da Álgebra Linear que trata de métodos algébricos, especificamente o Método Eliminação de Gauss.

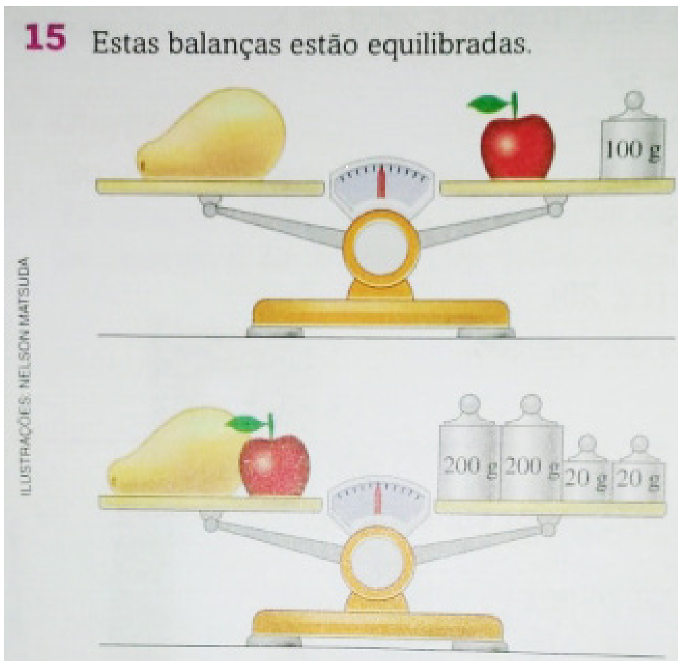
Tarefa 3 Proposta:

Na atividade proposta são solicitadas 3 tarefas, usaremos os itens a e b para resolução.

a) Determinar um sistema de equações com duas incógnitas de acordo com a imagem dada.

b) Resolver o sistema gerado a partir do item a.

Figura 9 – Atividade proposta



Fonte: Bianchini (2015)

De acordo com o II Postulado Fundamental da TAD "o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica" e a técnica sendo usada como uma "maneira de fazer". Daí, podemos observar as seguintes tarefas e tecnologias presentes na atividade na figura 9.

O autor solicita chamar de x a massa do mamão e de y a massa da maçã para determinar o sistema de equações correspondente à situação dada de acordo com os dados explícitos na questão, ou seja,

$$\begin{cases} x = y + 100 \\ x + y = 440 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

Como a incógnita x já está isolada na primeira equação, vamos substituir esse valor por $(y + 100)$ na equação $x + y = 440$.

$$x + y = 440$$
$$y + 100 + y = 440$$
$$2y + 100 = 440$$
$$2y + 100 - 100 = 440 - 100$$
$$2y = 340$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{340}{2}$$
$$y = 170$$

Substituindo y por 170 na equação $x = y + 100$, encontramos o valor de x:

$$x = y + 100$$
$$x = 170 + 100$$
$$x = 270$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (270, 170).

TÉCNICA: A técnica utilizada para a resolução das tarefas solicitadas em cada item:

a) 1ª: Associar as massas de objetos a um sistema de equações lineares.

b) 1ª: Substituir a equação I que se apresenta isolada na incógnita x na equação II.

2ª: Resolver a equação com uma incógnita utilizando adição e multiplicação de números reais para encontrar o valor de y.

3ª: Substituir o valor de y na primeira equação do sistema e resolver para obter o valor da incógnita x.

TECNOLOGIA:

a) 1ª: Transcrição da situação concreta em linguagem matemática, associando as massas dos objetos a um sistema de equações para assim chegarmos ao modelo genérico do sistema.

b) 1ª: Método da substituição para a solução de sistema de equações lineares.

2ª: Organizar e somar os termos semelhantes para simplificar a equação, em seguida utilizar a adição do número oposto (– 100) utilizando o princípio aditivo de equivalência. Em seguida multiplica-se por 1/2 em ambos os membros para encontrar o valor da variável *y*, utilizando o principio multiplicativo de equivalência. Para encontrar o valor de *x* usa-se uma das equações (aqui se utilizou a equação I) e substitui-se o valor de *y*. Em seguida organizar e escrever os pares ordenados (*x, y*). (operações inversas de números reais).

TEORIA:

A explicação dessa tecnologia assim como nas tarefas 1 e 2 resolvidas pelo autor também decorre do Método da Eliminação de Gauss tratado no domínio da Álgebra Linear.

Ao analisar as classificações das organizações apresentadas anteriormente, observamos que são utilizados a um conjunto de tarefas, técnicas, tecnologias e uma teoria, desse modo, poderíamos caracterizá-la uma *Praxeologia Regional*.

Em resumo, entendemos que de acordo com Chevallard (1999) toda prática institucional pode ser analisada num sistema de tarefas que se constituem dentro de uma determinada Praxeologia que permitem modelar o conhecimento. Como segue o esquema:

$$[T, \tau, \theta, \Theta]$$

Onde se define tarefa T, técnica τ, uma tecnologia θ e uma teoria Θ. No livro escolar dado do 7º ano de Bianchini (2015), capítulo 6, na página 156 (Exercícios Propostos) o autor apresenta diversas tarefas, algumas modeladas, organizadas de forma sequencial oito tarefas onde retoma a alguns conceitos do início do capítulo para a resolução de tarefas dadas, as quais estão organizadas de forma articulada seguindo o padrão de dificuldade de acordo com a faixa etária, conhecimentos prévios em obediência ao currículo oficial.

No que diz respeito à organização didática e técnicas, observamos que o autor consegue manter uma sequência padronizada ao nível de dificuldade na utilização das técnicas usadas e o conteúdo está organizado dentro dos parâmetros esperados para a série, isto é, ele não se distancia do objetivo inicial que é tratar de sistemas de equações, já nos elementos praxeológicos básicos o autor prioriza o bloco do saber-fazer referente a esse conteúdo, muitas vezes sem explicitar suas justificativas e, dessa forma, se distanciando do bloco tecnológico (tecnologia, teoria), o que pode dificultar a compreensão efetiva do objeto matemático.

Considerações finais

Este trabalho nos permitiu observar em diferentes pesquisas, entre elas a de Bittar (2017) e Almouloud (2015), que o livro escolar ocupa um lugar de destaque no cenário educacional brasileiro, em especial na educação básica, por vezes o único material de apoio na condução das atividades em sala de aula. A análise de livros escolares tem sido objeto de estudo em diversos lugares do mundo e também no Brasil.

A Teoria Antropológica do Didático tem orientado cada vez mais pesquisas e análises de materiais escolares e diversos conteúdos desde o nível básico ao acadêmico pela eficácia dos elementos praxeológicos disponibilizados para diagnósticos. As noções que a TAD disponibiliza permitiram analisar a praxeologia do livro escolar de Bianchini (2015), 7º ano em específico o capítulo 6, que trata sobre Sistemas de Equações do 1º Grau. Foi possível identificar os elementos praxeológicos do bloco tarefa-técnica e propor, de certo modo, um discurso racional que pode pertencer a dimensão do saber Álgebra Linear.

Foi possível identificar que na resolução das atividades diversas tarefas, desenvolvidas por suas técnicas, esta por sua vez apoiada em tecnologias e por fim justificadas por uma teoria, em especial o Método da Eliminação de Gauss, transparente na praxeologia escolar do livro analisado.

A praxeologia apresentada no livro aborda os sistemas lineares relacionados com situações concretas evidenciando suas aplicações o que proporciona um estudo de forma contextualizada. No entanto, percebemos incompletude em relação aos elementos praxeológicos básicos de uma praxeologia completa, no que tange ao componente Tecnológico-Teórico que é o discurso lógico e racional do bloco Técnico-Prático.

Ainda destacamos que a praxeologia escolar – de Bianchini (2015) – apresenta um tratamento geral transposto para o ensino básico, que nas palavras de Chevallard (1991), trata-se de um saber exilado de suas origens, e destaca também o papel de uma "esfera pensante" chamada de noosfera importante na trajetória do saber. Já em Lima (2014) é feito uma transposição que leva em conta um tratamento mais aprofundado e formalizado, ou seja, um estudo voltado para o nível acadêmico.

Outro aspecto importante que destacamos diz respeito ao método da eliminação de Gauss como o componente teórico do método da substituição de Sistemas Lineares, sendo um método que utiliza operações entre linhas e colunas sem alterar o conjunto solução. Diante disso, foi possível atender as quatro questões que foram motivadoras deste trabalho, sendo elas: identificar parâmetros de análise de praxeologias, identificar e descrever os elementos básicos de uma praxeologia, classificar as organizações e analisar se as tarefas propostas estavam articuladas e as técnicas justificadas no estudo de Sistema de Equações.

Com relação a nossa questão inicial – Como construir uma compreensão da praxeologia dos Sistemas de Equações do 1º Grau presente no livro escolar? – certamente uma resposta mais precisa demanda aprofundamentos no sentido de ampliar a analise tomando por base todas as praxeologias de Sistemas de Equações presentes na educação básica, mas como um estudo inicial, permitiu compreender mesmo que parcialmente, que a praxeologia do livro escolar é uma compreensão reduzida do saber Sistemas de Equações Lineares, uma transposição didática, além disso se mostrou como uma praxeologia incompleta, ou seja, restrita ao bloco do saber-fazer ou prático-técnico.

Portanto, esperamos ter disponibilizado um material de apoio de certo modo com referências teóricas a docentes e interessados no ensino de Matemática para que possa ajudar na compreensão do desenvolvimento de temas e da estrutura praxeológica presentes na Matemática Escolar. Com isso, motivar futuras pesquisas sobre o tema abordado e ter contribuído para uma reflexão sobre as condições favoráveis e restritivas que podem emergir na pratica docente.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria Antropológica do Didáctico: metodología de análise de materiais didáticos. *UNION – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 42, p. 9-34, nov. 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/283715937_Teoria_Antropologica_do_Didatico_metodologia_de_analise_de_materiais_didaticos. Acesso em: 9 jun. 2019.

BARBOSA, Edelweis J. T.; LIMA, Anna Paula A. B. Organizações matemáticas e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, Florianopólis, v. 9, p. 110-129, 2014.

BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364-387, set./dez.2017.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática ensino fundamental*. 8.ed. São Paulo: Moderna, 2015.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*, v. 3, 1991.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Yves. *La Transposición Didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. 3. ed. Buenos Aires: Aique, 2005.

DIAS, Marlene Alves, et. Al: A noção de sistemas de equações lineares na transição entre o ensino médio e o ensino superior, *ULBRA*, Canoas, p 1-12, out. 2017.

FREITAS, Maxlei Vinicius Cândido de. Uma análise praxeológica do ensino de volume dos sólidos geométricos em livros didáticos do ensino médio. *ENEN*, São Paulo, p. 1-12, jul. 2016.

GUERRA, Renato Borges; ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. Tarefas fundamentais no fazer matemático escolar: organização matemática para o ensino da geometria analítica. Margens (UFPA), v. 6, n. 8, p. 109-121, abr. 2013.

GUERRA, F. J. U.; SILVA, M. J. F. da; IPARRAGUIRRE, R. C. G. A componente tecnológica -teórica dos sistemas de duas equações lineares na educação básica. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 498-513, 2019. Disponível em. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p498-513. Acesso em: 20 dez. 2019.

KLUTH, Verilda Speridião; ALMOULOUD, Saddo Ag. Transposição Didática em Chevallard: conceitos e teorização primordiais para a Teoria Antropológica do Didático. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 1-22, maio. 2020.

LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.(Coleção Matemática universitária)

MENEZES, Marcus Bessa de. Praxeologia do professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. 2010. 178 f. Tese (Doutorado) – Programa de pós-Graduação em Educação do Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

PANTOJA, Ligia Françoise Lemos. *Transposição Didática Interna*: as transformações adaptativas realizadas sobre o saber matemático função afim para o ensino na Educação de Jovens e Adultos. 2017. 175 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação da Rede Amazônica em Educação em Ciências e Matemática – REAMEC – POLO/UFPA, Belém, 2017.

RINCON, M.; FAMPA, M. *Álgebra Linear*: Método da Eliminação de Gauss. Rio de Janeiro: CEDERJ. 2017. Disponível em. https://dcc.ufrj.br/~rincon/Disciplinas/Algebra%20Linear/Aula_013.pdf. Acesso em: 12 fev. 2020.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. *A invariável prática da regra de três na escola*. 2017. 192 f. Tese (Doutorado) – Programa de pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Cientifica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

SILVA, Denivaldo Pantoja da; GUERRA, Renato Borges. A Potente função do esquema gráfico nas praxeologias da regra de três. *Sinepem*, Belém, p. 1-12, maio 2019.

História da Matemática e as UBPs:
aplicações no Ensino Médio

Ramon Gil

Daniele Esteves Pereira Smith

Resumo

O presente artigo trata da possibilidade de exploração didática de uma fonte histórica por meio do uso e aplicação de Unidades Básicas de Problematização (UBP) no ensino de matemática. A obra utilizada como fonte de estudo e apoio para a elaboração e aplicação das UBPs foi o livro escrito no século XVIII pelo matemático e físico Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) denominado de *Lettres à une Princesse d' Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia). O percurso metodológico da pesquisa iniciou com a escolha de uma carta dentre as 234 presentes na obra, para que fosse efetuada a problematização por meio da elaboração de um conjunto de UBPs as quais visavam trabalhar conteúdos de matemática e de diversas áreas do conhecimento de forma (IN)disciplinar (FARIAS e MENDES, 2014). As UBPs produzidas foram utilizadas em uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pertencente à rede pública estadual localizada no município de Cametá/Pará. Por fim, conclui-se que a produção de UBPs apresenta um grande potencial para ser trabalhado em sala de aula atingindo todos os níveis de ensino não se restringindo apenas aos conteúdos matemáticos, mas permitindo uma transversalidade entre os mais diversos temas.

Palavras-chave

Ensino de matemática. Fontes históricas. Cartas científicas. Unidades Básicas de Problematização. Ensino Médio.

Introdução

Sabe-se que relacionar os conteúdos a serem repassados com a realidade vivenciada pelo aluno torna-se uma importante ponte entre o mesmo e o processo de apreensão e construção do conhecimento. Desta forma, nos últimos anos, inúmeros estudos vêm sendo desenvolvidos visando à criação de novas metodologias que possam trabalhar de forma mais dinâmica os conteúdos exigidos pelos documentos oficiais deixando-os mais próximos da realidade dos alunos.

Desta forma, com base nas vivências proporcionadas pelos estágios supervisionados, somadas a experiência de participação no projeto Residência Pedagógica, subprojeto Matemática, que tem como título *Articulações entre práticas socioculturais e os Cursos de Formação de Professores de Matemática: uma proposta do uso de Unidades Básicas de Problematização* (*UBPs*) *na disciplina de Estágio Supervisionado*, o presente artigo tem como objetivo analisar os resultados obtidos com a aplicação de uma UBP indisciplinar produzida com base na carta XV contida na obra *Lettres à une Princesse d' Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia) de Leonhard Paul Euler.

O trabalho com as UBPs mostra-se uma importante ferramenta de auxilio docente, haja vista que as problematizações podem ser trabalhadas por meio de práticas socioculturais vividas ou conhecidas pelos alunos, bem como uma abordagem tendo como base uma obra histórica. A utilização desse recurso metodológico em sala de aula gera uma variação de atividades que podem ser aplicadas, o que pode acarretar uma melhora no processo de ensino-aprendizagem nas aulas de matemática. Segundo Miguel e Mendes (2010, p. 386, tradução livre).

> A UBP é um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade posta a uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história.

Uma das principais características de uma UBP é a possibilidade da construção de uma atividade indisciplinar. Nesse caso vale ressaltar que o termo indisciplinar não faz referência com indisciplina ou pessoa indisciplinada, mas remete a uma atividade que não se mantém presa somente a uma determinada disciplina, sendo ela escolar ou científica. De acordo com Farias e Mendes (2014, pág. 121)

> O termo *indisciplinar* não deve ser entendido aqui como sinônimo de "não-disciplinar", quer quando a palavra "indisciplina" seja vista como campo escolar delimitado de saber ou campo delimitado de investigação científico-acadêmica, quer quando vista como conjunto de normas orientadoras da ação e do comportamento. Com o termo "*in-disciplinar"*, queremos significar aqui um procedimento metodológico que voluntariamente transgride as fronteiras as fronteiras de campos culturais disciplinares estabelecidos a fim de se reconhecer como igualmente legítimas, do ponto de vista da análise cultural, atividades humanas que, por quaisquer razões, não alcançaram o estatuto disciplinar.

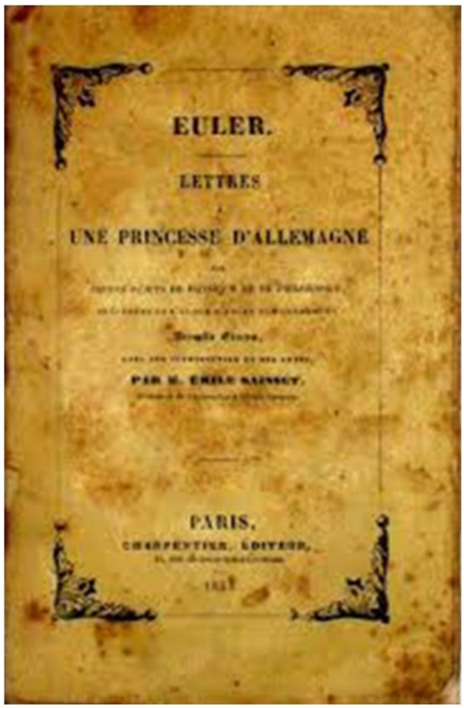
Ela permite valorizar elementos tais como contexto, historicidade, informalidade e simplicidade que são aspectos importantes na prática escolar da Matemática, mostrando a importância da história e cultura da comunidade escolhida para a aplicação da problematização na educação (PEREIRA e TAVARES, 2017).

O trabalho com as práticas socioculturais, assim como o uso de obras históricas geram situações problemas, que contextualizadas e tratadas pedagogicamente dentro do que se exige nos documentos oficiais como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), podem ser usados como ferramentas que auxiliam o processo de construção do conhecimento do aluno em sala de aula.

A fonte histórica estudada

A obra selecionada para problematização e produção da UBP indisciplinar chama-se *Lettres à une Princesse d' Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia). É um clássico literário do século XVIII de autoria do físico/matemático Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), sendo constituída da reunião de um conjunto de cartas, escritas originalmente em língua francesa, como mostra a figura a seguir:

Figura 1 – Frontispício da edição em língua francesa da obra *Cartas a uma Princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia*



Fonte: Google Imagens

Segundo Pereira (2014), durante sua tradução referente ao primeiro tomo, verificou que as *Lettres* abordavam uma determinada temática central. Tal verificação já havia sido observada por Pérez (1990) durante sua tradução em espanhol da referida obra, se tornando assim imprecindível para uma possível identificação dos temas centrais e sua classificação por blocos. Sendo assim, os blocos temáticos identificados foram os seguintes:

Quadro 1 – Distribuição das *Lettres* de acordo com a temática principal

CONTEÚDOS	*LETTRES*
Dinâmica: Movimento e Distância	I e II
Dinâmica: Inércia e Forças	LXXI a LXXV
Teoria Musical	III a VIII
Pneumática	IX a XIII
Termologia	XIV, XV e XVI
Òptica	XVII a XLIV
Gravidade	LXXI a LXXV
Astronomia: Sistema do mundo Astronomia: Movimento dos planetas Astronomia: Marés Gravitação Universal Propriedades da Matéria Força	LIX a LXVIII LXI LXII a LXVIII XLVIII LXIX a LXX LXXIX

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

3. A *Lettre* selecionada

A *Lettre XV* foi a correspondência utilizada como fonte para problematização e produção da UBP indisciplinar, pois apresenta um grande potencial pedagógico que pode ser explorado em sala de aula. Essa carta versa sobre as mudanças que o calor e o frio produzem na atmosfera e pertence ao grupo de *Lettres* que abordam a temática sobre Termologia. Agrega no decorrer de suas linhas conteúdos como noções de grandezas diretamente proporcionais, propriedades do ar e clima, o que nos permite a produção de uma UBP que trabalhe a multidisciplinariedade entre matemática, física e geografia. Isso faz com que tal problematização vá ao encontro do que já era exigido em documentos oficiais como PCN, onde é sugerida uma conexão entre a matemática e temas transversais, o que é reafirmado pela nova BNCC de matemática (BRASIL, 2018, p. 263) que afirma:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Tendo em vista as articulações apresentadas nos documentos oficiais, atrelado às vivências proporcionadas pelos estágios supervisionados, efetuou-se a produção de uma UBP com intuito de aplicação direcionada ao Ensino Médio que venha a alcançar os assuntos de Matemática, Física e Geografia, trabalhados mediante a obra de Euler. Posterior à justificativa acerca da carta escolhida e o público-alvo de sua problematização, traduzida de forma livre, para fins didáticos a correspondência XV.

Quadro 2 – Trecho da livre tradução da *Lettre* XV

LETTRE XV: DES CHANGEMENTS QUE LA CHALEUR ET LE FROID PRODUISENT DANS L'ATMOSPHERE (DAS MUDANÇAS QUE O CALOR E O FRIO PRODUZEM NA ATMOSFERA)
O calor e o frio produzem no ar o mesmo efeito que nos outros corpos. O calor rareifica o ar e, o frio o condensa. No entanto, pelo que tive a honra de explicar a Vossa Alteza uma quantidade de ar não está determinada a ocupar um espaço limitado como outros corpos; sendo que por sua natureza o ar tende a se expandir, e o fato de se expande quando não encontra obstáculos que se oponha a sua expansão. Esta propriedade chama-se Elasticidade do ar. Assim, se o ar está preso em um tubo, faz esforços para rompê-lo, e o esforço é tão maior quanto mais condensado está.

Daí se obtém a seguinte regra: a elasticidade do ar é proporcional a sua densidade; de modo que se o ar é duas vezes mais denso, sua elasticidade também é duas vezes maior, e, em geral, a cada grau de densidade corresponde um determinado grau de elasticidade. Mas agora convém observar que esta regra só é verdadeira quando o ar mantém o mesmo grau do calor. Quando o ar se aquece demais, adquire uma maior força para se estender correspondente a sua densidade, e o frio produz o efeito contrário, diminui sua força expansiva. Logo, para reconhecer a verdadeira elasticidade de uma massa de ar, não é suficiente saber a densidade, também precisa-se notar o grau de calor que convém. [...]

31 *de maio de* 1760

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Proposta de UBPS: um estudo abordando a indisciplinaridade de temas

Com base na obra de Euler, em específico a Carta XV selecionada para problematização, foi formulada a UBP que segue utilizada para aplicação no Ensino Médio. Tiveram como conteúdos abordados os conceitos de grandezas diretas e inversamente proporcionais, regra de três, números decimais, propriedades do ar, diferenças climáticas.

Problematização: Uma viagem nas mudanças que o calor e o frio produzem na atmosfera

No século XVIII o físico e matemático Leonhard Paul Euler foi convidado pelo rei da Prússia Frederico II, o Grande, para tornar-se tutor de sua sobrinha a jovem Princesa Anhalt-Dessau. Nesse período era comum que as jovens pertencentes a realeza contasse com tutores para realização de sua educação, sendo esta prática recorrente não só na Alemanha, mas em outros países europeus. O ensino era feito preferencialmente em língua francesa, pois considerava-se a França como grande expoente em termos de educação e cultura. O modo com que Euler dialogava com a princesa sobre os mais diversificados temas era por meio da troca de cartas. Para esta atividade foi selecionada a correspondência XV, a qual fizemos a leitura anteriormente. Com base nessa leitura separamos o seguinte trecho da carta para uma análise.

> Para clarificar isto, imaginemos dois quartos fechados por todas as partes, mas que se comunicam mediante a uma porta, e que tem o mesmo grau de calor nos dois quartos. É preciso que ambas as portas, que saem o ar tenha o mesmo grau de densidade; pois se o ar fosse mais denso e, em consequência, mais elástico que a outra escaparia parte daquele ar para entrar este, até que a densidade dos dois se igualasse. Mas, suponhamos agora que um quarto se esquente mais que o outro, o ar adquira nele uma maior elasticidade, se expandirá, e ao entrar no outro quarto, reduzirá dele em um espaço menor. O quarto, reduzirá o ar dele a um espaço menor, até que a elasticidade, em ambos os quartos, alcance o mesmo grau. Até que isso suceda, passará um vento pela porta do quarto, um vento quente e frio e quando o equilíbrio se estabelecer, o ar estará mais rarefeito quente e mais condensado do que frio; no entanto, a elasticidade de ambos os ares será a mesma. Logo está claro que duas massas de ar de diferentes densidades podem ter a mesma elasticidade a saber: quando uma está mais quente que a outra, esta circunstância pode acontecer que duas massas de ar com o mesmo grau de densidade estejam dotadas de diversas elasticidades. O que acabo de dizer que em dois aposentos pode-se aplicar as duas regiões: quando um lugar se esquenta mais que o outro, o ar necessariamente flui de um para o outro, a causa que se produz o vento. (PEREIRA, 2014, p. 99)

Efetuando um tratamento mais lúdico do que Euler descreveu acima, temos o exemplo de dois quartos totalmente fechados, interligados somente por uma porta, possuindo a mesma temperatura, ou seja, o mesmo grau de calor. O autor condiciona também, que o ar que escapa pela porta possua a mesma densidade, pois se fossem diferentes, consequentemente teriam elasticidades diversas. Um determinado ar escaparia de um quarto para outro, até que as densidades entre os ares entrassem em equilíbrio. Tendo as densidades, atingido uma igualdade, consequentemente a elasticidade entre ambos alcançará o mesmo valor. Visto que a relação entre elas fica evidente quando verificamos o início da correspondência que trata o seguinte:

> Daí se obtém a seguinte regra: a elasticidade do ar é proporcional a sua densidade; de modo que se o ar é duas vezes mais denso, sua elasticidade também é duas vezes maior, e, em geral, a cada grau de densidade corresponde um determinado grau de elasticidade. (PEREIRA, 2014, p. 99)

Desta forma percebemos a relação feita por Euler entre a proporção da densidade e elasticidade que somadas a explicação do fenômeno de comportamento do ar entre corpos e ambientes, nos direcionam aos assuntos abordados na carta. Imersos nesse contexto enunciado pelo autor da obra, partiremos para a nossa atividade.

Bloco de Atividades 01 – Física

1.1 Ao escrever para princesa sobre as características do ar, Euler evidencia que o mesmo possuí uma importante propriedade. Qual seria essa propriedade? Descreva suscintamente!

1.2 Quais outras propriedades, além da mencionada por Euler na carta, o ar tem? Faça uma pesquisa sobre as propriedades do ar e comente o que você obteve como resultado.

1.3 Dentre as propriedades encontradas por você, qual lhe chamou mais atenção e por quê?

1.4 Com suas palavras explique o exemplo dos quartos apresentado por Euler na carta.

1.5 Euler utiliza o exemplo dos dois quartos para explicar um dado fenômeno. Que fenômeno é esse? Que outro exemplo você usaria para explicar o mesmo fenômeno?

Bloco de Atividades 02 – Matemática

2.1 Ao tratar sobre a elasticidade do ar, Euler deixa claro que a mesma possui uma importante relação com a densidade. Descreva qual seria essa relação.

2.2 Um determinado ar possuiu uma densidade de valor igual a 1,127 kg/m^3, estando equilíbrio com sua elasticidade de valor *x*. Devido a algumas ações de meios externos essa densidade adquire um novo valor igual a 3,381. Quanto terá que valer a elasticidade para que o sistema entre em equilíbrio novamente?

2.3 Caso seja a elasticidade *x* que sofra uma variação de forma a dobrar seu valor, a densidade que era 1,127 kg/m^3 passará a valer quanto para que se mantenha um sistema equilibrado?

2.4 Admitindo que se tenha uma densidade igual a 2,482 kg/m^3 e que sua elasticidade se encontre três vezes menor, quanto deve valer a nova densidade para que se mantenha o equilíbrio?

2.5 Grandezas matemáticas ou físicas, como densidade e elasticidade, podem ser diretamente ou inversamente proporcionais. Faça uma pesquisa e explique essa relação de proporcionalidade entre grandezas!

2.6 As grandezas densidade e elasticidade são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? Justifique!

2.7 Faça uma pesquisa e dê exemplos de outras grandezas que possuem a mesma relação que há entre densidade e elasticidade e apresente a turma seus resultados.

Bloco de Atividades 03 – Geografia

3.1 No decorrer da carta Euler fala para a princesa a respeito dos diversos graus de calor em diferentes regiões da Terra. Ao descrever esse fenômeno Euler chega ao que denomina de "Surpreendente Paradoxo". O que vem a ser esse paradoxo?

3.2 Com base na leitura da carta você acredita que o calor e o frio sofrem alterações em elevadas altitudes?

3.3 Faça uma pesquisa sobre a diferença entre tempo e clima. Discorra em sala com seus colegas os resultados de sua pesquisa.

3.4 Qual clima que predomina na região onde você mora? Quais as principais características do mesmo?

3.5 Pesquise sobre os tipos de clima existentes e debata com seus colegas de classe sobre os resultados obtidos.

As UBPs possuem abertura para novas indagações, não somente nas três disciplinas abordadas nos blocos de atividades, como também em outras áreas pois a mesma possibilita que sejam tratados assuntos como: diferenças climáticas, pressão atmosférica, origem do vento, corrente de conversão (brisa marítima), densidade e elasticidade do ar, poluição e pureza do ar, proporcionalidade entre grandezas, regra de três, números decimais, dentre outras temáticas importantes que fazem parte dos conteúdos escolares e que são necessárias para o convívio social, o que reforça sua inclusão em atividades de ensino.

Resultados e discussões

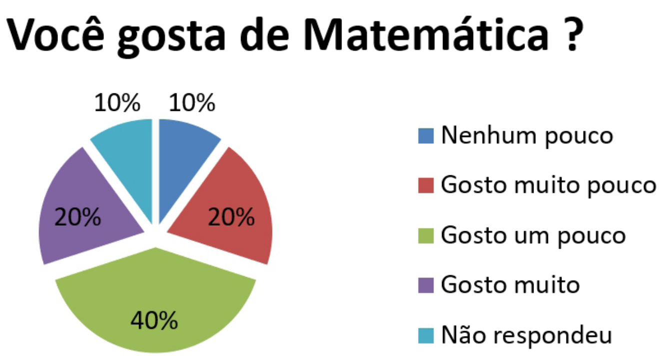
A UBP confeccionada teve sua aplicação efetuada em uma escola da rede estadual, no município de Cametá no Estado do Pará. A atividade foi desenvolvida no decorrer de dois encontros, de duração de 45 minutos cada (uma aula), na turma do 3º ano, onde foi disponibilizado aos alunos o material com UBP contendo os blocos de atividades, a *Lettre XV* como material de apoio e por fim foi repassado um questionário, que seguirá em apêndice, constituído por onze perguntas, sendo dez de múltipla escolha e uma discursiva.

Em um primeiro momento foi introduzida a atividade, com o contexto histórico que gira em torno da obra usada como base. Falou-se um pouco sobre o autor do clássico literário, o período histórico que o mesmo se encontrava, os costumes da época, até que se adentrasse em específico na correspondência na qual os alunos tinham como material de apoio para resolução das atividades. Imersos na curiosidade acerca das atividades propostas mediante a apresentação da *Lettre* os alunos partiram para a tentativa de solucionar as questões presentes na UBP. Como visto a mesma possui questões de pesquisas e discussões, o que garantira uma nova abordagem efetuada em um segundo momento.

No segundo momento de aplicação, foram apresentadas as questões encaminhadas para pesquisa, então foi apresentada a definição dos conteúdos abordados na carta. Com isso as atividades foram recolhidas para análise, e foi passado o questionário aos estudantes. A aplicação contou com a participação de dez alunos, entretanto somente seis entregaram seus blocos de atividades no final da aplicação.

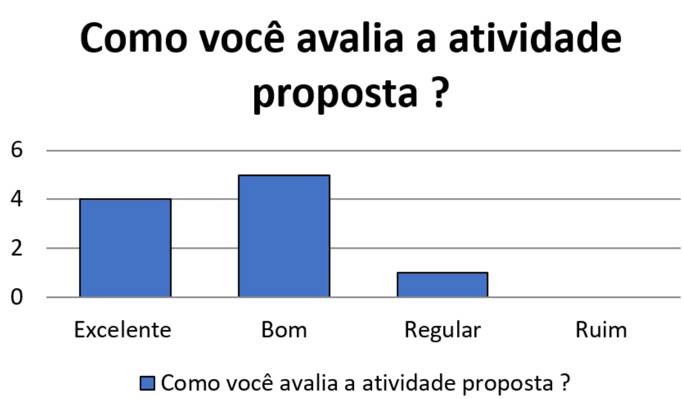
De acordo com a análise feita sobre o questionário aplicado aos alunos percebemos que boa parte dos estudantes gosta muito pouco de matemática, como vem mostrar o Gráfico 1, entretanto a forma como foi desenvolvida a atividade e sua contextualização/aplicação por meio da carta e dos blocos de atividades presentes na UBP foi bem aceita em sala de aula, como mostra o Gráfico 2:

Gráfico 1



Fonte: Arquivo pessoal

Gráfico 2



Fonte: Arquivo pessoal

A informação acerca do interesse dos estudantes sobre a disciplina de matemática ressalta a análise feita nos blocos de atividades onde foi perceptível um menor aproveitamento da mesma, em detrimento das duas outras disciplinas presentes nos blocos de atividades da UBP.

O bloco de Atividades mais trabalhados pelos alunos foi o 03, referente à disciplina Geografia, seguido do bloco 01 referente a Física e por fim o bloco 02 que trata dos conhecimentos matemáticos. Em rodas de conversas nas aulas durante o período de aplicabilidade da atividade os alunos acabam por deixar transparecer suas dificuldades e rejeição em relação a Matemática, contudo observou-se também uma empolgação por parte da turma pelo contexto histórico presente na correspondência XV trabalhada e uma inquietação pela forma de utilizar a carta para sanar as problemática abordadas nos blocos de atividades o que vai ao encontro do que espera da uma UBP como Metodologia Ativa, despertando a curiosidade do aluno e fazendo com que o mesmo busque por mecanismos para resolver os problemas estipulados, de forma a serem agentes ativos no processo de construção de tal conhecimento, o que é reforçado por Mendes (2017, p. 145-166):

> Atualmente, têm se ampliado os estudos sobre possíveis abordagens didáticas que podem ser propostas para o ensino da matemática com base na história dessa disciplina. Uma das maneiras indicadas para colocarmos em prática essa perspectiva pedagógica é revisitarmos da melhor maneira possível os momentos históricos que envolvem os personagens e suas práticas que conceberam as noções, conceitos e propriedades matemáticas que pretendemos ensinar, de modo a desafiarmos a capacidade dos alunos para exercitarem estudos, pesquisas e problematizações que estimulem suas estratégias de pensamento e, daí poderem culminar na sua produção de conhecimento durante a atividade de estudos.

Vale ressaltar que nenhum aluno havia tido contato com tal metodologia anteriormente, contudo o modo com o qual a mesma foi desenvolvida em sala de aula foi aceito de forma satisfatória instigando os alunos a partirem em busca de uma solução para problemáticas estabelecidas aproximando da disciplina de matemática, que em geral não tem uma aceitação tão boa dentre os estudantes, como visto no gráfico 01.

Considerações finais

Em vista da busca por metodologias que aproximem o estudante do processo de construção do conhecimento, na tentativa de contribuir no auxílio das dificuldades presentes dentro do processo de ensino-aprendizagem, a UBP vem com o intuito de contribuir para um melhor desempenho por parte dos estudantes tanto de Nível Básico como de Superior.

As abordagens feitas no decorrer deste trabalho sugerem a UBP como possibilidade para diversificar o método de trabalho aplicado pelas escolas para o tratamento de determinados conteúdos disciplinares. Faz-se necessário que se entenda que tal metodologia trabalha interligada a história da prática sociocultural ou obra histórica trabalhada, levando o aluno ao contato com a fonte primária, articulando tanto situações históricas quanto atuais, do cotidiano, que por vezes passam despercebidas ou acabam sendo deixadas de lado em sala de aula.

A aplicação da UBP tratada neste trabalho mostra que uma abordagem metodológica por meio de UBPs oferece uma diversificação no modo de se trabalhar os conteúdos em sala de aula, tendo um bom retorno dos estudantes em referência ao modo de resolução. Vale ressaltar que a UBP trabalhada encontra-se em aberto para modificações mediante a necessidade da turma a ser trabalhada futuramente, bem como os conteúdos nela abordados.

Por fim, conclui-se que a produção e uso de Unidades Básicas de Problematização apresentam um grande potencial para serem trabalhados em sala de aula atingindo todos os níveis de ensino não se restringindo apenas aos conteúdos matemáticos, mas permitindo uma transversalidade entre os mesmos e os mais diversos temas.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Apresentação dos temas transversais e ética. Brasília, DF: MEC, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, DF: MEC, 1998.

______. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

FARIAS, C. A.; MENDES, I. A. *Práticas socioculturais e educação matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

MENDES, I. A. *Revista COCAR*, Belém, edição especial, n. 3, p. 145-166, jan./jul. 2017.

MIGUEL, A. MENDES. I. A. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. *ZDM Mathematics education,* n. 42, p. 381-392, 2010.

PEREIRA, D. E. *Correspondências Científicas como uma relação didática entre História e Ensino de Matemática*: O exemplo das Cartas de Euler a uma Princesa da Alemanha. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

PEREIRA, A. C. C.; TAVARES, M. O. A UBP e sua inserção no ensino de Matemática: Uma proposta utilizando a obra Matemática Lúdica de Leon Battista Alberti (1404-1472). *BoEM,* Joinville, v. 5. n. 8, p. 21-36, jan./jul. 2017.

PEREIRA, D. E. MENDES, I. A. *As correspondências entre Euler e a princesa alemã como unidades básicas de problematização para as aulas de Matemática*. Série História da Matemática para o Ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

PÉREZ, C. M.; EULER, L. *Cartas a uma princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofia*. Zaragoza: Universidad, Prensas Universitárias, 1990.

Perfil dos egressos da turma 2013 do curso de licenciatura em Matemática da UAB/UFPA – Polo Cametá:
trajetória acadêmica e impacto profissional

Rosiley Progênio Dias

Rubenvaldo Monteiro Pereira

Resumo

O presente trabalho é um estudo de caso que investigou a trajetória acadêmica e profissional de alunos egressos da turma Matemática 2013, do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade Educação a Distância (EaD) ofertado pela Universidade Federal do Pará (UFPA), através da Universidade Aberta do Brasil (UAB) pólo localizado no município de Cametá/PA. Neste, objetivamos identificar no perfil dos egressos: os desafios e perspectivas do período de formação acadêmica, as atividades que esses desenvolvem atualmente e o papel que o Curso teve em sua trajetória profissional, para, com isso, compreender os significados da formação na modalidade EaD na vida destes. Isso se justificativa pelo número crescente de profissionais que estudaram matemática, nos últimos anos, na modalidade EAD na UAB/UFPA polo de Cametá/PA; pela necessidade de compreender a percepção destes egressos sobre o curso ofertado, ou seja, quais os benefícios e as fragilidades deste processo de formação; e, por fim, os resultados profissionais alcançados pelos mesmos. Para tanto, fizemos um breve apanhado histórico da evolução da modalidade EaD e da concepção e desenvolvimento da UAB no Brasil, em especial do polo UAB/UFPA no município de Cametá/PA, para por fim fazermos a pesquisa. A metodologia utilizada neste, foi a coleta de dados de natureza qualitativa e quantitativa, e o público alvo investigado foram alunos egressos da turma supracitada, que responderam a um inquérito com questões específicas relativas às suas trajetórias no Curso e após a formação. Os dados foram analisados e os resultados apresentam o perfil destes alunos, os desafios enfrentados no processo de formação e os impactos do curso na vida profissional.

Palavras-chave

UAB. Licenciatura em Matemática. Egressos.

Introdução

O modelo educacional brasileiro até meados do século passado era deveras tradicional e excludente (SAVIANI, 2019). A luta pela universalização do ensino em nosso país só veio a ser contemplada, legalmente, ao final do século passado com a promulgação da Constituição da República Federativa do Brasil (BRASIL, 1988). Todavia, alcançar tal objetivo perpassaria por um investimento colossal na capacitação e formação de profissionais em educação, bem como em infraestrutura. Com a popularização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) a modalidade EaD tornou-se uma estratégia viável para superar tais desafios. Como iniciativa governamental, a implantação da EaD em nosso país se deu através da UAB, que surgiu para promover e subsidiar a formação em graduação, e atualmente pós graduação, por meio de parcerias com diversas Instituições de Ensino Superior (IES) brasileiras. Em particular, a UAB, em parceria com a UFPA, contemplou o município de Cametá/PA com um polo que, entre outros cursos, ofertou a Licenciatura em Matemática, cuja turma que ingressou em 2013 é objeto de estudo nesta pesquisa.

Em se tratando de educação, o modelo de ensino no Brasil, até meados do século XX, era muito tradicional e excludente. Tradicional, pois, não obstante os avanços filosóficos propostos por várias correntes educacionais, o processo de ensino e aprendizagem se dava em um ambiente onde somente o professor era o detentor do conhecimento e os alunos repositórios deste saber. Excludente pois, mesmo com as inúmeras reformas educacionais e a promulgação de LDBs, como a de 1961 e a de 1971, para a maioria dos cidadãos, quando muito, eram oferecidos somente o chamado de ensino primário (LDB de 1961) ou primeiro grau (LDB de 1971). O chamado grau médio, que compreendia o ginasial e o colegial na LDB de 1961 ou segundo grau na LDB de 1971, era oferecido somente às classes sociais mais abastadas. Já o nível superior era, em geral, um sonho distante aos menos favorecidos. Assim, a educação não era para todos, e sim um privilégio para poucos.

Com o passar do tempo isso foi modificando, pois a cada período da história surgiram movimentos de luta e novas legislações de forma tal que, hoje, o direito ao acesso à educação é universal no Brasil. Contudo, não obstante as legislações que sucederam a Constituição Federal de 1988, a implementação do direito à universalização ao ensino passa pela melhoria da oferta de cursos de formação de professores, por meio do acesso a cursos superiores de qualidade, bem como da melhoria da infraestrutura física das escolas.

A popularização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), em especial, as tecnologias digitais, têm revolucionado a sociedade moderna. Assim, como estratégia para superar as desigualdades educacionais em nosso país, a modalidade de ensino EaD tornou-se uma alternativa mais que viável. A implantação da EaD, como política de Estado, se deu através da UAB, através da promoção e subsídio dessa modalidade de ensino nas IES brasileiras.

Com esse novo paradigma na educação, o acesso a um curso de graduação foi oportunizado a muitas pessoas. Na modalidade de ensino EaD/UAB, o discente pode desenvolver sua vida acadêmica de uma forma distinta da tradicional pois, por exemplo, esta não exige que o mesmo esteja presente cotidianamente na sala de aula, possibilitando alcançar os diversos níveis de aprendizagem e seus objetivos educacionais por meio de formas alternativas que o ensino EaD proporciona. Segundo Preti (2005, p. 17), ensino a distância é uma modalidade que,

> [...] apresenta uma maior flexibilidade de acesso e de tempo dedicado aos estudos, e está atrelada diretamente às novas exigências sociais, econômicas e políticas, requerendo dos trabalhadores uma postura que indique interesse em investir na formação continuada, em serviço e ao longo da vida.

Para que haja oferta dos cursos EaD, as esferas governamentais devem dar suporte, no que diz respeito às condições, para que os cursos sejam ofertados sem exclusão e, principalmente, que alcance aqueles que não podem estar em uma sala de aula presencial. Baseado nisto, os cursos ofertados nessa modalidade de ensino possuem como estratégia uma maior distribuição geográfica pelo país. Por mais que a modalidade de ensino a distância seja diferenciada da tradicional, ela tem se mostrado muito eficiente, pois os profissionais formados nela não deixam a desejar em suas atividades a nenhum outro.

Por ser o principal mecanismo de ampliação da EaD no país nos últimos anos e com a grande procura de cursos de nível superior na região de Cametá, a Prefeitura Municipal de Cametá em parceria com a UFPA fundou em 2009 a UAB/UFPA Polo Cametá, para ofertar cursos gratuitos de licenciatura. Posteriormente, cursos de nível técnico e superior de outras instituições, como do Instituto Federal do Pará (IFPA), da Universidade Estadual do Pará (UEPA) entre outras, vem fortalecendo cada vez mais a UAB/Cametá. Em 2009 a UAB/Cametá, em parceria com a UFPA, ofertou sua primeira turma de Licenciatura em Matemática. Logo em seguida, em 2011, ofertou uma segunda turma. Já em 2013, teve início a terceira turma. Este curso teve o ingresso de alunos de vários municípios e localidades próximos à Cametá, oportunizando a estes alcançar a tão sonhada formação, gratuita e com qualidade, em nível superior.

Este trabalho foi construído a partir de uma proposta metodológica qualitativa de estudo de caso, pois este delineamento de pesquisa permite explorar situações da vida real cujos limites não estão claramente definidos e, também, descrever a situação no contexto em que está sendo feita a investigação (GIL, 2002, p. 54). O objeto de estudo da pesquisa foi uma amostra representativa dos alunos egressos pertencentes a turma de Licenciatura em Matemática 2013 da UAB/UFPA polo de Cametá, que se formaram no ano de 2018.

Em relação a coleta de dados, vale ressaltar que o estudo de caso é o mais completo de todos os delineamentos, pois vale-se tanto de dados de agentes quanto dos dados de papel (GIL, 2002, p. 141). Assim, neste trabalho optou-se por obter dados através de entrevista estruturada; este tipo de entrevista segue um roteiro previamente estabelecido, se realizando de acordo com um formulário elaborado, e é respondido por indivíduos selecionados.

Para a construção deste trabalho foi feito, em primeiro momento, um levantamento bibliográfico: livros, teses e monografias sobre a UAB e seu modelo de formação, com o intuito de conhecê-la de maneira mais abrangente. Em seguida, aconteceram as entrevistas estruturadas, momento em que os egressos da turma supracitada responderam perguntas acerca do seu processo e após-processo de formação acadêmica, entre outras. Os dados coletados foram analisados e os resultados apresentaram o perfil requisitado destes alunos, ressaltando os desafios enfrentados durante o processo de formação e os impactos do curso na vida profissional de cada um.

A modalidade EaD, a UAB/UFPA e o Polo de Cametá

A globalização e a popularização das TICs surgiram como elementos fundamentais para desenvolvimento de diversas áreas no escopo da sociedade hodierna, em especial na educacional, pois têm possibilitado a democratização e a expansão do acesso à educação, em especial ao Ensino Superior. O fenômeno da globalização tem encurtado distâncias, derrubado muros e reconfigurado a geografia mundial. O acesso às TICs tem potencializado a adoção de modalidades de ensino, como por exemplo a EaD, que vem crescendo de forma significativa pois, sua implantação possibilita que pessoas que residem distante dos grandes centros urbanos possam adquirir educação de qualidade, promovendo, assim, a tão almejada universalização do acesso à educação. Tais cidadãos se veem contemplados pela EaD, quando esta promove a educação a uma gente "[...] de incorporação cada vez mais precoce no mundo do trabalho, da população isolada dos centros urbanos ou impossibilitada de ter acesso, por diversos motivos, às formas convencionais de ensino" (LITWIN, 2001, p. 40). Assim, a evolução da EaD no Brasil começa a partir do desenvolvimento das TICs.

Contudo, vale ressaltar que antes da internet o ensino a distância já acontecia através das correspondências. Essa modalidade passou por um longo processo de transformações, por meio de fases, até chegar ao modelo atual. A primeira fase da EaD no Brasil durou até a década de 1980. Nesta, os alunos recebiam das instituições os materiais de estudos enviados para eles por meio de empresas como os Correios, sendo a EaD nesta época, para muitos, o único meio de acesso à educação. A segunda fase da EaD iniciou entre os anos de 1939 a 1941 com o surgimento do rádio e da televisão, meios estes onda foram criados projetos que se somaram às correspondências para o desenvolvimento desta modalidade de ensino. A terceira fase começou a se desenvolver no final da década de 1960. Nesta fase, aliado às correspondências, rádio e televisão haviam as vídeo aulas. A quarta fase se inicia em meados dos anos de 1980 e é marcada pela chegada dos computadores, informática e internet, o que permitiu o acesso instantâneo às vídeo conferências e áudios, tanto para alunos quanto para professores. A quinta e última fase marca o surgimento das plataformas proporcionando maior interação, pois professores podem postar nelas materiais e atividades para os alunos. Nesta fase derradeira, alunos e professores podem conversar em *chats* e salas de vídeo.

Nos dias atuais, a EaD utiliza inúmeras ferramentas tecnológicas disponíveis que auxiliam na aprendizagem, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais acessível e dinâmico aos alunos. A educação na modalidade EaD avança também de forma significativa através dos aspectos regulamentadores e inovadores, para que esta possa ter participação mais intensa e inclusiva no processo educacional brasileiro, através da oferta de cursos em instituições públicas e privadas.

A UAB foi criada pelo Ministério da Educação em 2005, a partir do Decreto nº 5.800 de 08 de junho de 2006, baseado no Decreto nº 5.622 de 19 de dezembro de 2005 que, em seu primeiro artigo, trata do objetivo da criação do sistema UAB, qual seja, "para o desenvolvimento da modalidade a distância, com a finalidade de expandir e interiorizar a oferta de cursos e programas de educação superior no País" (BRASIL, 2006). Assim, a iniciativa se deu com o objetivo de ampliação e interiorização da oferta de Ensino Superior gratuito e de qualidade no Brasil. A UAB passa então a ser o articulador das instituições públicas brasileiras de ensino e, de forma integradora, abre um leque de possibilidades para que cidadãos possam realizar cursos de graduação, priorizando as licenciaturas, tornando-se cada vez mais presente em todo o território nacional. Com isto, governos, IES e inúmeras instituições educacionais passam a aderir ao sistema da UAB.

A UAB é um sistema que articula toda a política de ensino da EaD na esfera governamental no Brasil. Segundo Mill e Pimentel (2010, p. 200), a UAB foi:

> Uma ideia constituída como estratégia prática de ampliação, democratização e interiorização do ensino superior no Brasil. Essa ação foi o fruto que amadureceu nas discussões realizadas no Fórum das Estatais pela Educação, que ocorreu no ano de 2004. Nesse Fórum foram discutidos os problemas da educação superior no Brasil e seus desafios. Um dos objetivos foi o de implementar políticas públicas no sentido de ampliar as oportunidades de ingresso e permanência do aluno no espaço acadêmico.

Ou seja, devido à precariedade na oferta do Ensino Superior no país, a UAB deu o impulso necessário à universalização e a democratização do acesso a um curso de nível superior no Brasil. Mota et al. (2006), relatam que;

> [...] a oferta de educação superior [tem] como base a adoção e o fomento da modalidade de educação a distância, visando a atender demandas reprimidas no Brasil e contribuindo para enfrentar as assimetrias educacionais, apresentando-se, portanto, como uma alternativa para a democratização do acesso ao ensino superior.

A UAB foi criada em virtude da necessidade de se ter um órgão articulador, que realizasse as ações por meio das TICs, como a internet, tal que, de forma integradora, colocasse professores e alunos numa relação de ensino e aprendizagem virtual onde pudessem interagir de forma significativa. Para tanto esse ensino e aprendizagem na modalidade a distância envolveria parceria das três esferas do poder público: federal, estadual e municipal, pois estes têm por obrigação legal dar suporte ao desenvolvimento e funcionamento da UAB em toda a sua estrutura, através de políticas públicas que deem base de sustentação para que suas ações possam avançar de forma significativa a todos os brasileiros que dela necessitem. De acordo com Azevedo (1997), compreende-se, por políticas públicas, um elenco de ações e procedimentos que visem à solução pacífica de conflitos em torno da alocação de bens e recursos públicos. Portanto, toda e qualquer forma de intervenção do governo, seja qual for a esfera, que venha fomentar ações em benefício à sociedade, é uma forma de realizar políticas públicas.

O sistema da UAB possui regras para a criação de turmas, pois determina limite de oferta e regras para funcionamento. Por exemplo, é necessário que haja uma certa demanda para que a turma possa ser implementada. No âmbito da UAB/UFPA polo de Cametá/PA os dois primeiros cursos ofertados: Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Administração, foram liberados pelo Parecer de CES 670/98, de 1º de outubro de 1998 do Conselho Nacional de Educação, o qual propagava que:

> Diante de todo o exposto, é favorável o credenciamento, pelo prazo de cinco anos, da Universidade Federal do Pará, com sede em Belém, Estado do Pará, para desenvolver e implementar o "Programa Ensino da Matemática a Distância", autorizando o funcionamento do curso de Matemática, nas modalidades Bacharelado e Licenciatura Plena, nos termos do artigo 80, da Lei 9.394/96 e regulamentação correspondente. Uma vez que o programa será ministrado de forma modular, a instituição poderá conceder certificações progressivas, dentro da perspectiva de diversificação de modalidades de ofertas da educação superior. (BRASIL, 1998).

Desse momento em diante, de acordo com este parecer, iniciou a oferta do curso de Licenciatura em Matemática pela UFPA no Campus Guamá em Belém e, posteriormente, expandiu-se a oferta até as regiões do Baixo Tocantins, sendo que os mesmos deveriam ser implantados nos municípios com o apoio pedagógico e financeiro de órgão governamentais como SEED/MEC, IES e governos estadual e municipais.

Com o progresso da UAB, o município de Cametá viu a necessidade de oficializar o polo de apoio presencial da UAB, que já funcionava desde 22 de agosto de 2009. Isto foi feito através da Lei de Nº 245 de 20/09/013, onde o município de Cametá se compromete a ser o mantenedor da UAB. Nesta, também, foram ofertados cursos de nível técnico, superior entre outros, todos na modalidade EaD.

Com isso, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) ficou como órgão responsável pelo programa na esfera federal, a Prefeitura Municipal de Cametá como mantenedora, enquanto que os cursos eram ofertados por IES como, por exemplo, a Universidade Federal do Pará, a Universidade

Federal Fluminense, a Universidade Federal de Ouro Preto e a Universidade Estadual do Pará.

Pelo termo de compromisso que os municípios devem assinar para a implantação do sistema UAB, o polo implantado deve ter uma certa estrutura de suporte para os alunos como, por exemplo, biblioteca e laboratório de informática, onde os alunos possam desenvolver trabalhos e eventuais atividades relacionadas às suas respectivas disciplinas, obedecendo as seguintes características

> [...] Disponibilizar os recursos humanos com as ações necessárias ao funcionamento adequado da infraestrutura física, tecnológica e recursos humanos indispensáveis à oferta de cursos da UAB, de acordo com os Referenciais de Qualidade para Educação Superior a Distância do Ministério da Educação. (BRASIL, MEC/Termo de Compromisso Cametá-PA, n.º 29.373/2008),

segue ainda que:

> O Polo UAB é uma estrutura acadêmica de apoio pedagógico, tecnológico e administrativo para as atividades de ensino e aprendizagem dos cursos e programas de Educação a Distância – EaD, de responsabilidade das Instituições de Ensino Superior – IES. O polo UAB é voltado para o atendimento de um público das regiões vizinhas. Ressalta-se que os espaços disponíveis no polo UAB devem garantir o pleno desenvolvimento das atividades previstas, em regime de compartilhamento por todas as IES nele atuantes. (CAPES/Polo UAB, 2018).

Além disso, um polo para funcionar deve cumprir exigências básicas para receber turmas, pois a Portaria Normativa n.º 02/2007-CAPES define que “[...] o polo de apoio presencial é a unidade operacional para desenvolvimento descentralizado de atividades pedagógicas e administrativas relativas aos cursos e programas ofertados à distância” (BRASIL, 2017). A prefeitura de Cametá providenciou as devidas condições e pôde receber o referido polo.

A UAB/Polo Cametá, desde 2009, ofertou os seguintes cursos: Licenciatura Plena em Matemática (Turmas EAD 2009, 2011 e 2013), Bacharelado em Administração Pública (Turma

EaD 2011), Aperfeiçoamento: Programa Processo Formativo em Educação Ambiental: Escolas Sustentáveis em Parceria com UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto (Turma 2014), Pós-Graduação Lato Sensu do Curso de Especialização em Gestão em Saúde (Turma 2014), Curso de Extensão: Formação de Agentes Populares de Educação Ambiental na Agricultura Familiar, Curso de Especialização em Planejamento, Implementação e Gestão de Educação à Distância – PIGEAD (Turma 2014), Licenciatura Plena em Matemática/UFPA (Turma EaD 2013), Licenciatura Plena em Ciências Biológicas/UFPA (Turma EaD 2017), Licenciatura Plena em Pedagogia/UEPA (Turma EaD 2017) e um Curso de Licenciatura Plena em Letras /Língua Portuguesa/UEPA (Turma EaD 2017).

A UAB/ polo Cametá tem sido local de desafios e conquistas para profissionais e alunos. De acordo com Cruz (2019, p. 183), funcionária do polo e, também, coordenadora do Polo no período de 2013 a 2016,

> No período de 2009 a 2016, vivenciou um aprendizado único e enriquecedor para sua vida profissional, possibilitando-a conhecer, vivenciar e lutar para que o melhor fosse oferecido para cada jovem que, pelas necessidades ou desejo de fazer um curso em nível superior, adentrava no Polo.

Em 2013 a UAB/polo Cametá, em parceria com a UFPA, recebeu uma turma de Licenciatura em Matemática formada por discentes advindos de vários municípios da região. As aulas presenciais das disciplinas ofertadas eram realizadas por tutores em sala de aula do polo aos finais de semana com bastante aproveitamento pelos discentes. A plataforma utilizada no ensino a distância era a Moodle-UFPA. Todas as semanas os professores disponibilizavam nela: tarefas, atividades e materiais de apoio, para os discentes. Na Moodle-UFPA, professores e coordenadores das disciplinas interagiam com os discentes por meio de *chats* e fóruns, entre outros. A Secretaria da Faculdade de Matemática do ICEN/UFPA, no Campus Guamá, dava apoio administrativo e orientações sobre o calendário de atividades e as provas, por exemplo. Os livros eram fornecidos gratuitamente pela instituição e os discentes que moravam em outros municípios tinham direito a carteira de meia passagem fornecidas pela Agência de Regulação e Controle de Serviços Públicos do Estado do Pará (ARCON-PA).

De acordo com o testemunho da primeira autora, ex-aluna da turma de matemática 2013 do polo UAB/UFPA, muitos foram os desafios enfrentados pelos alunos para conseguirem se organizar e poder estar aos finais de semana nas aulas, principalmente os alunos que residiam nos municípios circunvizinhos, pois estes tinham que sair cedo das suas casas na sexta-feira e pegar ônibus e/ou barco passando vários transtornos e todo tipo de situações para chegar a Cametá a tempo de ir para o polo da UAB/UFPA e participar das aulas. Alguns discentes tinham carteira de meia passagem, mas não tinham direito de viajar sentado nos ônibus, sem falar que muitos tinham dificuldades financeiras para ir todos os finais de semana para o polo da UAB/UFPA. Alguns não possuíam internet em suas casas, nem computadores e isso muitas vezes atrapalhava acompanhar o curso, pois perdiam as postagens das atividades. Alguns precisavam ficar no polo depois das aulas para postarem do Laboratório de Informática suas atividades, mas nem sempre conseguiam. Com todos esses atropelos ainda tinham que se esforçar ao máximo estudando em grupos, mas às vezes não tinha como fazer isso porque a maioria morava em outro município e o jeito era tentar estudar sozinho. Com isso, o aprendizado dependia da capacidade de entendimento de cada um, mas em se tratando de linguagens matemáticas ficava um pouco difícil entender os livros sem alguém para orientar. Isso tudo conduzia inevitavelmente a ter que refazer, muitas das vezes, as disciplinas nas chamadas reofertas.

A primeira autora, também afirma, que foram cinco anos de muito esforço, dedicação e luta para realizar o Curso, pois o ensino na modalidade EaD requer muito disso e muito mais dos discentes. Quando o aluno não era aprovado em disciplina com apoio do tutor em sala, num determinado semestre, ele tinha a chance de refazer a disciplina, mas agora necessitando estudar somente com apoio do professor *on-line* e dos materiais que recebia da instituição. Com isso, a evasão foi alta, pois não se adaptaram nesse modelo de ensino. A turma que iniciou com 60 alunos terminou somente com 22 formados. Com certeza, os que ficaram se tornaram profissionais capacitados para atuar na área da matemática, no entanto mesmo estes, em alguns momentos, quiseram desistir, mas buscaram apoio nos colegas de turma, nos tutores e professores do ICEN/UFPA, que os ajudaram e não os deixaram desistir. Muitos buscaram forças para não desistir no fato de ter a certeza de ter escolhido o curso certo, na instituição certa, e que esta seria a porta de entrada ao mercado de trabalho.

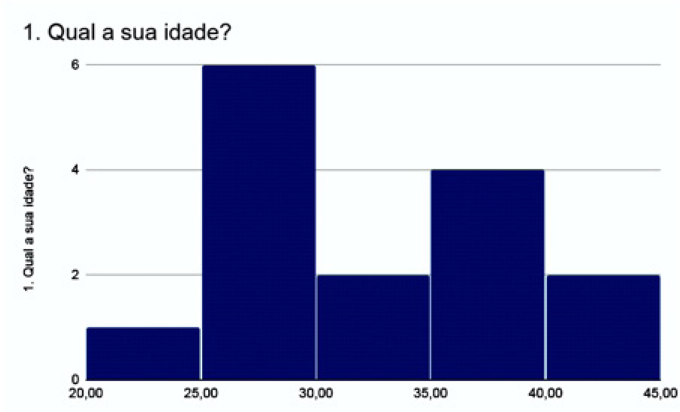
Por fim, a primeira autora observa que alguns alunos da turma de matemática 2013 da UAB/UFPA polo Cametá obtiveram resultados positivos após a formação, pois conseguiram emprego na área da matemática. A formação colaborou de forma significativa para os mesmos. Alguns ainda não estão atuando como profissionais em sala de aula, mas estão dando continuidade aos estudos e se aperfeiçoando cada vez mais em cursos de pós-graduação *lato sensu* e almejando o mestrado. Este crescimento profissional se deve muito às ações da UAB/UFPA polo de Cametá.

Perfil dos egressos da turma de licenciatura em matemática da UAB/UFPA Polo Cametá

Nesta seção relatamos os resultados do inquérito aplicado a uma amostra de 15 discentes, egressos da turma de Licenciatura em Matemática de 2013 da UAB/UFPA Polo de Cametá. Os dados foram tabulados e os resultados e discussões são apresentados e ilustrados na ordem em que as questões foram postas no inquérito. Nestas questões os discentes relatam um pouco de suas experiências no curso supracitado, onde tiveram a oportunidade de participar e concluir; e de sua vida profissional após formados.

O Gráfico 1 é um histograma e refere-se a questão 1, faixa etária atual dos discentes egressos da turma. O que podemos observar é uma concentração de alunos na faixa etária entre 25 e 40 anos, implicando uma turma de egressos adultos em pleno vigor para o mundo do trabalho.

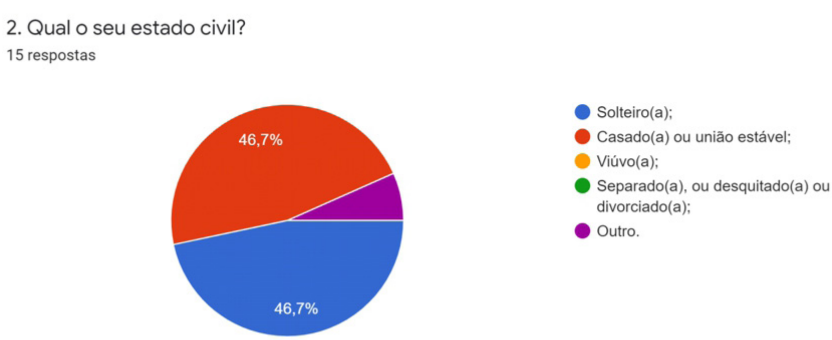
Gráfico 1 – Histograma com as idades dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA



Fonte: os autores.

A seguir, no Gráfico 2, apresentamos o estado civil atual dos egressos. Neste, podemos ver que 46,7% são solteiros e 46,7% são casados ou vivem em união estável, o que mostra um equilíbrio entre o número de casados e o número de solteiros. Isso fala de um grupo de pessoas com maturidade, responsabilidades e necessidades da vida adulta, especialmente no que se refere a realização profissional.

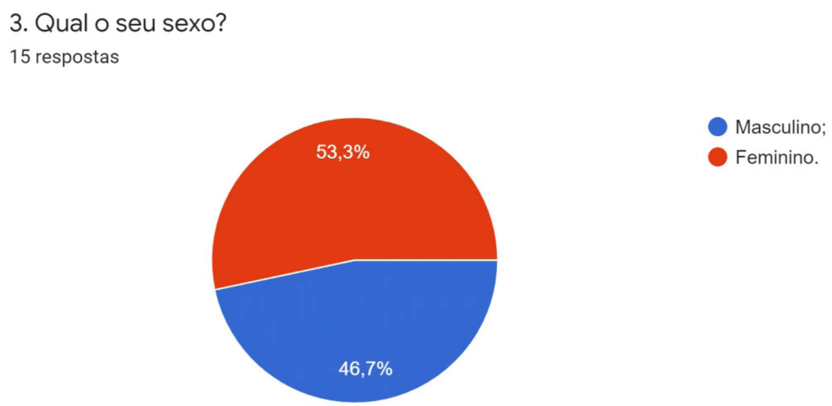
Gráfico 2 – Estado civil dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA.



Fonte: os autores.

O Gráfico 3 ilustra o sexo dos egressos. O que podemos observar é que 53,3% são do sexo feminino e 46,7% do sexo masculino, ou seja a presença feminina é levemente maior no grupo, significando um empoderamento feminino dessa geração se comparado a geração de seus pais. Salienta-se também que até pouco tempo não era comum muitas mulheres em turmas de Matemática.

Gráfico 3 – Gênero dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA

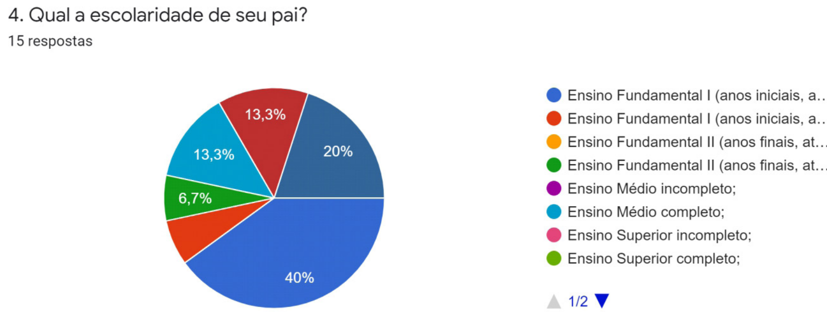


Fonte: os autores.

Sobre a escolaridade do pai, o Gráfico 4 apresenta o Ensino Fundamental I incompleto com o maior percentual, 40%, seguido do Ensino Fundamental I completo com 13,3%, enquanto que o do ensino fundamental II completo o percentual diminui para 6,7%. Quanto ao Ensino Médio completo o percentual é de somente 13.3% e os sem escolaridade 6,7%. 20% não souberam ou não opinaram. Assim, concluímos ser baixo o nível escolar do pai da grande maioria dos discentes, pois acumulam 60% com no máximo nível fundamental completo e nenhum pai possui o Ensino Superior. Isso se dá, pois são pessoas simples, da classe trabalhadora da população e que não tiveram oportunidade de acesso a maiores níveis de escolaridade. Assim, a conquista da graduação pelos filhos ratifica o objetivo da UAB de alcançar os que estavam excluídos do nível superior.

Gráfico 4 – Escolaridade do pai dos egressos da UAB/UFPA polo de

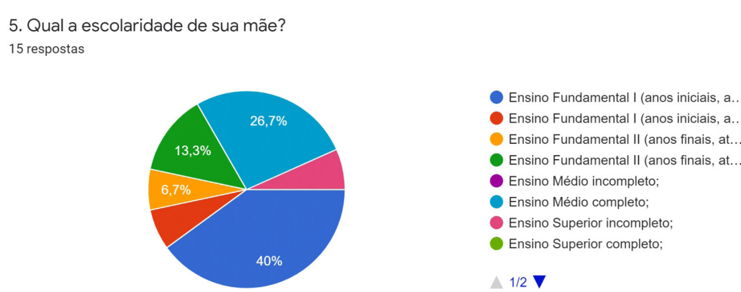
Cametá/PA



Fonte: os autores.

A questão 5, ilustrada no Gráfico 5, foi direcionada para aferir o nível de escolaridade da mãe. Nele observamos que o nível Ensino Fundamental I incompleto representa a maior faixa, 40%, enquanto que o Ensino Fundamental I completo representa somente 6,7%, mesmo percentual do Ensino Fundamental II incompleto destas. Já o Ensino Fundamental II completo representa 13,3%. Para o Ensino Médio completo o percentual é de 26,7% e para o Ensino Superior incompleto, 6,6%. Percebe-se então que, como a escolaridade dos pais, a maioria das mães desses discentes são pessoas simples com pouca vida escolar, contudo há mais mães com Ensino Médio completo e outras cursaram o Ensino Superior, mas não concluíram.

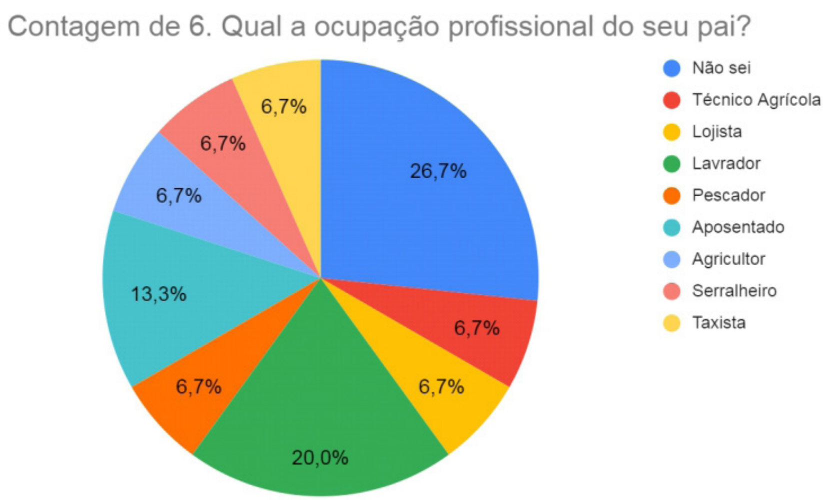
Gráfico 5 – Escolaridade da mãe dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA



Fonte: os autores.

Referente à pergunta 6, sobre a profissão do pai, o Gráfico 6 ilustra que a maioria, 20%, são lavradores, 13,3% são aposentados e o restante das profissões estão representados em 6,7%, cada. Ou seja, são trabalhadores das classes mais humildes da sociedade, refletindo com isso o nível baixo de escolaridade. Note que 26,7% não sabem, o que pode indicar desconhecimento do pai, realidade que vem a valorizar mais ainda a obtenção do curso universitário pelos filhos, pois implica superação e conquista de famílias monoparentais.

Gráfico 6 – Ocupação profissional atual do pai dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA

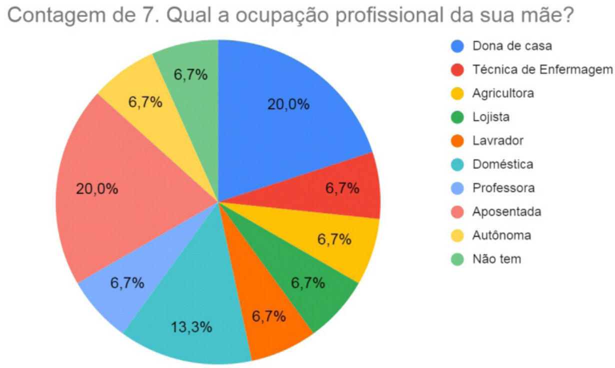


Fonte: os autores.

Sobre a profissão da mãe, questão 7 do inquérito, ilustrada no Gráfico 7, percebemos que a maioria são aposentadas ou são donas de casa, 20% dos entrevistados cada, e 13,3% são domésticas. As demais profissões têm percentuais de 6,7%, cada. Isso também é reflexo da baixa escolaridade pois, em sua maioria, são mulheres trabalhadoras das classes mais humildes da sociedade. O fato de 20% ser dona de casa pode implicar dependência financeira de outrem, modelo comum em famílias patriarcais.

Gráfico 7 – Ocupação profissional atual da mãe dos egressos da

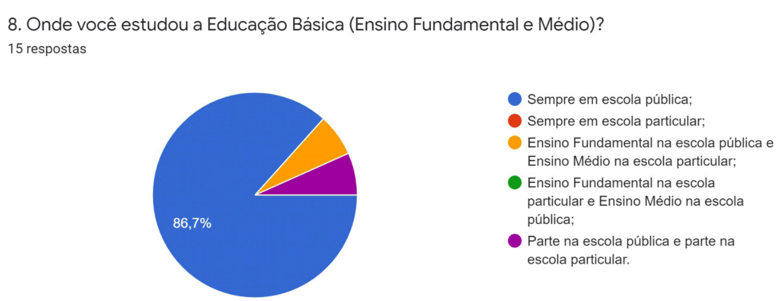
UAB/UFPA polo de Cametá/PA



Fonte: os autores.

A questão 8, ilustrada no Gráfico 8, indagou em que tipo de instituição os egressos da turma em questão estudaram o Ensino Básico. As respostas mostram que a grande maioria, 86,7%, estudaram em escolas públicas, uma pequena parcela de 6,7% estudou o Ensino Fundamental em escola pública e o Ensino Médio em escola particular e 6,7% estudaram parte na escola pública e parte na escola particular. Isso reforça a importância do investimento público nesta modalidade de ensino, pois além de oportunizar a formação em nível superior nessa região atinge a parcela da sociedade mais vulnerável social e economicamente.

Gráfico 8 – Educação Básica dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA

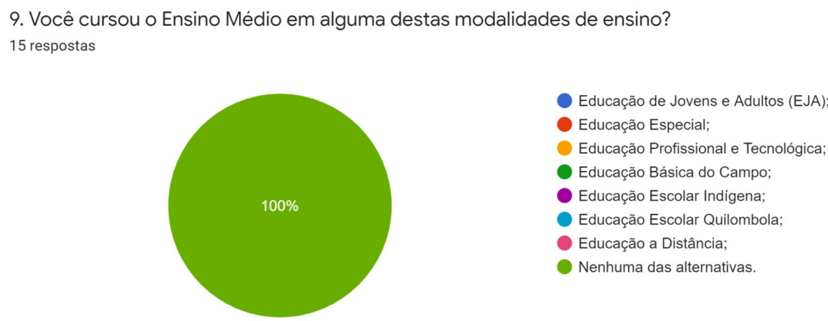


Fonte: os autores.

A modalidade de ensino em que os egressos cursaram o Ensino

Médio está ilustrada em percentuais no Gráfico 9. Todos os alunos, ou seja 100%, responderam que cursaram o Ensino Médio na modalidade normal. Logo, a UAB precisa reforçar ações assertivas que promovam a inclusão de alunos pertencentes a outras realidades sociais, como os formados pela: EJA, educação tecnológica, educação especial, quilombolas, indígenas e camponeses.

Gráfico 9 – Educação Básica dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA



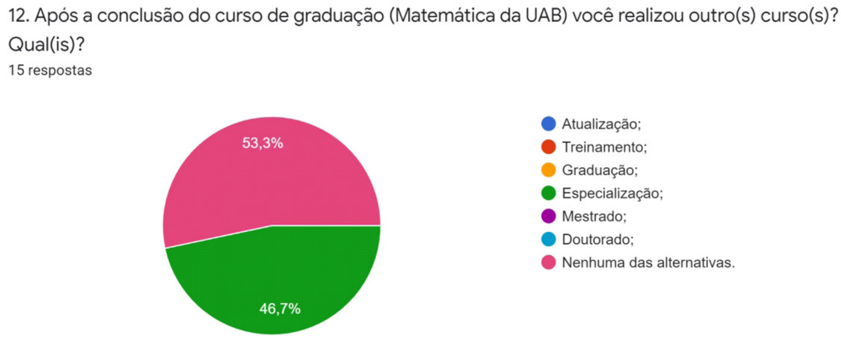
Fonte: os autores.

Na questão 10 do inquérito, ratificamos o ano de ingresso dos alunos em questão no curso de Licenciatura em Matemática da UAB/UFPA polo de Cametá/PA. Dos 15 alunos que participaram da entrevista todos são da mesma turma, ingressaram em 2013, enquanto que, na questão 11 a pergunta foi direcionada quanto ao ano de conclusão do curso. Todos pertencentes à amostra, responderam que concluíram em 2018, ou seja, dentro do mesmo período.

A pergunta 12, ilustrada no Gráfico 10, tem a ver com a continuidade dos estudos, ou seja, se após a conclusão da graduação em matemática, esses alunos participaram de outros cursos. Destes 46,7% responderam que estão em curso de especialização e 53,3% não deram continuidade, ainda, aos estudos. Isso mostra que o Curso abriu janelas de oportunidades de estudos para além da graduação, fortalecendo toda uma cadeia educacional da região impactada por esses profissionais.

Gráfico 10 – Continuidade dos estudos pelos egressos da UAB/

UFPA polo de Cametá/PA



Fonte: os autores.

O Gráfico 11 refere-se à questão 13 e inquiriu se o aluno está atuando como professor de Matemática. As respostas são bem contundentes pois, 26,7% responderam que sim e 73,3% responderam que não. Assim, menos de ⅓ dos formandos de 2018 atuam no magistério. O que reforça a necessidade de políticas públicas que venham a absorver a mão de obra capacitada da região para que o ciclo virtuoso da educação e profissionalização se feche.

Gráfico 11 – Exercício do magistério pelos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA

Fonte: os autores.

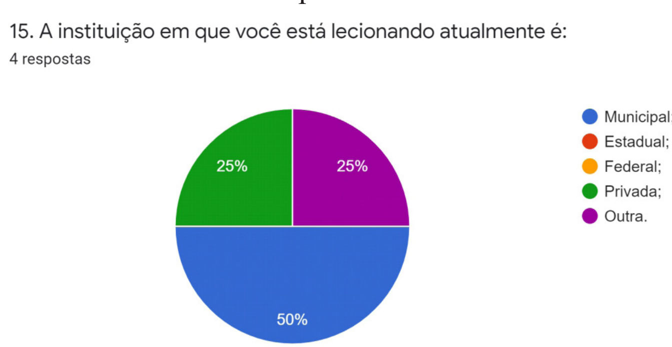
O Gráfico 12 refere-se à questão 14 e indagou qual o nível/etapa da educação básica os egressos que atuam como professor estão atuando. A maioria, 75%, está no Ensino Fundamental e o restante, 25%, está na Educação Infantil. Sendo assim, a educação básica do município já está sendo beneficiada pela mão de obra em ensino de matemática fruto da UAB/UFPA polo Cametá.

Gráfico 12 – Modalidade no exercício do magistério pelos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA

Fonte: os autores.

A questão 15 se refere ao tipo de instituição que os professores, desse grupo de egressos, estão lecionando e está ilustrada no Gráfico 13. Metade dos egressos estão lecionando em escolas públicas, 25% em escolas particulares e 25% em outros tipos de ensino. Assim, a escola pública é a maior beneficiada com os licenciados, em atividade no magistério, formados em 2018 na instituição pública UAB/UFPA polo de Cametá/PA.

Gráfico 13 – Instituição onde exerce o magistério pelos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA



Fonte: os autores.

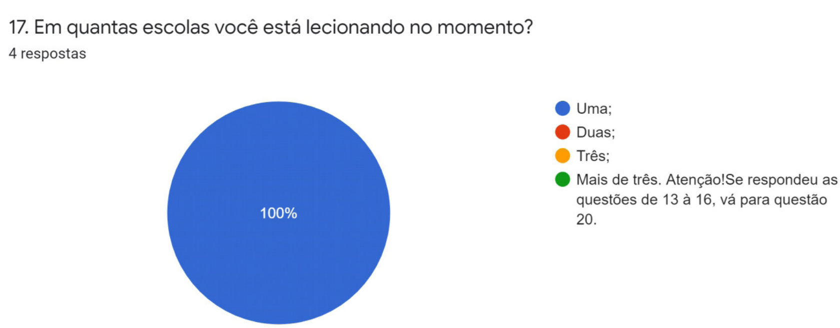
A questão 16 tratou do tempo de experiência desses professores no magistério. O Gráfico 14 apresenta que: dos professores em atividade em sala de aula 50% possuem um ano de experiência e 50% possuem mais de 05 anos. Ou seja, metade já atuava no magistério antes da formação, o que nos fala de formação continuada e capacitação professores da ativa. Já a outra metade estão iniciando carreira após formados, já sendo absorvida pela rede de educação.

Gráfico 14 – Tempo do magistério pelos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA

Fonte: os autores.

No que se refere à questão 17, ilustrada no Gráfico 15, foi perguntado aos entrevistados em quantas escolas eles estariam atuando no momento. Dos que atuam como professor, todos responderam que estão atuando somente em uma escola.

Gráfico 15 – Quantidade de instituições em que os egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA exercem o magistério



Fonte: os autores.

A questão 18 indagou se os entrevistados exerciam outras atividades remuneradas. As respostas foram positivas e, em sua maioria, em variadas atividades. Mostrando que são pessoas em plena atividade no mundo do trabalho, porém, com baixa remuneração, forçando a dupla jornada de trabalho. Em relação ao magistério isso é preocupante, pois acarreta pouco tempo para planejamento e preparação das atividades escolares.

Na questão 19 foi perguntado se esses egressos já exerciam, antes de se formar, as atividades outras mencionadas na questão 18. Como ilustrado no gráfico 16, responderam a maioria, 92,9% respondeu afirmativamente. Ou seja, a graduação abriu somente mais uma oportunidade como fonte de renda.

Gráfico 16 – Os egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA atuavam na atividade atual antes de formado

Fonte: os autores.

Na questão 20 perguntou-se, subjetivamente, quanto tempo, em anos ou meses, esses egressos estão nas atividades citadas da questão 18. As respostas variaram entre 02 e 22 anos. Assim, são vínculos empregatícios, alguns estáveis, que só poderiam ser abdicados ante uma oportunidade que provesse remuneração mais atrativa.

Na questão 21, ilustrada no gráfico 17, foi perguntado aos entrevistados qual o nível de satisfação com a sua profissão. Se consideram satisfeitos 40%, muito satisfeito e pouco satisfeito 26,7% e insatisfeito somente 6,6%. Assim, a graduação deu uma contribuição formativa a muitos desses egressos, porém a maioria se considera satisfeito ou muito satisfeito com a profissão mesmo não sendo o exercício do magistério.

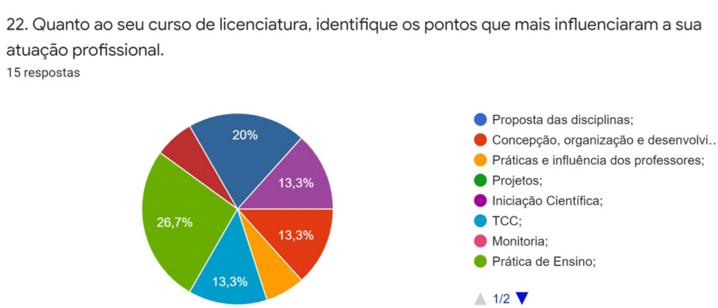
Gráfico 17 – Satisfação dos egressos da UAB/UFPA polo de

Cametá/PA com a profissão.

Fonte: os autores.

Na questão 22, ilustrada no Gráfico 18, pediu-se aos entrevistados para identificar em uma lista pré-definida, os pontos que mais influenciaram a atuação profissional após o curso de graduação. Práticas de ensino com 26,7% foi o mais votado, seguido de atividades complementares com 20%, concepção organizacional e iniciação científica, estágio supervisionado e TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) obtiveram 13,3% e, por fim, práticas e influência dos professores e monitoria, tiveram 6,7%. isso aponta uma forte influência das disciplinas de prática de atividades complementares e do exercício da pesquisa (TCC) na vida profissional. Assim, verificamos que as atividades acadêmicas em que os alunos eram protagonistas tiveram maior reflexo na vida profissional dos egressos que as demais.

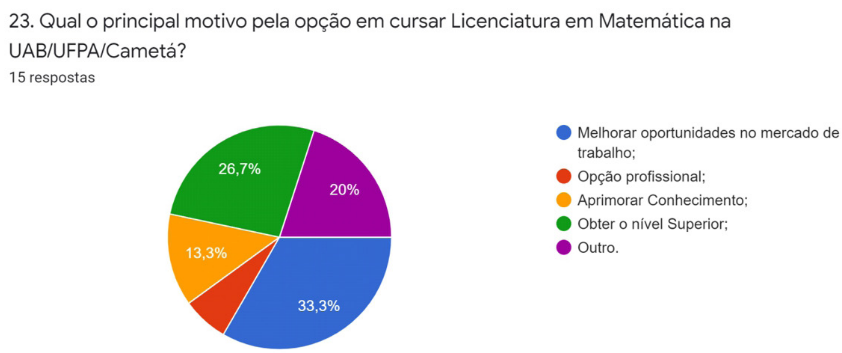
Gráfico 18 – Satisfação dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA com a profissão.



Fonte: os autores.

Na questão 23, perguntou-se aos entrevistados qual o principal motivo pela opção em cursar Licenciatura em Matemática na UAB-UFPA-Cametá. O Gráfico 19 apresenta que a maioria, 33,3%, desejavam melhorar a oportunidade no mercado de trabalho, já 6,7% foi por opção profissional, enquanto que 13,3% queriam aprimorar o conhecimento, outros, 26,7%, somente obter o nível superior e 20% não identificaram precisamente o motivo. Os últimos dados podem explicar o fato de muitos permanecerem e estarem satisfeitos com a profissão anterior à graduação.

Gráfico 19 – Satisfação dos egressos da UAB/UFPA polo de Cametá/PA com a profissão



Fonte: os autores.

Na questão 24, perguntou-se aos entrevistados como eles avaliam a profissão do professor hoje. A seguir destacamos alguns relatos.

> **Aluno 1:** Pode-se dizer que é boa, um trabalho de suma importância, porém o reconhecimento por muitos e os salários não estimulam tal profissional a escolher e se dedicar inteiramente a essa profissão.
> **Aluna 2:** É de suma importância para a sociedade, a profissão é excelente, desafiadora e nos dá oportunidade de lidar e até mesmo de interferir na vida do aluno. Porém, precisa ser valorizada por todos, inclusive pelo professor, é preciso vê-la como ela é: a base das demais profissões.

Isso, reforça a necessidade de maiores investimentos na educação e valorização dos profissionais da educação para que seja atrativo, por exemplo a carreira do magistério.

Na questão 25, perguntou-se aos entrevistados que conselho você daria a um aluno recém ingresso no curso de Licenciatura em Matemática da UAB/UFPA polo de Cametá/PA.

> Aluno 4: A dedicação faz a diferença, aproveite tudo que o Curso tem a oferecer, estude bastante, abrace a oportunidade e valorize sua escolha, monte um grupo de estudos, não desista, dedicação e força de vontade são fundamentais.
> Aluno 5: O mais importante é aprender a manusear o computador de forma total, pois é a ferramenta principal para alunos do curso a distância, vê-se a necessidade de se tornar um autodidata.
> Aluna 6: A EaD pode formar um bom profissional ou um mal profissional, isso depende de cada um de nós, estamos acostumados com aulas de segunda a sexta presenciais, mas na EaD o tutor já vem com a aulas pré-estabelecidas e somente serão ministradas duas vezes na semana, ou seja, nos fins de semana o tutor somente tirará as dúvidas, pois o aluno deve estudar em casa em seu material fornecido pela instituição, deve se dedicar muito e o tempo é curto.

Na questão 26, perguntou-se: Se você pudesse voltar no tempo, o que você faria de diferente (vida acadêmica em geral) no seu curso de Licenciatura em Matemática da UAB/UFPA polo de Cametá/PA e porquê?

> **Aluna 8:** Me empenharia muito mais, porque fiquei em reoferta, aprimoraria mais o conhecimento, porque a matemática instiga o aluno a buscar o mesmo, participaria mais de oficinas e feiras acadêmicas, porque elas são enriquecedoras, mas durante a Faculdade tudo é tão corrido que não damos a devida atenção.
> **Aluno 10:** Me dedicaria mais nas atividades, faria um curso de computação bem avançado, pois foi o principal impasse negativo na conclusão de meu curso.
> **Aluna 15:** Me dedicaria mais a fundo no curso desde as primeiras disciplinas. Assim teria um aprendizado mais significativo, porque sua carreira é reflexo do seu esforço no curso e a prática leva a perfeição.

Portanto, pelas respostas obtidas nessa entrevista com esse grupo de 15 alunos da turma de Matemática 2013 da UAB/UFPA/Cametá, percebe-se que o fator mais importante para os alunos da EaD é a dedicação e superação, pois é um ensino diferenciado que requer muita atenção, esforço, e conhecimento tecnológico.

Conclusão

A finalidade deste trabalho foi analisar a trajetória acadêmica e profissional dos alunos egressos do curso de Licenciatura em Matemática 2013 da UAB/UFPA Polo Cametá. Para tanto, um inquérito com 26 questões relativas a dados pessoais, acadêmicos e profissionais foi aplicado a 15 egressos formandos do referido Curso. O que pudemos analisar foi que os egressos desta turma são pessoas adultas com variação de idade de pelo menos 15 anos, em sua maioria oriundos da escola pública e de famílias simples em que 40% dos pais possui como escolaridade o Ensino Fundamental incompleto. Com relação à trajetória acadêmica dos egressos, apesar das dificuldades para cursar, os mesmos avaliaram bem o Curso e se identificaram bastante com as disciplinas que lhes auferiram autonomia como as práticas e o TCC. Já em relação à vida profissional aproximadamente 25% estão atuando no magistério na área de Matemática após a formação. Alguns, que já atuavam em outras áreas ou níveis, em escolas, tiveram a oportunidade de crescer profissionalmente dentro da instituição escolar. Uma parte dos alunos ainda não tiveram a oportunidade de ingressar em uma instituição escolar, contudo, a formação colaborou de forma significativa para o mundo do trabalho. Quase metade dos egressos estão dando continuidade aos estudos e se aperfeiçoando cada vez mais em cursos de pós-graduação *lato sensu*, o que abre perspectivas visando cursos de mestrados e melhorias no mercado de trabalho. Esperamos que as informações trabalhadas aqui possam servir de parâmetro para que as autoridades públicas venham a consolidar a UAB, em especial o polo de Cametá, como instituição de sucesso na inclusão educacional dos excluídos do Ensino Superior e fortalecimento da educação e sociedade como um todo.

Referências

AZEVEDO, J. M. L. de. *A educação como política pública.* Campinas, SP: Autores Associados, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. *Decreto nº* 5.800, de 8 de junho de 2006. Dispõe sobre o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 9 jun. 2006. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil-03/-Ato2004-2006/Decreto/ D5800.htm. Acesso em: 31 jan.2017.

_____. Fundação CAPES. *Universidade Aberta do Brasil. Polos UAB.* Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://www.capes.gov.br/uab. Acesso em: 31 janeiro 2017.

CRUZ, Geanice Raimunda Baia. *A Educação a Distância no Ensino Superior:* a experiência do Polo UAB/Cametá/PA. 2019. Dissertação (Mestrado), UFPA, 2019.

DA SILVA, Daniela. *O curso de Licenciatura em Matemática Da PUC/SP e a Trajetória Profissional de seus Egressos* (2005-2010). 2012. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2012.

_____. Ministério da *Educação. Portaria Normativa* nº 02 de 2007, sobre Credenciamento dos Polos, Brasília, DF, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/legislacao/portaria2.pdf. Acesso em: 18 abr. 2018.

FRIGOTTO, Gaudêncio. *Educação e a crise do capitalismo real*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LITWIN, Edith (org.). *Educação a Distância:* Temas para Debate de uma Nova Agenda Educativa. Porto Alegre: Artmed, 2001.

MILL, D.; PIMENTEL, N. (org.). *Educação a Distância:* Desafios contemporâneos. São Carlos: EdUFSCar, 2010.

MOTA, Ronaldo; CHAVES FILHO, Hélio; CASSIANO, Webster Spiguel. Universidade Aberta do Brasil: democratização do acesso à educação superior pela rede pública de educação a distância. IN: BRASIL. Desafios da Educação a Distância na Formação de Professores. Brasília, SEED/MEC, 2006.

PRETI, Oreste (org.). *Educação a Distância:* ressignificando práticas. Brasília, DF: Líber Livro, 2005.

SAVIANI, Dermeval. *História das ideias pedagógicas no Brasil*. Autores Associados, 2019.

Mapeamento da produção científica sobre Educação Matemática Crítica no Brasil no período de 2009 a 2018

Rosivaldo da Silva Cardoso

Daniele Esteves Pereira Smith

Resumo

Este artigo apresenta o tema mapeamento da produção cientifica sobre a educação matemática crítica no Brasil no período de 2009 a 2018 o mesmo tem a finalidade de mostrar estudos de (revistas e eventos) sobre a "educação matemática crítica" para um melhor entendimento desse assunto, construídos em programas de pós-graduação do Brasil e mostrar as contribuições que este tema pode apresentar. Sendo que estas contribuições serão apresentadas a partir de tópicos, onde irá se colocar as áreas de conhecimento, foco de investigação e categorias/temas referentes a pesquisa. Na metodologia utilizou-se uma realização de pesquisa, onde foram utilizados revistas e eventos com assuntos referentes a educação matemática crítica, com intuito de fazer um mapeamento de trabalhos que se referem a matemática crítica como forma de construir um conhecimento coletivo. No item (i) estão as revistas que apresentam a maior parte de pesquisa deste mapeamento, no item (ii) estão a parte dos eventos que é a minoria que estão representados neste mapeamento, ambos serviram de materiais de apoio que forma investigados para a construção deste trabalho, pois, tratam da matemática crítica e as modelagens e contribuições na área da educação e do ensino da matemática no ensino fundamental, sendo que a maior parte fala sobre a modelagem e o processo de contribuição para o ensino da matemática. Verifica-se pelo resultado do mapeamento que as pesquisas referentes ao tema em questão têm crescido consideravelmente, nas áreas da matemática crítica as modelagens e contribuições na área da educação matemática do ensino fundamental dentro do âmbito nacional e internacional.

Palavras-chave

Educação Matemática. Pesquisa em Matemática Crítica. Mapeamento Pesquisa.

Introdução

Com base na leitura do texto de Robison Sá publicado no site infoescola (navegando e aprendendo) sobre educação matemática, a ideia é que a educação matemática surge da necessidade de quebrar barreiras no processo de ensino-aprendizagem que ao longo dos anos se baseava em um processo de ensino que cabia somente ao professor a tarefa de ensinar, com o advento da educação matemática esse conhecimento passou a ser participativo tanto para os docentes como para os discentes, pois em um pensamento ultrapassado o professor era o único detentor do conhecimento e o aluno não poderia ousar em dar uma opinião sobre o determinado assunto a ser trabalhado. Por isso, a necessidade de quebrar esse paradigma traz consigo o surgimento da educação matemática uma nova era revolucionaria vem de encontro com o pensamento retrogrado. Agora os alunos podem participar das ideias, aulas e atividades e as mesmas serão baseadas em suas culturas para um melhor desenvolvimento, tornando o ensino de reciprocidade para ambos, que aprendem um com o outro. Assim, afirma Moacir Gadotti (1988): "... o educador é aquele que emerge junto com seus educandos, desse mundo vivido de forma impessoal. Educar é tornar-se pessoa.", sendo assim, os docentes podem buscar novas metodologias de ensino que englobem estes alunos.

Para fazer uma avaliação justa o professor deve buscar novos meios de fazer um novo modelo de ensino avaliativo este que antes era baseado em formulas e assuntos decorativos, e agora o aluno moderno e participativo, e é avaliado de outras maneiras, através de atividades modernas, pois a disciplina de matemática como uma ciência exata e por séculos é vista pelas pessoas como algo difícil, buscar novos modelos de ensino é o que garante um novo modelo de ensino-aprendizagem.

Segundo Parâmetros Curriculares Nacionais diz que:

> (...) a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (PCN, BRASIL, 1998).

A educação matemática é um campo de pesquisa muito abrangente que surge desde a modernização do ensino como a de reorganização e formulação de novas ideias que se inserem no campo mais complexo da matemática. Logo a matemática crítica se insere nesse contexto a partir da aplicação de novas ideias que modernizam este campo de conhecimento de uma matemática revolucionaria, logo a matemática crítica se insere nesse contexto maior da educação matemática que de acordo com diálogo com o professor doutor em matemática Aldi Nestor de Souza na TV universidade-UFMT (Universidade Federal do Mato Grosso), formado pela Universidade Federal Fluminense (UFF), professor no departamento de matemática na UFMT, e especialista em geometria algébrica. Segundo ele, entende-se que a matemática crítica é uma forma de incluir novas ideias nos conteúdos matemáticos já existentes, de forma que essa inclusão de novas ideias ou perguntas por meio de indagações e questionamentos surgem com o propósito de auxiliar cada vez mais a aprendizagem da matemática de forma geral a partir do conteúdo a ser apresentado. Assim, pode-se dizer que a matemática crítica é uma forma de viabilizar novas perguntas dentro dos conteúdos de matemática já trabalhados, sendo que essas perguntas tem o objetivo de contribuir para um melhor entendimento do conteúdo proposto resultando numa aprendizagem mais significativa.

A matemática crítica leva em consideração que essas novas perguntas contribuem de forma significativa na solução das problemáticas a partir que se aplique em forma de indagações e questionamentos que levarão a uma serie de busca de soluções dentro dos conteúdos de matemática trabalhados em sala de aula ou de forma geral. Esses conteúdos são ampliados com esses novos elementos, ou seja, novas perguntas, que se tornam importante no processo de aprendizagem da matemática.

Para realizar um bom trabalho busca-se como metodologia investigar outras fontes de trabalhos com a mesma temática como materiais de apoio para pesquisa que está sendo realizada, assim usa-se como suporte para um melhor entendimento do trabalho que foi construído nas leituras dos textos-base principalmente na obra do autor Ole Skovsmose 2006, sobre educação matemática crítica (a questão da democracia).

O modelo base deste artigo foi o seguinte trabalho: Mapeamento e Reflexões Sobre Pesquisas Brasileiras com o tema Comunicação Matemática dos autores**,** Angélica Francisca de Araújo e António Manuel Águas Borralho revista REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Ano 14, onde relatam que o mapeamento deve ser feito através de busca de outros textos que tratam do mesmo assunto funcionam como forma de organização e uma interação das ideias dentre todos eles para um melhor construção do artigo em questão, já que todos tratam de um mesmo assunto.

Com objetivo de mostrar as publicações feitas dentro da Educação Matemática crítica nos programas de pós-graduação em nosso país. Construímos um mapeamento de revistas e eventos que serviram de apoio para a construção do trabalho. Para mostrar estas pesquisas, destacamos, por meio de um breve resumo, seus elementos principais: a) autor em ordem alfabética; b) ano de publicação c) foco da investigação; d) questão(ões) de pesquisa e/ou objetivos; e) participantes; e f) principais resultados.

O mapeamento é o elemento principal para o pesquisador, através dele pode-se buscar informações de publicações anteriores que objetivem para a mesma temática, pois objetivo de se elaborar o trabalho a partir do conhecimento de tais documentos pesquisados, assim as perguntas e indagações feitas pelo pesquisador serão respondidas a partir da revisão destas literaturas que desenvolveram sobre a mesma temática, com isso conhecemos mais sobre os assuntos a serem abordados na pesquisa. Assim podemos avaliar os trabalhos construídos do assunto em questão. (Matos 2005, Skovsmose 2001, 2006 e 2013).

Assim de forma objetiva, o presente artigo está estruturado em cinco partes, além das referências. Na primeira parte estão algumas questões introdutórias. Na segunda, algumas considerações sobre o tema matemática crítica. Na terceira relatamos os procedimentos metodológicos usados no mapeamento realizado. Na quarta parte apresentamos as revistas e eventos encontradas com o tema "matemática crítica". Por fim, apresentamos alguns entendimentos em relação às pesquisas encontradas.

Matemática crítica

No Brasil as pesquisas na área da matemática crítica são recentes e se apresenta como uma nova tendência para as contribuições do ensino de matemática para os alunos e sociedade em geral.

A partir das leituras das obras de Ole Skovsmose (2001, 2006 e 2013), no que se refere matemática crítica que foi publicada no Brasil e anteriormente publicados em outras línguas, em revistas internacionais, e aqui traduzidos por Abgail Lins (os quatro primeiros textos) e Jussara de Loiola Araújo (o quinto texto). A obra é prefaciada pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, professor Livre Docente da UNESP, no campus Rio Claro (SP). Assim, as pesquisas em relação ao tema são mais frequentes no âmbito nacional. A Educação Matemática Crítica surge do movimento da Teoria Crítica, da escola de Frankfurt. Essa escola tem forte influência da ideologia de Karl Max e seus originadores foram Theodor W. Adorno, Max Horkheimer e Herbert Marcuse, (SKOVSMOSE, 2013). De acordo com Skovsmose (2001, p. 15) afirma que "a EC tem várias fontes de inspiração [e que] existe uma forte associação com o entendimento de humanismo e sociedade de Karl Marx, especialmente como exposto pela escola de Frankfurt (ou teoria crítica)", atualmente representada por Axel Honneth.

Assim as teorias são mostradas por Ole Skovsmose, Educação Matemática Crítica (EMC), permite certa interação com a Educação Crítica (EC), fundamentado na Teoria Críticada Escola de Frankfurt. Estas teorias falam sobre os conhecimentos da sociedade nas áreas da política e economia que trazem discussões sobre o ensino da matemática e a matemática crítica, por este fato a "Educação matemática versus educação crítica" – Skovsmose caracteriza a Educação Crítica como aquela em que os professores e os alunos se envolvem conjuntamente no processo educacional por meio do diálogo, de forma a desenvolver a democratização do saber.

Os estudos da matemática crítica estão relacionados com o ensino da matemática e os entendimentos para saber se o aluno está apto aos conhecimentos da matemática, estes podem ser intitulados e excluídos a partir de que não consiga desenvolver a matemática de forma positiva, por este motivo todo e qualquer conteúdo que se aplique deve ser discutido criticamente e coletivamente por todos os envolvidos de maneira a solucionar e sanar as dificuldades na aprendizagem, as políticas educacionais propõem metodologias para que melhore aplicabilidade que atenda as dificuldades reais dos alunos, Para Skovsmose, o processo de ensino e aprendizagem precisa ser voltado à resolução de problemas.

Em "Educação Matemática e Democracia", o segundo capítulo do livro, o autor aprofunda o argumento de que a Educação Matemática tem um papel importante no desenvolvimento das competências democráticas nos estudantes em uma sociedade tecnológica. Uma vez que a Matemática tem inúmeras aplicações para a sociedade e exerce uma função social, ela torna-se necessária e insubstituível. O domínio desse conhecimento determina um poder nesse tipo de sociedade. Tais problemas devem mostrar-se importantes aos estudantes, serem acessíveis aos seus conhecimentos prévios e relacionados com os problemas sociais existentes, para Matos (2005, p. 2):

> [...] o ensino da matemática tem tido em muitos países uma função social de diferenciação e de exclusão. A matemática é tipicamente um mistério para muita gente e tem-lhe sido oferecido o papel de juiz pseudo-objectivo, que decide quem está apto e quem está inapto na sociedade, rotulando e posicionando as crianças, os jovens e os adultos como aptos ou como inaptos, e por isso tem servido como um dos guardiões do direito de participação nos processos de decisão da sociedade.

A sociedade discrimina todos aqueles que não conseguem determinar soluções para os problemas matemáticos apresentados a eles, logo, todos são rotulados como aptos e inaptos aos conhecimentos matemáticos, e assim, essa maioria é excluída pela sociedade.

Skovsmose (2001) reconhece a matemática como elemento fundamental para uma construção social e também uma ciência que estabelece regras e transforma a realidade de forma que "[...] a matemática faz uma intervenção real na realidade, não apenas no sentido de que um novo insight pode mudar as interpretações, mas também no sentido de que a matemática coloniza parte da realidade e a rearruma" (SKOVSMOSE, 2001, p. 15). Dessa forma a matemática é vista como fator transformador da sociedade, sendo o principal, como uma forma de formatar a sociedade através do objetivo principal que é atribuir significados à ideia de que a Matemática formata a sociedade e, portanto, a alfabetização matemática é necessária na Educação Crítica. O autor também discute como a Educação Matemática pode ser associada à tecnologia. Para Skovsmose (2001), pensar bem tecnologia não implica, necessariamente, a utilização de computadores ou outros tipos de equipamentos ou ferramentas, mas considerar a tecnologia como parte de todos os aspectos da vida social. A Matemática deve ser vista como elemento deste desenvolvimento tecnológico. Isso caracteriza que o ensino deve ser transformador para os alunos, deve-se buscar formas de metodologias para um ensino real e que contribua para a educação matemática na sociedade, sendo a tecnologia uma ferramenta fundamental no processo do ensino da matemática na sociedade.

Procedimento metodológico do mapeamento de pesquisas

O levantamento das pesquisas com o tema "matemática crítica" foi realizado a partir de buscas em um banco de dados extenso onde foram escolhidas 20 obras entre revistas e eventos que foram publicados no Brasil a partir do ano de 2009 até 2018 como está demonstrado na tabela anexada a seguir. No processo de busca foi usado como descritor a palavra educação matemática entre aspas ("educação matemática crítica").

A partir desse procedimento, escolheu-se 20 registros com termo "educação matemática crítica" que foram publicadas por diferentes instituições de ensino que estarão representadas por suas siglas como CMPA, UESC (Universidade Estadual de Santa Catarina), UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais), UFPA (Universidade Federal do Pará), AMAZÔNIA, PUCRS, EDUCERE, BOLEMA, RIO CLARO (SP), UFSM-RS, BOEM-JOINVILLE, PROFMAT (Programa de Especialização e Mestrado de Matemática), UNIFRA, IFES (Instituto Federal do Espírito Santo), UFMGS (universidade

Federal de Minas Gerais do Sul), UFSCar (Universidade Federal de São Carlos), UEP (Universidade Estadual do Paraná), REES, REnCiMa, Zetetiké, Campinas, SP e UFG, que serviram textos de bases de apoio para o trabalho de mapeamento, os mesmos serão inseridos com os seguintes dados do trabalho de conclusão: instituição de ensino superior, programa, título, autor, tipo de trabalho de conclusão, data de defesa, resumo, volume, páginas, idioma, biblioteca depositária, anexo, contexto (área de concentração, linha de pesquisa e projeto de pesquisa), banca examinadora e vínculo (tipo de vínculo empregatício, tipo de instituição, expectativa de atuação e área de atuação).

Apresentação das revistas e eventos encontrados

Para efeito de organização, as informações referentes às pesquisas se encontram no Quadro 1, considerando ano de publicação em ordem crescente, título, autor e o tipo de trabalho desenvolvido.

Quadro 1 – Informações sobre educação matemática crítica em revistas e ventos

Ano	*Título*	*Autoria*	*Evento (E)/ Revista (R)*
2009	1. Uma Abordagem Sociocrítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica	Jussara de Loiola Araújo	R
2009	2. Produção de Materiais de Aprendizagem segundo Fundamentos Filosóficos da Educação Matemática Crítica	Marcos Vinicius Milan Maciel	E
2009	3. Contribuições da Matemática na formação de cidadãos críticos	Irene Mauricio Cazorla	E
2010	4. Educação Matemática Crítica: um olhar reflexivo acerca do seu caráter emancipatório e motivacional	Maria Janete Bastos das Neves; Patrícia Feitosa Santos; Renato Borges Guerra	E

2011	5. Uma Abordagem Crítica no Ensino de Matemática: Possibilidades de Articulação Teoria-e-Prática por meio da Educação Matemática Crítica	Itamar Miranda da Silva; Aline Andréia Nicolli	R
2012	6. Educação Matemática Crítica: propostas de atividades de acadêmicos de Licenciatura em Matemática	Carlos Teles de Miranda; Guataçara dos Santos Júnior; Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro; Luiz Alberto Pilatti	R
2012	7. Educação Matemática Crítica e subcidadania	Lucas Nunes Ogliari	E
2012	8. Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de Educação Matemática	Jussara de Loiola Araújo	R
2013	9. Matemática Crítica: o por que de algumas definições e regras	Ricardo Fajardo; Silvia Barcelos Machado	E
2013	10. Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de materacia nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um olhar através dos Parâmetros Curriculares Nacionais.	Esther Bahr Pessôa; Valdir Damázio Júnior	R
2015	11. Materiais pedagógicos na perspectiva da Educação Matemática Crítica	Simone Regina dos Reis; Carmen Vieira Mathias	R
2016	12. Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica: melhorias na quadra de esportes	Glaucia Cristhiane Biaca Toná e Silva; Amauri Jersi Ceolim	R
2016	13. Educação Matemática Crítica, Interdisciplinaridade e História da Matemática: entrelaços possíveis para a Educação Matemática	Christiane de Morais Maia; Tiago Bissi; Ligia Arantes Sad	E
2016	14. Educação Matemática Crítica e Educação do Campo: reflexões	Vanessa Franco Neto	E
2017	15. Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica: abordagens na Educação Básica	Milene Nagila Mesquita; Amauri Jersi Ceolim	E

2018	16. A Educação Matemática Crítica nas aulas de Matemática em escolas estaduais do Espírito Santo: uma reflexão a partir das narrativas dos professores	Jonisario Littig; Adriana Tech; Leonardo Correia Alves	R
2018	17. Educação Estatística Crítica: um olhar sobre os processos educativos	Justiani Hollas; Luci T. M. dos Santos Bernardi	R
2018	18. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a educação matemática crítica: uma análise dos conceitos de função e funções polinomiais do 1º e 2º graus no livro didático mais adotado no PNLD 2015	Elenilton Vieira Godoy; Cecy Leite Alves Carreta	R
2018	19. Saber cultural e a Matemática escolar: encontro necessário na educação escolar indígena	Luzia Voltolini; Carmen Teresa Kaiber	R
2018	20. Modelagem Matemática em atividades sobre a temática do lixo: relações com a aprendizagem significativa crítica	Gislaine M. Ferreira Matos; Mirley Luciene dos Santos; Karly Barbosa Alvarenga	R

Fonte: Organizado pelo pesquisador

Conforme dados do Quadro 1, foram escolhidos 20 textos, que estão divididos em 12 Revistas e 08 Eventos relacionadas ao tema “educação matemática crítica”, todos esses trabalhos que serviram como fonte de mapeamento de pesquisa foram construídos por professores de instituições na sua maioria Federais e Estaduais em programas de pós-graduação e que se referem a “educação matemática crítica” e estão todos representados nas siglas acima do item 3 deste trabalho.

Nas leitura dos resumos dos trabalhos de apoio identificou-se que trabalhos encontrados, constatamos que a maioria deles falam sobre a educação matemática crítica, sejam sobre reflexões, modelagem de ensino e sobre terias e práticas no desenvolvimento da aprendizagem na educação matemática todos numa perspectiva de interação social entre professores e alunos. São eles:

(i) Neste item especificam-se os textos de revista que na sua maioria falam sobre a modelagem de uma nova forma de ensino na educação matemática, dando margem as atividades, práticas e teorias que podem ser adotadas ou desenvolvidas para um melhor aprendizado por parte dos alunos e um melhor ensino por parte dos professores na educação matemática.

(ii) Neste tópico apresentamos os textos de eventos que abordam sobre a reflexão do ensino da matemática, sendo a sociedade impõem regras onde formam cidadão críticos. Observe: o evento de número quatorze (14) não possui resumo.

Todos os trabalhos estão diretamente relacionados a educação matemática crítica, todas as revistas e eventos que estão na tabela de mapeamento foram construídos a partir de estudos de assuntos relacionados as contribuições para o ensino da matemática, trazem como reflexões sobre como está se dando esse processo de ensino. Em seguida apresenta-se uma síntese do resumo de cada uma das pesquisas que representam sobre o tema “educação matemática crítica” – 20 no total –, com o objetivo de conhecer os enfoques e os focos das questões de investigação. Para compor essa síntese, trouxemos informações relativas ao autor, ao ano de publicação, ao foco, à(s) questão(ões) de investigação, aos participantes e aos resultados que estão apresentados a seguir:

1 – Autora JUSSARA de Loiola Araújo, *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.2, n.2, p.55-68, jul. 2009 ISSN 1982-5153; Uma Abordagem Sócio Crítica da Modelagem Matemática: A Perspectiva da Educação Matemática Crítica.
Resumo: Este artigo, de cunho teórico, tem por objetivo promover uma reflexão mais profunda sobre o que quero dizer quando falo em abordagem da modelagem matemática segundo a educação matemática crítica (EMC). Início classificando-a como pertencente à perspectiva sociocrítica no sistema proposto por Kaiser e Sriraman (2006). A seguir, procuro caracterizar a modelagem segundo a EMC, destacando o diálogo e a democracia na formação política dos estudantes, a proximidade dessa abordagem à etnomatemática, o questionamento ao absolutismo da matemática, o questionamento a modelos matemáticos como formatadores da sociedade, a participação crítica dos estudantes na sociedade, discutindo questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a matemática serve como suporte tecnológico. Nesse sentido, preocupo-me com uma educação matemática dos estudantes que não vise apenas instrumentá-los matematicamente, mas que também proporcione sua atuação crítica na sociedade, por meio desse conhecimento matemático, o que é uma forma de proporcionar sua emancipação como cidadãos.

2 – Autores: ITAMAR, Miranda da Silva e ALINE, Andréia Nicolli, *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 7, n. 13, jul. 2010 / dez. 2010, v. 7, n. 14, jan. 2011 / dez. 2011. Uma Abordagem Crítica no Ensino de Matemática: Possibilidades de Articulação Teoria-e-Prática por meio da Educação Matemática Crítica.
Resumo: Este artigo trata das possibilidades de articulação teoria-e-prática no ensino, por meio da educação matemática crítica como uma proposta para o professor enfrentar os desafios do cotidiano da sala de aula. A discussão fundamenta-se em uma pesquisa bibliográfica por meio da qual se estudou e analisou vários livros, artigos e dissertações sobre a temática, assim como de nossas experiências e das reflexões advindas do processo de formação de professores que vivenciamos. A partir das leituras e análises foi possível construir uma proposta de ensino que sugere abordar a educação matemática crítica como alternativa de articulação entre teoria e prática e atribuir ao ensino de matemática um maior dinamismo, tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais ampla, cidadã e crítica dos alunos, assim como do professor em processo de formação. Foram levantadas conjecturas sobre possíveis contribuições da educação matemática crítica como alternativa diferenciada em contraposição ao ensino reprodutivista. Acreditamos, assim, que este artigo poderá contribuir com as reflexões sobre a importância da educação matemática na formação do professor que lhe permita a percepção de que além do conhecimento disciplinar (conteúdos), são necessários os conhecimentos pedagógicos, curriculares e experienciais para enfrentar problemas que se relacionam com o ensino de matemática.

3 - Autores: MIRANDA, C. T.; SANTOS Junior G. S.; PINHEIRO, N. A. M.; PILATTI, L. A. *EDUCERE - Revista da Educação*, Umuarama, v. 12, n. 1, p. 7-36, jan./jun. 2012, Educação Matemática Crítica: Propostas de Atividades de Acadêmicos de Licenciatura em Matemática.
Resumo: Este artigo foi elaborado para provocar reflexões em torno do ensino de matemática por intermédio da Educação Matemática Crítica. Apresenta os resultados de uma pesquisa aplicada que teve como objetivo, interpretar a concepção de futuros professores sobre a Educação Matemática Crítica. Tal pesquisa foi aplicada a acadêmicos (em sua maioria, jovens) do 4º Ano do Curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade de Cascavel no Paraná, Brasil. Inicialmente foram feitas considerações em torno da Educação Crítica, estabelecendo relações entre ela e a Educação Matemática. Para a coleta de dados, os trabalhos foram realizados de modo que os acadêmicos produzissem uma aula para ser aplicada a alunos do Ensino Médio. Tais produções constituíram uma quantidade substancial de material para a análise. Os resultados mostraram que a capacidade de produção dos acadêmicos é boa, pois propuseram situações problematizadoras bastante interessantes em diversos campos, principalmente, o social.

4 - Autora: - JUSSARA de Loiola Araújo, *Bolema,* Rio Claro, SP, v. 26, n. 43, p. 839-859, ago. 2012; Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática.
Resumo: Apresento, neste artigo, uma análise de como um grupo de estudantes realizou a tarefa de desenvolver um projeto de modelagem matemática orientado pela educação matemática crítica. Especificamente, procuro compreender como o grupo

interpretou o ser crítico que deles era esperado nessa tarefa. É apresentado um referencial teórico sobre modelagem na perspectiva da educação matemática crítica, enfatizando a concepção problematizadoras e libertadora de educação de Paulo Freire, a compreensão de educação matemática crítica de Ole Skovsmose e o uso desses referenciais na organização de ambientes de aprendizagem de modelagem matemática. A abordagem metodológica foi
Qualitativa e o principal procedimento foi a análise do relatório de trabalho produzido pelo grupo. Da análise, foi possível perceber, pelo menos, duas maneiras diferentes pelas quais o grupo interpretou o que significa ser crítico: a primeira sinaliza uma inserção crítica dos educandos em sua realidade e, a segunda, que se apoiou em certezas matemáticas para chegar às conclusões do projeto.

5 - Autores: ESTHER Bahr Pessoa; e VALDIR Damázio Júnior, Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de materacia nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um olhar através dos Parâmetros Curriculares Nacionais 2013.
Resumo: O presente artigo pretende debater o potencial do uso das ideias apresentadas pela Educação Matemática Crítica aliadas ao conceito de materacia visando um ensino de Matemática voltado para a atuação cidadã nas séries iniciais do Ensino Fundamental.
Tomaremos como base os objetivos apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de matemática nos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Discutiremos o conceito de materacia, partindo da ideia de letramento, buscando ampliar essa discussão para o contexto da Educação Matemática. Tal discussão se faz importante uma vez que a matemática está presente em muitas nuances da realidade, frequentemente formatando a sociedade. A Educação Matemática Crítica propõe um ensino de matemática que objetiva desenvolver a competência democrática, através do desenvolvimento dos conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo, podendo assim contribuir para que os objetivos propostos pelos PCNs para os dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental sejam alcançados.

6 - Autoras: - SIMONE Regina dos Reis e CARMEN Vieira Mathia PROFMAT - *Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas* – UFSM 2015, Materiais Pedagógicos na Perspectiva da Educação Matemática Crítica.
Resumo: Pesquisas em educação matemática crítica (EMC) têm apontado à necessidade urgente de produção de materiais didáticos que enfatizem situações reais vivenciadas pelos alunos para que a aprendizagem se torne mais significativa. Tendo em vista contribuir com as pesquisas em EMC, neste artigo são apresentadas sugestões para o ensino da Matemática Financeira (MF) por meio de uma proposta pedagógica orientada pela EMC. É fundamental que, ao aplicar a presente proposta, o professor objetive conscientizar os alunos para a importância dos conceitos de MF como instrumento e para compreender a realidade em que se inserem. Os conteúdos propostos, nas atividades pedagógicas, contemplam o estudo sobre conceitos de taxas, aplicações e empréstimos, para que os alunos aprendam como a MF é utilizada socialmente. Ainda, sugere-se a resolução dos exemplos propostos, por meio de planilhas eletrônicas, por estas oferecerem mais recursos do que uma calculadora.

7 - Autores: GLAUCIA Cristhiane Biaca Toná e Silva e AMAURI Jersi Ceolim, 2016; *Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica*: Melhorias na Quadra de Esportes.
Resumo: O presente artigo discorre sobre a implementação do Projeto de Intervenção Pedagógica realizado com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Parque Jabuticabeira em Umuarama – Paraná, que por meio da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica, possibilitou uma investigação com intuito de analisar possíveis melhorias que a escola necessita, priorizando o espaço da quadra de esportes, a fim de torná-la mais favorável à prática de atividades físicas. No decorrer desse trabalho desenvolveu-se atividades de pesquisas com profissionais ligados à área da construção civil e levantamentos de custos necessários para a realização de uma reforma no piso da quadra. Foram construídas maquetes como alternativa de planejamento para a reforma da quadra e realizou-se um mutirão para uma pequena reforma no piso, a fim de amenizar a situação na qual se encontrava, que oferecia até perigos físicos aos alunos. No desenvolvimento do projeto, além de conceitos matemáticos para encontrar soluções em situações que envolveram escalas, porcentagem, regra de três, razão, proporção, entre outras que surgiram, foram utilizados temas não matemáticos por tratar-se de uma concepção voltada para a realidade do aluno, pontuando questões relacionadas com as necessidades da escola. As escolhas e decisões foram tomadas em conjunto, proporcionando subsídios aos alunos para enfrentar e resolver situações cotidianas, oportunizando a investigação, tornando a aprendizagem de matemática relevante em seu contexto.

8 - Autores: JONISARIO Littig, ADRIANA Tech e LEONARDO, *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 1-19, 2018; A Educação Matemática Crítica nas Aulas de Matemática em Escolas Estaduais do Espírito Santo: uma reflexão a partir das narrativas dos professores.
Resumo: Este artigo, de cunho qualitativo, busca analisar as aulas de matemática de professores a partir de suas narrativas, identificando elementos que caracterizam a educação matemática crítica. Os sujeitos foram seis professores da rede estadual de ensino do estado do Espírito Santo. Os dados foram coletados por meio de entrevista gravada com esses profissionais. A análise se baseia nas características da educação matemática crítica, apontadas por Skovsmose (2001; 2010; 2013) e Araújo (2009). Os resultados revelam que, apesar dos relatos apresentarem indícios da educação matemática crítica, pela preocupação dos profissionais em propor aulas diversificadas, as práticas dos professores não são desenvolvidas a partir desses princípios. Consideramos que essa ausência limita a compreensão das relações da matemática com os problemas sociais e a formação crítica do aluno.

9 - Autores: JUSTIANI Hollas e LUCI T. M. dos Santos Bernardi Educação Estatística a Crítica: Um Olhar Sobre os Processos Educativos 2018.
Resumo: A tarefa discente para uma Educação Estatística Crítica vai muito além de seguir fórmulas e conceitos estudados ao longo da formação e repetidos ano a ano para os estudantes, ao contrário, o processo de ensino-aprendizagem pode formar um sujeito autônomo, curioso e indagador que produz suas hipóteses, constrói argumentos, sabe expor sua opinião, desenvolve conclusões e aprende que errar faz parte do processo. Neste trabalho colocamos em tela três competências: literacia estatística,

pensamento estatístico e raciocínio estatístico, sob a luz da perspectiva crítica. O estudo nos permite inferir que é possível desenvolver uma Educação Estatística Crítica no ensino médio e indicamos alguns elementos potencializadores para as competências com um olhar voltado para os processos educativos, elencando conceitos como pesquisa geradora, tema gerador, matemática, cenários para investigação, trabalho em equipe, leitura de mundo, diálogo, educação como ato político, consciência crítica e educação libertadora.

10 - Autores: ELENILTON Vieira Godoy e CECY Leite Alves Carreta, Revista de Educação Matemática, São Paulo, v. 15, n. 18, p. 117-135, jan. /abr. 2018. Uma publicação da Regional São Paulo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática; O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a Educação Matemática Crítica: Uma Análise dos Conceitos de Função e Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus no Livro Didático mais adotado no PNDL, 2015.
Resumo: O presente texto é um recorte da dissertação de mestrado de um dos autores e tem como objetivos: 1) verificar se as exigências presentes no Edital 2013 do Programa Nacional do Livro Didático contemplam ideias da tendência teórica Educação Matemática Crítica; 2) apresentar os resultados da análise feita com o livro do 1º ano do Ensino Médio mais vendido no último PNLD. A análise realizada pretendeu investigar se a abordagem dos assuntos relacionados aos conceitos de Função e das Funções Polinomiais do primeiro e do segundo graus, ao longo do primeiro ano, do Ensino Médio, de alguma maneira, contemplam a tendência teórica Educação Matemática Crítica. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa. Teoricamente, se apoiará, principalmente, na Educação Matemática Crítica (EMC), todavia, pesquisas e estudos relacionados ao livro didático de Matemática também auxiliarão o estudo. A análise do Edital de 2013 do PNLD indicou que há elementos associados às ideias defendidas pela EMC legitimando, de certa maneira, o nosso estudo com os livros didáticos de Matemática. A análise dos conceitos de Função e de Funções Polinomiais do 1º e 2º graus, do livro do 1º ano do Ensino Médio, da coleção mais adotada pelas escolas participantes do PNLD 2015 apresentou insatisfatoriamente propostas que contribuam para o desenvolvimento da Educação Matemática Crítica.

11 - Autores: LUZIA Voltolini e CARMEN Teresa Kaiber, Projeto aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) decorrente do Parecer Consubstanciado nº 1.175.033 de 06/08/2015, com o número CAAE 38483414.1.0000.5349; Zetetiké, Campinas, SP, v.26, n.1, jan./abr. 2018, p.113-132, Saber Cultural e a Matemática Escolar: Encontro Necessário na Educação Escolar Indígena.
Resumo: Apresentam-se, nesse artigo, resultados e análises de uma investigação que está sendo produzida na Terra Indígena Serra da Moça, no Estado de Roraima, Brasil e tem por objetivo investigar possibilidades de constituição de um currículo de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, o qual considere necessidades, interesses e aspectos da cultura dos povos indígenas. Metodologicamente a investigação se insere em uma perspectiva qualitativa seguindo os pressupostos da pesquisa etnográfica, envolvendo quarenta e seis membros das comunidades da Terra Indígena Serra da Moça. Destacam-se, aqui, dados e análises referentes à percepção dos participantes sobre os conhecimentos matemáticos tradicionais que circulam na comunidade e as demandas por novos conhecimentos, necessários no contexto contemporâneo.

Resultados apontam que os saberes e práticas tradicionais são úteis e atendem às necessidades do cotidiano da comunidade, entretanto há a necessidade de que novos conhecimentos sejam adquiridos.

12 - Autoras: GISLAINE M. Ferreira Matos, MIRLEY Luciene dos Santos e KARLY Barbosa Alvarenga, 2018 Experiências em Ensino de Ciências v. 13, n.1; Modelagem Matemática em Atividades Sobre a Temática do Lixo: Relações com a Aprendizagem Significativa Crítica.
Resumo: Muitas são as maneiras de conduzir um ensino e uma aprendizagem de matemática por meio de abordagens que envolvam o contexto sócio cultural dos estudantes. A proposta da Educação Matemática Crítica via Modelagem Matemática tem mostrado resultados relevantes nesse sentido e pode oportunizar a Aprendizagem Significativa Crítica. Dessa forma, esse trabalho tem como objetivo principal apresentar resultados de um estudo realizado a partir registros dos estudantes do Ensino Médio que participaram de uma atividade prática de cunho socioambiental. Tal atividade modelou uma problemática relacionada ao lixo produzido em uma escola pública do estado de Goiás. Esse contexto propiciou analisar se a Modelagem Matemática, em sua perspectiva crítica, pode atender aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica. A atividade problematizada por meio de uma situação próxima da realidade dos alunos e conduzida segundo a proposta da Modelagem Matemática possibilitou a participação crítica dos alunos com reflexões sobre as ações para resolver o problema analisado. Foi possível gerar um ambiente de diálogo, de aprendizagem por meio de perguntas e investigações, de diversidade nas formas e nos materiais em que se pode aprender matemática e, portanto, observou-se as aproximações da Modelagem aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica.

13 - Autores: MARCOS Vinicius Milan Maciel e MARCUS Vinicius de Azevedo Basso, Trabalhos X EGEM X Encontro Gaúcho de Educação Matemática Comunicação Científica 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS, A Produção de Materiais de Aprendizagem Segundo Fundamentos Filosóficos da Educação Matemática Crítica; GT 06 – Formação de Professores de Matemática: Práticas, Saberes e Desenvolvimento Profissional.
Resumo: Este trabalho discute as potencialidades encontradas na utilização de problemas propostos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas na produção de materiais de apoio didático-metodológico para aulas de Matemática na Educação Básica. Entretanto, apesar do caráter não-convencional e desafiador desses problemas, é necessário que sua utilização seja aprimorada, havendo a necessidade de se agregar intencionalidade às questões utilizadas. A partir de alguns dos fundamentos filosóficos da Educação Matemática Crítica, de Ole Skovsmose, é possível assumir a premissa de que projetos de Educação Matemática devem ser desenvolvidos a partir do reconhecimento de “conheceres” básicos (“matemático”, “tecnológico” e “reflexivo”), considerados essenciais ao desenvolvimento de uma “competência democrática” que, segundo o autor, poderá levar o aluno ao exercício de uma “cidadania crítica”. Nesse sentido, um empreendimento de Educação Matemática torna-se fundamental ao estabelecimento de uma sociedade onde se possam estabelecer as condições, formais e não formais, de uma Democracia.

14 - Autor: I Semana de Educação Matemática da UESB Discutindo o trabalho docente aliado às novas tendências educacionais. Contribuições da Matemática na formação de cidadãos críticos IRENE Mauricio Cazorla Dr. Educação Matemática Profa. Titular da UESC icazorla@uol.com.br; Qual é o Papel da Matemática na Formação de Cidadãos Críticos?
Resumo: não há

15 - Autoras: MARIA Janete Bastos das Neves, PATRÍCIA Feitosa Santos e Renato Borges Guerra, X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010 Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica, educação matemática crítica: um olhar reflexivo acerca do seu caráter emancipatório e motivacional.
Resumo: Neste artigo discutimos o papel da educação matemática crítica na construção/reconstrução da percepção do caráter emancipatório do cidadão. Trazemos reflexões sobre Educação Matemática, Educação Matemática Crítica e sua importância no processo de ensino e aprendizagem constitutivos do sujeito crítico e atuante na sociedade assim como as limitações do processo.

16- Autor: LUCAS Nunes Ogliari , X Anped Sul Seminários de Pesquisa em Educação da Região Sul 2012, Educação Matemática Crítica e Subcidadania.
Resumo: O presente artigo discute a possibilidade de compreender a Educação Matemática como agente na constituição de cidadãos de direito no âmbito da integração no mercado de trabalho e da tomada de decisões na sociedade. Para desenvolver tal compreensão foi estabelecido um diálogo entre Educação Matemática, a partir do livro Educação Matemática Crítica: a questão da democracia, de Ole Skovsmose, e os estudos desenvolvidos por Jessé Souza acerca dos aspectos socioculturais da cidadania, presente no texto (Não) reconhecimento e subcidadania, ou o que é "ser gente"?. A discussão está problematizada em um mesmo campo teórico, uma vez que os autores que sustentam as conjecturas estabelecidas fundamentam-se na teoria crítica. No desenvolvimento do texto a Educação Matemática é tomada com objeto de discussão no que tange, principalmente, à sua finalidade e seu reflexo na formação de sujeitos de direito na sociedade, tendo como tema problematizador a questão do reconhecimento social. O artigo traz, também, alguns excertos de uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio acerca de suas perspectivas em relação à matemática para o trabalho e seu futuro com cidadãos.
17 - Autores: RICARDO Fajardo, SILVIA Barcelos Machado, VII CIBEM 2013, Tema (IV.2): Formação e atualização de professores Modalidade: MC Nível: Formação e atualização docente Matemática Crítica: O Por Que de Algumas Definições e Regras.
Resumo: Este artigo propõe uma ênfase na discussão sobre possíveis abordagens diferenciadas para trabalhar certas definições e regras em sala de aula, do ponto de vista da Matemática Crítica. Inicialmente, apresenta-se um referencial teórico, assim como o objetivo do minicurso. Após, apresenta-se a metodologia, dívida em dois momentos. No primeiro momento socializa-se ideias, com o grupo, sobre as propostas da Educação Matemática do ponto de vista crítico. No segundo momento, trabalha-se o desenvolvimento conceitual de tais regras, desde as regras de sinais, passando pela potenciação, e chegando na divisão de frações. A ideia essencial é trabalhar com um

convencimento informal (intuitivo) tal como a busca de padrão numérico, seguido da aplicação do Princípio de Hankel e demonstrações a partir das propriedades (axiomas) básicos. Após, apresenta-se algumas ideias de como preparar o cenário para um investigação que levará para uma discussão na sala de aula, sobre a razão da definição (ou regra).

18 – Autores: CHRISTIANE de Morais Maia, TIAGO Bissi e Ligia Arantes, Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016, Comunicação Científica, XII Encontro Nacional de Educação Matemática ISSN 2178-034X, Educação Matemática Crítica, Interdisciplinaridade e História da Matemática: Entrelaços Possíveis Para a Educação Matemática.
Resumo: Este artigo propõe uma discussão de cunho teórico e pedagógico, articulando Educação Matemática Crítica e uma perspectiva interdisciplinar ancorada no binômio História e Matemática. Consideramos a Educação Matemática Crítica como importante instrumento para a construção da cidadania e constituição de sujeitos ativos. Em consonância a essa vertente da Educação Matemática Crítica, apresentamos a abordagem sociocultural para o ensino como elemento unificador de variados aspectos da Matemática, perpassado pela História como campo de construção de uma perspectiva mais crítica da ciência, tendo a interdisciplinaridade como estratégia pedagógica.

19 - Autora: VANESSA Franco Neto, Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016, Comunicação Científica, XII Encontro Nacional de Educação Matemática ISSN 2178-034X Educação Matemática Crítica e Educação do Campo: Reflexões.
Resumo: Nesse artigo refletimos acerca das potencialidades e possibilidades de articulação e usos dos estudos de Educação Matemática Crítica no contexto da Educação do Campo, tanto no âmbito da formação de professores quanto na educação básica.

20 - Autoras: MILENE Nagila Mesquita e AMAURI Jersi Ceolim, III Encontro Paranaense de Educação Matemática 2007. Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática Crítica: Abordagens na Educação Básica.
Resumo: Objetiva-se, neste trabalho, investigar concepções atribuídas à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica, em artigos científicos e em relatos de experiência da VIII e IX Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), em livros de autores brasileiros com abordagens em Modelagem Matemática (MM) selecionados no Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino1 (CREMM 2016) e, como a mesma tem sido abordada na Educação Básica. Para isso, o embasamento adotado foi o da Educação Matemática Crítica (EMC) concebida por Skovsmose. Para o desenvolvimento metodológico, referenciou-se pelos procedimentos sugeridos por Moraes (2003) para uma análise textual discursiva de cunho qualitativo. A análise dos dados possibilitou a construção de nove unidades de significado. Dessas unidades emergiram três categorias, as quais, evidenciam que as concepções, no âmbito da Educação Básica, possuem convergência com aspectos da perspectiva da EMC, no que diz respeito à democracia na sala de aula, ao desenvolvimento de competência crítica e autonomia, por parte dos estudantes, a partir do conhecimento reflexivo - desenvolvido por meio das reflexões possibilitadas pelo ambiente de problematização, investigação e reflexão proporcionado pelas atividades de MM.

Considerações finais

O presente artigo tem a finalidade de mostrar as pesquisas em (revistas e eventos) desenvolvidas com o tema educação matemática crítica, produzidas em programas de pós-graduação no Brasil, e relatar as principais contribuições para o ensino da educação matemática que venham dar ênfase ao desenvolvimento de novas práticas de ensino para os professores que trabalham esta disciplina, e na descoberta de novos conhecimentos de pessoas que utilizam este tema como pesquisa. As contribuições estão apresentadas em tópicos: apresentação das pesquisas em relação às áreas de conhecimento, organização das pesquisas quanto ao foco de investigação e organização das pesquisas quanto a categorias/temas. Para isso, realizou-se as buscas em revistas e eventos de vários autores, para a construção desse mapeamento. O mapeamento de outros trabalhos relacionados ao tema foi o principal foco desta pesquisa, tais mapeamentos ajudaram no desenvolvimento do trabalho e na definição do objetivo de se explicar os processos de contribuições para a construção deste artigo, pois a fazer o mapeamento, foram escolhidos 20 trabalhos realizados com a temática educação matemática crítica. Deles,12 são revistas e 08 são eventos. Observa-se que somente o texto 14 não possui resumo, por isso fica inviável citar mais diretamente.

Apresentação das pesquisas em relação as áreas de conhecimento

Todos os textos a seguir possuem relação com o tema educação matemática crítica, são textos de revistas cientificas e eventos promovidos por profissionais da área da matemática, esses podem ser encontrados em sites na internet ou nos livros de autores como Skovsmose que é a maior referência deste trabalho, os textos seguem abaixo e suas fundamentações teóricas que estão distribuídos de seguinte maneira: no item (i) estão as revistas Carlos/Guataçara/Nilcéia /Luiz (2012); Elenilton/Cecy (2018); Esther/Valdir (2013); Gislaine/Mirley/Karly (2018); Glaucia /Silva/Amauri (2016); Itamar/Aline (2011); Jonisario/Adriana/Leonardo (2018); Jussara

(2009); Jussara (2012); Justiani/Luci (2018); Luzia/Carmen (2018) e Simone/Carmen (2015); e no item (ii) estão os eventos, aqui observa-se que o texto 14 não possui resumo, Christiane/Tiago/Ligia (2016); Irene (2009); Lucas (2012); Marcos (2009); Maria/Patrícia/Renato (2010); Milene/Amauri (2017); Ricardo/Silvia (2013) e Vanessa (2016).

Organização das pesquisas quanto ao foco de investigação

a) Emancipação e cidadania na matemática crítica.

Esse trabalho de Jussara (2009); diz que os estudantes devem discutir todos os assuntos da sociedade e que se torne um ser crítico, por meio do conhecimento matemático. Destacando o diálogo e a democracia na formação política dos estudantes, a proximidade dessa abordagem à etnomatemática, o questionamento ao absolutismo da matemática, o questionamento a modelos matemáticos como formatadores da sociedade, a participação crítica dos estudantes na sociedade, discutindo questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a matemática serve como suporte tecnológico. Nesse sentido, preocupo-me com uma educação matemática dos estudantes que não vise apenas instrumentá-los matematicamente, mas que também proporcione sua atuação crítica na sociedade, por meio desse conhecimento matemático, o que é uma forma de proporcionar sua emancipação como cidadãos.

b) Processo de ensino aprendizagem na educação matemática na sala de aula

Os resumos dos textos 2, 5, 9, 12, 15 e 17 estão relacionado a processo tanto de ensino como de aprendizagem dos alunos e professores na sala de aula, os mesmos foram produzidos por Itamar/Aline (2011); artigo poderá contribuir com as reflexões sobre a importância da educação matemática na formação do professor que lhe permita a percepção de que além do conhecimento disciplinar (conteúdos), são necessários os conhecimentos pedagógicos, curriculares e experienciais para enfrentar problemas que se relacionam com o ensino de matemática, Esther/Valdir (2013); A Educação Matemática Crítica propõe um ensino de matemática que objetiva desenvolver a competência democrática, através do desenvolvimento dos conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo, podendo assim contribuir para que os objetivos propostos pelos PCNs para os dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental sejam alcançados. Justiani/Luci (2018); O estudo nos permite inferir que é possível desenvolver uma Educação Estatística Crítica no ensino médio e indicamos alguns elementos potencializadores para as competências com um olhar voltado para os processos educativos, elencando conceitos como pesquisa geradora, tema gerador, matemática, cenários para investigação, trabalho em equipe, leitura de mundo, diálogo, educação como ato político, consciência crítica e educação libertadora. Gislaine/Mirley/Karly (2018); A atividade problematizada por meio de uma situação próxima da realidade dos alunos e conduzida segundo a proposta da Modelagem Matemática possibilitou a participação crítica dos alunos com reflexões sobre as ações para resolver o problema analisado. Foi possível gerar um ambiente de diálogo, de aprendizagem por meio de perguntas e investigações, de diversidade nas formas e nos materiais em que se pode aprender matemática e, portanto, observou-se as aproximações da Modelagem aos princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa Crítica. Maria/Patrícia/Renato (2010); Trazemos reflexões sobre Educação Matemática, Educação Matemática Crítica e sua importância no processo de ensino e aprendizagem constitutivos do sujeito crítico e atuante na sociedade assim como as limitações do processo. Ricardo/Silvia (2013); A ideia essencial é trabalhar com um convencimento informal (intuitivo) tal como a busca de padrão numérico, seguido da aplicação do Princípio de Hankel e demonstrações a partir das propriedades (axiomas) básicos. Após, apresenta-se algumas ideias de como preparar o cenário para um investigação que levará para uma discussão na sala de aula, sobre a razão da definição (ou regra).

c) Construção de atividades e projetos de pesquisa da educação matemática

Os resumos dos textos 3, 4, 6, 7, 8 e 20 são trabalhos que foram construídos a través de investigação de problemáticas nas escolas ou instituições e atividades desenvolvidas para o ensino da matemática sob a reflexão da matemática crítica, sendo que os produtores foram Irene (2009); para a coleta de dados, os trabalhos foram realizados de modo que os acadêmicos produzissem uma aula para ser aplicada a alunos do Ensino Médio. Tais produções constituíram uma quantidade substancial de material para a análise. Os resultados mostraram que a capacidade de produção dos acadêmicos é boa, pois propuseram situações problematizadoras bastante interessantes em diversos campos, principalmente, o social. Jussara (2012); A abordagem metodológica foi qualitativa e o principal procedimento foi a análise do relatório de trabalho produzido pelo grupo. Da análise, foi possível perceber, pelo menos, duas maneiras diferentes pelas quais o grupo interpretou o que significa *ser crítico*: a primeira sinaliza uma inserção crítica dos educandos em sua realidade e, a segunda, que se apoiou em certezas matemáticas para chegar às conclusões do projeto. Simone/Carmen (2015); os conteúdos propostos, nas atividades pedagógicas, contemplam o estudo sobre conceitos de taxas, aplicações e empréstimos, para que os alunos aprendam como a MF é utilizada socialmente. Ainda, sugere-se a resolução dos exemplos propostos, por meio de planilhas eletrônicas, por estas oferecerem mais recursos do que uma calculadora. Glaucia /Silva/Amauri (2016); no desenvolvimento do projeto, além de conceitos matemáticos para encontrar soluções em situações que envolveram escalas, porcentagem, regra de três, razão, proporção, entre outras que surgiram, foram utilizados temas não matemáticos por tratar-se de uma concepção voltada para a realidade do aluno, pontuando questões relacionadas com as necessidades da escola. As escolhas e decisões foram tomadas em conjunto, proporcionando subsídios aos alunos para enfrentar e resolver situações cotidianas, oportunizando a investigação, tornando a aprendizagem de matemática relevante em seu contexto. Jonisário/Adriana/Leonardo (2018); os resultados revelam que, apesar dos relatos apresentarem indícios da educação matemática crítica, pela preocupação dos profissionais em propor aulas diversificadas, as práticas dos professores não são desenvolvidas a partir desses princípios. Consideramos que essa ausência limita a compreensão das relações da matemática com os problemas sociais e a formação crítica do aluno. Milene/Amauri (2017);

A análise dos dados possibilitou a construção de nove unidades de significado. Dessas unidades emergiram três categorias, as quais, evidenciam que as concepções, no âmbito da Educação Básica, possuem convergência com aspectos da perspectiva da EMC, no que diz respeito à democracia na sala de aula, ao desenvolvimento de competência crítica e autonomia, por parte dos estudantes, a partir do conhecimento reflexivo - desenvolvido por meio das reflexões possibilitadas pelo ambiente de problematização, investigação e reflexão proporcionado pelas atividades de MM.

d) A matemática crítica e a cidadania

O trabalho de Lucas (2012); A discussão está problematizada em um mesmo campo teórico, uma vez que os autores que sustentam as conjecturas estabelecidas fundamentam-se na *teoria crítica*. No desenvolvimento do texto a Educação Matemática é tomada com objeto de discussão no que tange, principalmente, à sua finalidade e seu reflexo na formação de sujeitos de direito na sociedade, tendo como tema problematizador a questão do *reconhecimento social*. O artigo traz, também, alguns excertos de uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio acerca de suas perspectivas em relação à matemática para o trabalho e seu futuro com cidadãos.

e) Interdisciplinalidade na educação matemática

Para Christiane/Tiago/Ligia (2016), consideramos a Educação Matemática Crítica como importante instrumento para a construção da cidadania e constituição de sujeitos ativos. Em consonância a essa vertente da Educação Matemática Crítica, apresentamos a abordagem sociocultural para o ensino como elemento unificador de variados aspectos da Matemática, perpassado pela História como campo de construção de uma perspectiva mais crítica da ciência, tendo a interdisciplinaridade como estratégia pedagógica.

f) Formação de professor da educação no campo na educação matemática

Para Vanessa (2016); Potencialidades e possibilidades de articulação e usos dos estudos de Educação Matemática Crítica no contexto da Educação do Campo, tanto no âmbito da formação de professores quanto na educação básica.

Organização das pesquisas quanto a categorias/temas

a) Educação matemática no processo de ensino aprendizagem de alunos

Nesta categoria estão dos trabalhos de Itamar/Aline (2011); Esther/Valdir (2013); Justiani/Luci (2018); Gislaine/Mirley/Karly (2018); Maria/Patrícia/Renato (2010); Ricardo/Silvia (2013), todos falam sobre a importância de trabalhar conteúdos matemáticos, estratégias de ensino aprendizagem.

b) Construção de atividades e projetos na educação matemática crítica

Neste tópico estão os trabalhos de Irene (2009); Jussara (2012); Simone/Carmen (2015); Simone/Carmen (2015); Glaucia /Silva/ Amauri (2016); Jonisario/Adriana/Leonardo (2018); Milene/ Amauri (2017); esses trabalhos foram construídos através de pesquisas de analises de dados ou proposta de atividades que visaram para investigações e indagações para resoluções da educação matemática.

Observações: nos outros trabalhos cada um está se especificando nos tópicos anteriores logo somente estes mostraram relações entre si.

Percebemos que, quanto a categorias/temas, grande parte das pesquisas foram desenvolvidas levando em consideração a "comunicação e a aprendizagem de alunos", porém identificamos três pesquisas realizadas na categoria de "comunicação e professores" e quatro cujo alvo é a formação de professores (inicial e continuada).

Referências

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 26, n. 43, p. 839-859, ago. 2012.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais* - Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática- Ministério da Educação e do Des-porto - Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC, 1998.

FAJARDO, Ricardo. VII CIBEM 2013, Tema (IV.2): Formação e atualização de professores Modalidade: MC Nível: Formação e atualização docente Matemática Crítica: O Por Que de Algumas Definições e Regras.

FRANCO NETO, Vanessa. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016, Comunicação Científica, XII Encontro Nacional de Educação Matemática ISSN 2178-034X Educação Matemática Crítica e Educação do Campo: Reflexões.

GADOTTI, Moacir. *Concepção Dialética da Educação* - um Estudo Introdutório. 6. ed. São Paulo: Cortez, 1988.

GODOY, Elenilton Vieira; ALVES, Cecy Leite. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a Educação Matemática Crítica: Uma Análise dos Conceitos de Função e Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus no livro didático mais adotado no PNDL, 2015. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 15, n. 18, p. 117-135, jan. /abr. 2018.

HOLLAS, Justiani. Educação Estatística a Crítica: Um Olhar Sobre os Processos Educativos.

LITTIG, Jonisario. A Educação Matemática Crítica nas Aulas de Matemática em Escolas Estaduais do Espírito Santo: Uma reflexão a partir das narrativas dos professores. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 1-19, 2018.

MACIEL, Marcos Vinicius Milan. Trabalhos X EGEM X Encontro Gaúcho de Educação Matemática Comunicação Científica 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS, A Produção de Materiais de Aprendizagem Segundo Fundamentos Filosóficos da Educação Matemática Crítica; GT 06 – Formação de Professores de Matemática: Práticas, Saberes e Desenvolvimento Profissional.

MAIA, Christiane de Morais. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016. Comunicação Científica, XII Encontro Nacional de Educação Matemática ISSN 2178-034X, Educação Matemática Crítica, Interdisciplinaridade e História da Matemática: Entrelaços Possíveis Para a Educação Matemática.

MATOS, Gislaine M. Ferreira. Modelagem Matemática em Atividades Sobre a Temática do Lixo: Relações com a Aprendizagem Significativa Crítica. *Experiências em Ensino de Ciências*, v. 13, n. 1, 2018.

MATOS, João Filipe. Matemática, educação e desenvolvimento social: questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática. 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/ docentes/jfmatos/comunicacoes/jfm_seminario_pa.pdf. Acesso em: 8 ago. 2007.

MESQUITA, Milene Nagila. III Encontro Paranaense de Educação Matemática 2007. Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática Crítica: Abordagens na Educação Básica.

NEVES, Maria Janete Bastos das. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de julho de 2010 Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica, educação matemática crítica: um olhar reflexivo acerca do seu caráter emancipatório e motivacional

OGLIARI, Lucas Nunes. X Anped Sul Seminários de Pesquisa em Educação da Região Sul 2012, Educação Matemática Crítica e Subcidadania.

PESSÔA, Esther Bahr. *Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de materacia nas séries iniciais do Ensino Fundamental*: um olhar através dos Parâmetros Curriculares Nacionais. [s.l.], 2013.

REIS, Simone Regina dos; MATHIA, Carmen Vieira. Materiais Pedagógicos na Perspectiva da Educação Matemática Crítica. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 37, edição especial Profmat, 2015, p. 331-341. DOI:10.5902/2179460X14655

SILVA, Glaucia Cristhiane Biaca Toná e. Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática Crítica: Melhorias na Quadra de Esportes.

SKOVSMOSE, Olé. *Educação Matemática crítica*: A questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001 [2006, 2013].

VOLTOLINI, Luzia. Saber Cultural e a Matemática Escolar: Encontro Necessário na Educação Escolar Indígena. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 26, n. 1, p.113-132, jan./abr. 2018.

Confecção de paneiros e interpretações matemática no município de Mocajuba-PA

Suélen Márcia Vieira Franco

Osvaldo dos Santos Barros

Resumo

Este trabalho trata das relações entre a matemática escolar e as práticas culturais, a partir dos relatos de um artesão que confecciona cestarias, para o transporte de mercadorias, na região agrícola de Mocajuba – PA, no baixo Tocantins. Essa prática de artesanato, foi aprendiza e desenvolvida ao longo de muitos anos de experiências. Com o objetivo de relacionarmos as práticas de confecção de cestarias e os conceitos da Geometria, trabalhados em sala de aula, no ensino fundamental, utilizamos os princípios da Etnomatemática, tendo como foco, as propostas de Vergani (2000) para a implantação de uma Educação Etnomatemática.

Palavras-chave

Etnomatemática. Confecções de Paneiros. Ensino de Geometria.

Introdução

O trabalho que apresentamos traz como tema as relações entre matemática e cultura, numa perspectiva da Etnomatemática, como tendência para o ensino da matemática escolar, buscando relações entre as práticas vivenciadas nos espaços culturais e os processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Nossa vivência em escolas do interior do estado do Pará, nos possibilitam olhar as práticas culturais de maneira mais próxima aos conceitos matemáticos, despertando curiosidades, que nos levam a compreender que, de fato, há matemática em tudo que nos rodeia, porém, é necessário compreender os conceitos para que possamos identifica-los nas estruturas de objetos e nas situações problemas que se apresentam em nosso cotidiano.

Para discutirmos essas relações, traçamos como objetivo: identificar elementos geométricos que se fazem presentes no processo de confecção de cestarias, por meio de trançados de palhas e cipós, resultando em produtos utilizados no transporte de produtos agrícolas.

Para o desenvolvimento desse estudo, realizamos entrevistas com um artesão da região de Mocajuba, no baixo Tocantins, registrando suas práticas de confecção de cestarias. A partir dos seus relatos, apresentamos algumas relações entre os trançados e as formas geométricas estudadas no ensino fundamental.

Para darmos suportes às nossas argumentações sobre as relações entre a matemática e as práticas culturais, vamos utilizar os princípios da Etnomatemática, com foco nos apontamentos de Vergani (2000) como propostas para a implantação de uma proposta de Educação Etnomatemática.

Matemáticas: perspectivas cientificas e cultural

Para discutirmos como a pesquisa do tipo etnográfica e a linguagem matemática podem contribuir para a superação dos obstáculos decorrentes da interação entre as práticas cotidianas e a matemática escolar, partiremos das relações entre: conhecimento, educação e cultura, na perspectiva de identificar elementos matemáticos na confecção de cestarias, na região agrícola de Mocajuba.

Posicionamos nosso olhar sobre as relações da matemática escolar e as práticas culturais com o propósito de superar a ideia de que a matemática seja, tão somente, a "ciência dos números" e assim ampliar o conceito de matemática presente na fala de professores e estudantes da educação básica. Não estamos propondo aqui que a matemática se reduza a simples representação numérica ou descrição de formas geométricas, mas acreditamos que é necessário que essa compreensão se amplie, incluindo a percepção da presença de relações matemáticas em nossos espaços de convivência, traduzidos nas formas de interação: a paixão, o amor, o ódio, a saudade, nossos filhos e filhas, amigos, companheiros, cidades, compromissos sociais, morais e condição de vida.

Dessa forma posicionamos teoricamente nosso estudo classificado no ensino-aprendizagem de uma educação (etno)matemática, proposta por Vergani (2000) sob o panorama da valorização do dialogo produzido entre ciência, tradição e superação do ensino disciplinar bancário (FREIRE, 2000), bem como da valorização do(s) sujeito(s).

Sobre educação, cultura e conhecimento

Nas suas relações com a natureza, o homem está em constante mudança. Mudanças essas que são causadas por interferências mutuas, sejam elas por parte do homem ou por fenômenos da natureza. Reconhecer os seus limites e potencialidades garantem a sua sobrevivência e de sua descendência. Nesse processo ele produz bens materiais e conhecimento (estratégias e instrumentos), que serão repassados às futuras gerações. Isso garante o usufruto do que foi produzido/aprendido permitindo que as dificuldades sejam facilmente superadas e adaptadas as mais diversas situações.

A necessidade de transmissão dos conhecimentos que retratam a realidade surgem quando a estrutura cultural se estabelece como hegemônica (BRANDÃO, 1988). As futuras gerações dependem dessa transmissão de conhecimento, e esta é de responsabilidade de todos. A posse e a transmissão desses conhecimentos permitem que as gerações futuras não passem pelas dificuldades, mais que possam vivencias novas experiências. Isso lhes garante melhorias na qualidade de vida, em decorrência do conhecimento adquirido, produzido e transmitido de forma sistemática. Nasce assim, a Educação, que reuni em si os procedimentos de sistematização do aprender, do ensinar, e do aprender a ensinar (BRANDÃO, 1988).

Para Brandão (1988, p. 10-11), educação é,

> [...]uma fração do modo de vida dos grupos sociais que criam e recriam, entre tantas outras invenções de sua cultura, em sua sociedade. Formas de educação que produzem e praticam, para os que produzem, entre os que produzem-e-aprendem, o saber que atravessa os saberes da tribo, os códigos sociais de conduta, as regras do trabalho, os segredos da arte ou da religião, do artesanato ou da religião de qualquer povo precisa para reinventar, todos os dias, a vida do grupo e a cada um dos seus sujeitos, através de trocas sem fim com a natureza e entre os homens, trocas que existem dentro do mundo social onde a própria educação habita, e desde onde ajuda a explicar – às vezes a inculcar – de geração, em geração, as necessidades de existência de sua ordem.

Dessa maneira, podemos compreender que o homem pode ser uno e múltiplo com seus processos educativos organizados conforme cada categoria, aprimorando assim sua diversidade e explorando suas singularidades. “A educação existe onde não há escola e por toda parte pode haver redes de estruturas sociais de transferência de saber” (BRANDÃO,1988, p. 13). A educação, portanto, não é propriedade de uma estrutura exclusiva e única, onde há interação humana e troca de vivencia há educação (escola) está ali presente.

Dentro de um estruturado grupo social tradicional, a transmissão do conhecimento é sempre de responsabilidade dos mais velhos. Isso garante que o grupo manterá a tradição de saberes necessários a perpetuidade de sua cultura, do seu trabalho, e do poder de participação nas decisões coletivas do seu grupo social.

Nesses grupos, os saberes não são repassados de modo a formar o indivíduo como especialista em determinado assunto ou atividade, mais sim a com a finalidade de manutenção da vida, sustento da sua família e perpetuidade de mais gerações do seu social. Por exemplo, desde sua infância a mulher é preparada para ser responsável pela manutenção da família e do lar, esta precisa aprender os afazeres domésticos bem como cuidados para com a sua casa e com os filhos que iram compor seu ambiente familiar, da mesma maneira o homem é ensinado a ter responsabilidade pelo sustento de sua família, bem como protege-la e honrá-la.

Nesse cenário alguns indivíduos se destacam em detrimento do coletivo, este especialista tem um diferencial que é o de: saber e de ensinar. Nasce aí a figura do educador, este a partir de agora será o responsável pela transmissão do conhecimento. Nessa situação nasce também os espaços escolares onde a figura do educador é agora responsável pela educação que antes era de responsabilidade de todos.

A leitura da realidade e a linguagem matemática

O processo de contextualização da matemática escolar ainda é um tema bem presente nas discussões sobre os processos de ensino e aprendizagem, tendo, em muitos casos, as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997).

Sempre se mostra difícil a compreensão da realidade dos alunos, pois para muitos alunos que se encontram inseridos em grupos sociais diversos, da sociedade nacional (urbana), essa realidade está muito aquém do seu contexto. Acreditamos que o aluno aprende com a exploração do meio aos qual está inserido, vivenciando as dificuldades, contradições e desequilíbrios que manifestaram nele a capacidade de resolver situações problemas que se apresentam. Esses mecanismos são muitos uteis na negociação de significados.

O trabalho de investigação etnográfica, nos permite um diálogo entre a compreensão das dinâmicas de sala de aula e da visão da realidade, o que possibilita a elaboração do contexto sociocultural ao qual estão inseridos educadores e educandos.

O uso de uma linguagem comum e abrangente é outra característica dessa construção de significados, o que torna a construção de compreensões da realidade mais democrática. Com efeito, essa construção é catalizadora das potencialidades pedagógicas e das relações culturais, pessoais e interpessoais entre educadores e educandos e destes entre seus pares.

> É nessa perspectiva que visualizamos as relações, dinâmicas e de mutua interferência, entre conhecimento, educação e cultura (figura ao lado), que transforma a sala de aula em um micro-mundo de exercício da negociação de significados, tendo como suporte os saberes adquiridos por educandos e educadores, seja nas tradições culturais e/ou nas ciências, que num estado de cumplicidade compõem novas estratégias de compreensão da realidade e de como nela se pode interferir. (BARROS, 2004, p. 29)

A realidade na qual os alunos estão inseridos, influencia diretamente na auto regulação e nas concepções de mundo que cada grupo/individuo/segmento obedece. Ou seja, o homem se utiliza das ferramentas, utensílios e saberes que estão ao seu alcance. Isso possibilita que ele se torne construtor do seu mundo. Portanto, essa realidade resulta de um conjunto de diversidades.

A linguagem matemática não se distância dessa dinâmica, visto que:

> [...]como produto cultural, a matemática tem sua história. Ela nasceu sob determinados condições econômicas, sociais e culturais e desenvolveu-se em determinadas direções. Em outras palavras, o desenvolvimento da matemática não é linear. (FERREIRA,1997, p. 16-17).

Seguramente não veremos surgir um novo modelo de matemática escolar, que se distancie da matemática clássica, que representa a compreensão da própria sociedade urbana. Ao contrário veremos uma reestruturação do ensino-aprendizagem no qual uma nova simbologia matemática não significa a elaboração de uma nova sintaxe operacional. Porém, agora teremos uma nova atitude com as diferentes maneiras de expressão, um novo rigor cientifico e novos objetivos de aprender e ensinar matemática.

Matemática como um conhecimento para explicar e compreender

No livro "Um horizonte de possíveis: sobre uma educação matemática viva e globalizante", a pensadora e matemática Tereza

Vergani menciona que “não existe, de fato, nenhum corpo teórico coerente que justifique normas e metodologias as quais possamos aderir com confiança e certezas cegas” (VERGANI, 1993, p. 11); pois somos atropelados por uma série de inferências e interferências do meio em que estamos inseridos. “Isso significa que um professor de Matemática não poderá deixar de assumir pessoalmente a validação das articulações pedagógicas pelas quais opta na sua própria pratica de ensino” (VERGANI, 1993, p. 11).

Esses questionamentos nos remetem à função cognitiva, educativa e cientifica da matemática, ao mesmo tempo, nos permite buscar novas articulações conceituais sobre tais questionamentos.

O termo Matemática é resultante da junção de dois vocábulos - tica e matema - que se conectam de modo a significar técnica e forma de se conhecer e explicar. Conforme Mendes (2001), essas ticas de matema correspondem a maneiras de explicar e conhecer fenômenos que ocorrem nos contextos naturais, sociais e culturais, visto que esse conhecimento, admitido como matemática, expressa quantitativamente tais processos cognitivos.

Para alguns estudiosos como Ubiratan D’Ambrósio, a matemática é uma disciplina resultante da estratégia desenvolvida a partir de um contexto natural e cultural ao qual se está inserido. Como base nessa concepção, quanto a estrutura da matemática como disciplina escolar, fizemos uma entrevista com o senhor Raimundo Igreja Brito, conhecido como seu Diquito, que desenvolveu algumas técnicas (ticas) de produção e confecção de cestarias (matemas) no período da década de 1950, quando mudou-se para a região de Tauarézinho, interior do município de Mocajuba, no período de grande desenvolvimento da produção agrícola de plantio do cacau.

Seu Diquito

Escolhemos dialogar com o senhor Raimundo Igreja Brito, conhecido como Diquito, por sua riqueza de saberes adquiridos longe das paredes da sala de aula. O senhor Raimundo nascido da localidade de Furtados, município de Mocajuba adquiriu a profissão de funileiro, ainda na juventude (por volta do ano de 1943).

Foto 1 – Seu Diquito

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Após alguns anos mudou-se para a localidade de Jacarécainha, onde se tornou caseiro de uma propriedade rural, em 1951 casou-se e em 1952 mudou para a localidade de Tauarézinho, onde constituiu família e ainda existem terras de sua família. Raimundo sempre foi um menino muito esperto e aprendeu a tecer os paneiro de tala de buriti ainda criança com a ajuda de seu avô. Ele se aperfeiçoou algumas técnicas de trançado, mas deixou essa atividade de lado durante a juventude.

> **Diquito**: Como foi que eu aprendi? Aprendi com meu avô estava com 6 anos. Aprendi fazer paneiro e abano.eu aprendi e depois o resto eu fui aprendendo com a coragem ia olhando os outros fazerem. E eu fui fazendo também.

Contudo, após constituir família e sem campo para desenvolver sua principal atividades profissional, viu na produção de cestaria uma oportunidade de geração de renda extra, com a venda dos paneiros. O que era informal, passou a ser assumida como profissão, o artesanato de cestaria, diretamente ligada à sua prática como agricultor.

Os paneiros confeccionados eram usados tanto na lavoura, para o transporte de carga, quanto nos afazeres domésticos e na ornamentação. Na profissão de agricultor seu Diquito vivia da venda dos paneiros e dos produtos agrícolas que produzia em seu sítio, tais como: café, cacau, pimenta do reino, arroz, milho, mandioca entre outros.

Atualmente, com a idade de 96 anos, seu Diquito possui 7 filhos, desses 4 ainda são vivos, reside na sede do município Mocajuba, com sua esposa Raimunda Cantão Brito. Antes de sair de seu sítio para morar no centro urbano, dividiu as terras com seus filhos. Faço esses registros, também como memória familiar, visto que sou da 4° geração do núcleo familiar do seu Diquito, sendo a primeira bisneta.

Diálogos sobre a confecção de paneiros

Relatamos aqui, o diálogo desenvolvido com o seu Diquito, quanto ao processo de confecção dos paneiros, utilizados no transporte da produção de cacau, em Mocajuba, no início da década de 1950.

Para desenvolvermos esse diálogo foi necessário fazer visitas frequentes à atual residência, tendo como registros das conversar, gravações de áudio que foram compiladas para dar corpo à esse relato.

Seu Diquito nos relata algumas de suas memorias: como e com quem aprendeu a fazer os paneiros, aprimorando sua técnica conforme a necessidade. Na juventude foi caseiro e também Funileiro. Após seu casamento mudou-se para a localidade de Tauarézinho vindo trabalhar na lavoura, onde retoma seus trabalhos com os paneiros, o que lhe proporcionava uma renda extra. Em alguns “flashs” de memória ele relembra alguns dos objetos e matérias que confeccionou como funileiro. Contou sobre o tamanho dos paneiros de acordo com sua funcionalidade, sendo de 3, 5, 7 “zolhos”, sendo que esses zolhos é que irão compor o fundo do paneiro, sempre em número ímpar, bem como determinar o seu tamanho. Os paneiros eram feitos 6 talas de buruti ou aruanã, esses são os melhores materiais. No auge dos seus 96 anos já não consegue se abaixar para tecer corretamente o fundo do paneiro pois o mesmo precisa ser pisado para tomar a forma desejada.

Foto 2 – Fundo do paneiro

Foto 3 – Seis talas

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Pesquisadora: Mais qual foi o tipo do Paneiro que o senhor aprendeu?

Diquito: aprendi a fazer paneiro de tala de buruti. Depois eu passei a fazer todo tipo de paneiro. Tenho tudo escrito aqui. Olha aqui tá Eu trabalhava de funileiro olha o que era que eu fazia baú, maleta, chuculateira, bule, lata para guardar alimento, lata para botar doce, que naquele tempo não tinha, não vinha essas latas que agora vem que a gente joga até fora essa lata de leite ninho, lata de óleo, de tudo a gente fazia pra vender, poronga, lamparina, cruzeiro que era o coisa pra botar no meio da sala que a gente fazia como não tinha luz elétrica a gente fazia o cruzeiro com 4 lamparinas pra botar assim meio da sala. Farol, farolete, lampião, lanterna, com vidro de aumento. Maquina pra fazer café fazia, concha pra balança, corneta, chocalho aquelas coisas de música né. Reco-reco, Foto 4 – Paneiro reforçado

Foto 5 – Rasa para açaí

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

Mendes afirma que “a Matemática, como qualquer área do conhecimento humano, tem seu desenrolar evolutivo capaz de caracterizá-la como uma ciência que também se desenvolveu a partir da sua própria história. (MENDES, 2001, p. 17). O conhecimento apresentado pelo seu Diquito é neste contexto resultado de um processo histórico de interação do homem com o meio e com o outro homem, que cria uma linguagem, instrumentos e técnicas de interpretação da sua realidade e de superação de situações-problemas vivenciadas dentro dessas interações.

> **Pesquisadora**: Esses paneiros que o senhor fazia o que era que colocava dentro?
>
> **Diquito**: Fazia pra colocar planta, fazia paneiro pra carregar na costa, tudo tipo de paneiro eu fazia, paneiro pra carregar cacau, fazia paire, paneiro fino pra colocar camarão, fazia paneiro enchido (fazia um paneiro depois forrava ele).

A realidade vivenciada pelo senhor Diquito, nos remete a uma nova dinâmica onde o ensino da Matemática dá um salto no sentido de dinamizar as relações da matemática escolar com a realidade ao qual o aluno está inserido. A (re)significação dessas novas estruturas escolares é apontada por Mendes e Fossa (1998) que abordam o uso de jogos, materiais concretos, resolução de problemas, modelagem, uso da História da Matemática, além de recursos computacionais, estudos psicológicos, e da pesquisa etnográfica, a partir do estudo da Etnomatemática

Para tanto, a Etnomatemática é mais que um conjunto de ideias matemáticas culturalmente definidas e se aproxima de uma teoria do conhecimento, uma arte ou uma técnica de explicar e conhecer (FERREIRA, 1997).

> **Pesquisadora**: Agora me conte como se determina qual vai ser o tamanho do paneiro, quantos olhos o paneiro deve ter, tem alguma relação com o que você vai colocar dentro?
> **Diquito**: para começar o paneiro é preciso de 6 talas, pra fazer o primeiro zolho, faz o primeiro aqui, depois um pra cá, um pra cá, e vai fazendo, aí escolhe a quantidade de zolho, até de dois zolhos eu fazia assim pequeno pra pegar ucuuba no rio, que era o meu paneirinho assim.

Foto 6 – Paneirinho

Fonte: Acervo dos autores do trabalho.

A resposta do senhor Diquito nos remete a um contexto que vem se desenrolando desde o início desse estudo: que é a aproximação e compreensão Matemática com nossa ações cotidianas, na busca da superação da dicotomia entre realidade-escola, cotidiano-conteúdo, ou seja uma Matemática para além da sala de aula.

Nesse contexto a Etnomatemática procura situar o pensamento da ciência sobre o solo da experiência humana, onde a inteligência sensível se ergue para trabalhar o mundo. (VERGANI, 2000).

A Etnomatemática inaugura uma proposta alternativa que vai além da multi ou da interdisciplinaridade: abre largamente os horizontes da transdisciplinaridade e assume um novo paradigma holístico caracterizado pelos princípios de (Vergani, 2000, p. 35):

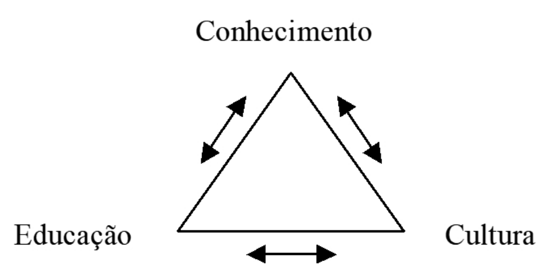
- não dualidade (superação de disjunções redutoras)
- não separatividade (desenvolvimento do espirito de síntese)
- indissociabilidade espaço/energia
- interação dos contrários (flexibilidade, aceitação de incertezas)
- interação do sujeito (participação do ser na sua incerteza)
- relativismo consciencial
- associação do quantificável ao qualificável
- reconhecimento dos valores étnicos
- equilíbrio das funções de dois hemisférios cerebrais
- criatividade como processo psicoemocional e cognitivo
- equilíbrio entre metodologias Leste-Oeste e Norte-Sul
- procura de axiomas comuns entre as disciplinas.

Vergani (2000, p.24) encerra, afirmando que, o potencial que desenvolve faz com que ele tenha vocação para uma aliança fecunda com a pratica escolar, através de:

- uma metodologia culturalmente dinâmica
- um enraizamento na “realidade real”
- uma observação vivificante das práticas comportamentais
- uma ação autenticamente sócio-cognitiva

Partimos então para uma configuração de uma Educação Etnomatemática, que numa perspectiva antropológica nada mais é do que o entrelace a: antropologia, a Educação e a Matemática.

Figura 1



Fonte: Barros (2004).

Dentro de um contexto mais aberto o intercâmbio de áreas do conhecimento (mono, multi, inter, trans, disciplinares) a matemática é incorporada a um conjunto de saberes que consideram, como seus símbolos e suas regras operacionais, muito mais que as estruturas especificas a própria Matemática.

> **Pesquisadora**: Antes de começar a fazer se determina o que vai colocar dentro, pra saber o tamanho do paneiro
>
> **Diquito**: Sim, fazia de 3, de 5, de 7 zolho conforme eu queria usar, sendo que sempre era número ímpar.
>
> **Pesquisadora**: Qual a quantidade de material a ser utilizado?
>
> **Diquito**: Vai depender da quantidade de zolho que o paneiro vai ter, vai uma quantidade de tala pra fazer. Eu fazia de tala de buriti, tala de ararumã, tala de jacitara, conforme o tipo do paneiro que a gente escolhia tinha um material pra fazer. Se fosse paneiro pra carregar na costa, fazia de tala de jacitara, se fosse pra carregar fazia de ararumã, fazia paire pra carregar. E os de envira a gente não usava. Aqui era de tala que a gente fazia pra cá. Tala de buruti e tala de jacitara.

Pouca atenção se tem dado às transformações e conhecimentos que cada indivíduo aprendeu, a fim de torna-la útil no cotidiano em que vivemos. A resposta do senhor Diquito nos mostra, que o valor utilitário é o único que se tem levado em conta, em detrimento dos valores culturais, sociais, estéticos e formativos. Dessa maneira a escola não poderá mais ignorar/desprezar a dependência homem/cultura: pois é nela que o aluno constrói sua dignidade e confiança, pois o valor da sua experiência e do seu processo singular lhes fornece autonomia do saber adquirido além das pareces da sala de aula.

As reflexões sobre as diferentes concepções da realidade, nos possibilita uma discussão sobre a negociação de conhecimentos e significados a partir do dialogo feita na entrevista com o senhor Raimundo Igreja Brito. Vemos as diferenças numa perspectiva Etnomatemática onde as interferência/influências culturais são voltadas a ressignificação dos objetos da matemática escolar, não a distanciando da matemática clássica mais atribuindo-lhe novos significados.

Considerações finais

Nossa proposta de trabalho encontra-se em desenvolvimento e por conseguinte, nossos resultados preliminares apontam elementos que estão em estudo. Preliminarmente, identificamos os elementos que então presentes na confecção de cestarias, relacionando os trançados que formam figuras geométricas de acordo com o número de talas.

Compreendemos que nosso objetivo de relacionar a matemática e as práticas culturais foi cumprido, quando tratamos das memórias de seu Diquito, trazendo um pouco da sua história como agricultor e sua experiência, na confecção de cestarias, tomadas como geração de renda para sua família.

Esperamos dar continuidade a esse estudo, buscando interações com a matemática escolar a partir da elaboração de atividades para a sala de aula.

Referências

BARROS, Osvaldo dos Santos. *Etnoastronomia Tembé-Tenetehara como matriz de abordagem* (*etno*)*matemática no ensino fundamental*; orientação Iran Abreu Mendes – Monografia (Mestrado). Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, 2004.

BARROS, Osvaldo Santos. *Astronomia indígena dos Tembé-Tenetehara*. *In*: MOREY, Bernadete B. (ed.). Introdução à Etnomatemática. Natal, 2004.

BRANDÃO Carlos Rodrigues. *O que é Educação*. 22.ed. São Paulo, Brasiliense, 1988.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: Elo entre as tradições e a modernidade. Col. Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FERREIRA, E. S. *Etnomatemática*: uma proposta metodológica. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1997.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do Oprimido*. 14.ed. São Paulo: Paz e Terra, 2000.

MENDES, I. A.; FOSSA John A (org.). Tendências Atuais na Educação Matemática: Experiências e Perspectivas. *In*: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Natal: EDUFRN, 1998.

MENDES, I. A. *O Uso da História no Ensino da Matemática*: Reflexões Teóricas e Experiências . Belém, EDUEPA, 2001.

VERGANI. Teresa. *Um horizonte de possíveis*: sobre uma Educação Matemática Viva e Globalizante. Lisboa, Universidade Aberta, 1993.

VERGANI. Teresa. *Educação Etnomatemática*: o que é? Lisboa, Pandora, 2000.

Os jogos de tabuleiro como prática pedagógica no ensino da Matemática

Tatiane Portilho Moraes

Osvaldo dos Santos Barros

Resumo

O presente estudo traz como temática o uso da história da matemática e suas implicações históricas quanto ao desenvolvimento do conhecimento matemático. Nosso objetivo centra-se na busca das estruturas didáticas mais adequadas à compreensão dos conhecimentos matemáticos, nos espaços escolares. Para desenvolvermos nossa proposta, utilizados a construção de um jogo de tabuleiro que apresenta cartelas com atividades complementares, tais como a medição de ângulos com o uso de um astrolábio, que será construído com os alunos assim como o tabuleiro do jogo e as peças dos participantes.

Palavras-chave

Ensino da matemática. Jogos no ensino. Jogos de tabuleiro.

Introdução

O ensino de Matemática, apesar dos inúmeros mitos que o rodeia, historicamente é um produto social construído coletivamente pela humanidade, considerando principalmente suprir necessidades cotidianas das civilizações (MOL, 2013, p. 13), esta trajetória acarretou inúmeras mudanças e inovações para o ensino da matemática.

Segundo o Parâmetro Curricular Nacional (BRASIL, 1997) de Matemática do Ensino Fundamental, a Matemática surgida na Antiguidade por necessidades da vida cotidiana, converteu-se em um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas. Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e domínio da natureza.

Por considerar que a matemática se constituía como uma via de acesso para o pensamento científico e tecnológico, a mesma passa a fazer parte de um movimento educacional. Contudo o novo modelo de ensino não deu conta de resolver o problema do distanciamento entre o saber matemático e a real capacidade de apreensão deste saber pelos alunos, as formas de apreender ou ainda o quanto a matemática está envolta no cotidiano do aluno. Neste sentido, o ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática (BRASIL, 1997).

Logo, alguns elementos comuns, como a incorporação da matemática nas práticas pedagógicas e seu papel no cotidiano, almejam superar o abismo entre o saber científico e o ensino da matemática. Assim o ensino passa a ser repensado sobre a formulação de problemas e aplicação de conhecimentos matemáticos, na intenção que os conhecimentos matemáticos na formação escolar básica tenham real significado para os estudantes, ultrapassando a simples colocação da matemática como saber distante das vivências. Dentre as propostas pedagógicas que surgem para suprir esse abismo, enfatizamos o uso dos jogos de tabuleiro como facilitador deste processo (GRANDO, 2000).

Estudos sobre a história da matemática retratam que o ato de contagem foi a primeira ação matemática desenvolvida pelo ser humano (MOL, 2013). Povos da região da mesopotâmia (atual

Iraque) foram os primeiros a aprimorar demais habilidades de forma mais consistente, pois, eram detentores de uma incrível habilidade matemática acessível.

> Os mesopotâmicos usavam como suporte para sua escrita placas de argila, que eram marcadas com estilete e, em seguida, eram cozidas ou secas ao sol para aumentar sua durabilidade (...) muitas delas contêm conteúdo matemático e vieram a funcionar como preciosas fontes para analisar o estágio do conhecimento matemático da civilização mesopotâmica (MOL, 2013, p. 16 e 17).

Uma das técnicas registradas nas tabuletas (placa de argila) se refere a resolução de cálculos envolvendo multiplicação e divisão, raiz quadrada e raiz cúbica e valor posicional dos números. Para tanto, haviam símbolos responsáveis por representar unidades e dezenas, sendo "∨" para unidade e "<" para dezenas, por exemplo, a quantia de 12 animais seria representado da seguinte forma: < ∨ ∨ (MOL, 2013).

Outras civilizações também tiveram marcos na história da matemática e contribuíram para seu desenvolvimento e aprimoramento. Entre 3000 e 2500 a.C. na china surge o primeiro instrumento lúdico para calcular: O ábaco, o qual posteriormente foi aperfeiçoado por outros povos. Apesar de usa origem não ser necessariamente propor um jogo matemático, sua eficácia como proposta pedagógica é objeto de pesquisas e práticas em sala de aula atualmente, assim como outros jogos, por exemplo, os jogos de tabuleiro (MOL, 2013).

Bem como a matemática, os próprios jogos de tabuleiro passaram por diversas mudanças, à medida que entraram em contato com novas civilizações os jogos sofrem adaptações. Apesar destes primeiros não terem nenhuma preocupação com estratégia, já apresentavam sequencias numéricas e raciocínio lógico. É importante frisar que a ação de jogar envolve cenários da realidade, ao longo da história diversos jogos de tabuleiro foram desenvolvidos para refletir a lógica e o raciocínio do grupo social que os desenvolvia (TEIXEIRA; SILVA, 2016)

A lista de jogos de tabuleiro teve seu acréscimo desde que surgiu, hoje há uma gama de possibilidades para seus jogadores. Os mesmos representam uma proposta de entretenimento que utiliza normalmente um tabuleiro e peças que dão o movimento ao jogo, estes podem ser dados, cartas ou fichas. O jogo tem seu fim em um objetivo especifico para se vencer, para tanto os jogadores necessitam seguir regras e instruções, habilidades individuais também são necessárias e podem ser desenvolvidas na prática do jogo, tais como, a memória, o raciocínio e a rapidez na tomada de decisões (KISHIMOTO, 1998).

A função educativa dos jogos, além de versar a ludicidade e divertimento, envolve funções que vão além do entretenimento, envolve aspectos sociais, cognitivos e afetivos do participante, logo, os jogos de tabuleiro se configuram como uma proposta pedagógica para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem. Seu caráter social se situa no estímulo aos alunos para se relacionarem entre si, a afetividade diz respeito as sensações e principalmente sobre ganhar ou perder, ou seja, sobre a perspectiva de que a diversão independe do resultado, como tratamos aqui de uma proposta pedagógica é possível trabalhar a ideia de que ambos participantes ganham, pois estão desenvolvendo habilidades cognitivas, tais como administração, comunicação, concentração, negociação, assim como, habilidades específicas da disciplina, logo, ambos avançam, ambos tem seu mérito de ganho (ARCE, 2004).

> Froebel percebeu por meio desses jogos e brincadeiras, a grande força que os símbolos possuem para a criança. Assim Froebel elegia a brincadeira e os brinquedos como mediadores tanto no processo de apreensão do mundo pela criança, por meio da interiorização, como também no processo de conhecimento de si mesma pela criança (autoconhecimento), por meio da exteriorização (ARCE, 2004, p. 15).

Froebel, bem como outros teóricos da infância, observou que o jogo só é funcional com a estipulação de regras, devendo ser sempre monitorado pelo mediador, atividade como consequência desenvolveria habilidades individuais e psicossociais na criança/adolescente. Contudo não basta apenas deixar os jogos acessíveis aos alunos, é necessário planejamento prévio no intuito de esquematizar objetivos que devem ser cumpridos. É dessa forma que o professor poderá avaliar corretamente a atividade, ou seja, verificar se houve êxito ou identificar possíveis adaptações para melhor o desenvolvimento do ensino-aprendizagem, pois este deve ser a principal finalidade de toda a metodologia (KISHIMOTO, 1998).

Outras questões também se fazem importante, por exemplo, durante as partidas é importante que o educador tome nota do desempenho dos alunos, avaliando-os tanto no aspecto cognitivo quanto ao aspecto atitudinal. Dado este contexto, o ensino de Matemática pode ser mais do que a disciplina *chata* ou *difícil*, é possível instigar o aluno a pensar as possibilidades que este conhecimento possui, pois, bem como as demais ciências, a matemática também está presente em nosso cotidiano e possui sua parcela social (FREITAS e BITTAR, 2004).

Não obstante, a escola através do ensino-aprendizagem deve possibilitar que os alunos sejam capazes de intervir na sua realidade, racionalizando as suas vivências e propondo estratégias diante das questões cotidianas, por exemplo. Nesta magnitude que o ensino possui, a matemática também tem sua parcela de colaboração, ao contrário do pensamento que restringe esta concepção às ciências humanas.

Metodologia da pesquisa

Sobre essas considerações, o presente trabalho discute aspectos relacionados a metodologias no ensino da matemática a partir dos jogos de tabuleiro. Consiste em fundamentar uma análise sobre a influência dos jogos para apreensão de conhecimentos matemáticos em caráter transdisciplinar. Trata-se de uma pesquisa exploratória de caráter qualitativo realizado através da aplicação de jogos de tabuleiros em instituições de ensino. Partimos da hipótese de que os jogos de tabuleiros desenvolvem o espirito crítico e criativo do aluno para seu aprendizado dos conhecimentos matemáticos.

> Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições, seu planejamento é, portanto, bastante flexí-

> vel, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado (GIL, 2002, p.41).

Tendo em vista que os jogos de tabuleiros já são objetos de pesquisa acadêmicas no ensino da matemática, o presente estudo versa estas discussões como novas possiblidades, ou seja, com o aprimoramento da ideia, considerando que os jogos e especificamente, o jogo de tabuleiro, em suas diversas formas, se faz presente enquanto instrumento metodológico em diversas escolas. Dessa forma, a pesquisa exploratória qualitativa se mostra viável para o *devir* deste trabalho.

Com base no cenário apresentado em nossa introdução, emerge a necessidade de se realizar uma pesquisa que demonstre como a Matemática vem sendo ensinada nas escolas Públicas e como os jogos, especificamente os jogos de tabuleiro influenciam nesses dados, sejam por sua presença ou inexistência. Nesse sentido, esta pesquisa consiste em responder a seguinte questão: Como os jogos de tabuleiros podem ser usados no ensino de matemática?

Por objetivos, a monografia possui quatro eixos norteadores que envolvem o objetivo geral, o qual consiste em abordar a importância dos jogos no ensino da matemática, analisando seu papel enquanto didática acessível para a realidade que as escolas apresentam, considerando este como método capaz de prover aos educandos meios para que estes desenvolvam habilidades cognitivas, bem como, a curiosidade e interesse pelo ensino da matemática.

Ao considerar que o conhecimento é resultado de trocas, ou seja, da interação entre sujeito e meio, o jogo passa a ser uma ferramenta importante nos processos de desenvolvimento da aprendizagem. Porém é importante compreender esses processos antes de leva-los para o exercício em sala, logo, a princípio a presente pesquisa parte das questões citadas anteriormente. Reiteramos que a motivação para a pesquisa se se deu pela necessidade de valorizar os conhecimentos matemáticos em sua essência. A importância do estudo consiste na perspectiva de redirecionar o olhar para a Matemática, abordando seus valores enquanto ciência, através de atividades que descontrua a ideia de que esta ciência se refere a cálculos difíceis e chatos que não estão ligados à nossa realidade social.

A matemática, por se apresentar de forma desinteressante para os alunos, em termos de metodologia pedagógica, essa pesquisa se justifica pensando em propostas capazes de otimizar o processo de aprendizagem no ensino da matemática, a partir de jogos de tabuleiro. A técnica aumenta o interesse dos alunos pelo conteúdo das aulas através da ludicidade que propõe, pois estimula, o pensamento e liberdade de expressão dos alunos (KISHIMOTO, 1998).

Pressuposto teórico

Em razão da experiência enquanto docente e leituras acerca do tema, é notável que as escolas públicas, em sua maioria, ainda apresentam a matemática de forma tradicional, o que torna seu conteúdo pouco interessante para os alunos. O conteúdo da matemática lecionado em sala de aula, no ensino fundamental, por exemplo, o que se percebe é que ocorre um baixo rendimento, pois os alunos temem a disciplina, devido ser considerada uma ciência de difícil compreensão. Logo, se preocupam em memorizar o conteúdo para garantir uma boa avaliação na prova, mas pouco compreendem sobre o conteúdo trabalhado, bem como não reconhecem que a matemática faz parte de nosso dia a dia, sejam pelas formas geométricas ou combinação das quatro operações durante afazeres simples, entre outros.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidade de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, aprendizagem apresenta melhor resultado.
>
> (...) o estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para aprendizagem/construção de novos conceitos (BRASIL, 1998, p. 37).

Dessa forma percebemos a necessidade em romper com este sistema de ensino engessado no mecanicismo, onde, ao professor caberá, portanto, pensar em estratégias para tornar esta disciplina algo mais próxima do aluno, da sua realidade, das suas vivências, buscando mostrar que a Matemática é uma ciência mediadora, que auxilia na resolução das suas problemáticas, tornando a disciplina passível de compreensão para os aprendizes, divertida e prazerosa, sem abandonar a responsabilidade em transmitir um saber com a devida veracidade científica.

Diante disso, denota-se a importância de adotar novas técnicas para que o ensino da matemática se torne mais atrativo e mostre a qualidade e importância dessa ciência para os alunos, propondo a estes que resolvam os problemas propostos de forma criativa e descontraída. Assim rompendo com o estigma que rodeia a matemática, ou seja, o ensino tradicional. É importante ressaltar que a matemática se destaca das outras disciplinas porque apresenta uma natureza sequencial, ou seja, não se aprende a multiplicar se não aprendeu a somar, pois, uma etapa que não teve êxito no aprender compromete a etapa seguinte. Dessa forma o aluno precisa aprender bem um conteúdo prévio para compreender o posterior (FREITAS; BITTAR, 2004).

> A matemática faz-se presente na quantificação do real – contagem, medição de grandezas – e no entanto, esse conhecimento vai muito além, criando sistemas abstratos, ideais, que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 1998, p.25).

Em contrapartida sobre estas considerações percebe-se que o ensino da matemática ocorre de maneira mecânica, baseados na resolução de problemas que não induzem aos alunos a desenvolverem sua capacidade de raciocínio matemático, em sua maioria não utiliza ferramentas alternativas que facilitem o processo de ensino aprendizagem.

No entanto, na era dos computadores, do videogame e dos brinquedos eletrônicos, despertar o interesse dos alunos por um simples jogo, com números, charadas ou dicas, sem haver design tecnológico se torna uma tarefa desafiadora para o professor. Por este contexto cabe ao docente planejar sua metodologia e principalmente a dinâmica do tabuleiro em virtude da aula e seus objetivos, dessa forma tornando a atividade proveitosa em seu conteúdo e etapas, permitindo que os alunos usem sua capacidade física, intelectual e cognitiva (KISHIMOTO, 1998).

Uma das competências importantes a serem desenvolvidas no ensino da Matemática refere-se à capacidade de resolver de problemas, conforme enfatiza a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2016). Esse documento relaciona em seus objetivos gerais para Matemática a capacidade de resolução e elaboração de problemas, ressaltando que o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas. Compreende-se que os problemas podem ser propostos de diversas formas, além da tradicional, uma destas se refere aos jogos como alternativa metodológica, pois, neles as situações mudam constantemente, de acordo com o andamento da partida. Dessa forma, a cada nova etapa é necessária uma nova avaliação da situação e uma busca pela estratégia mais adequada.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (BRASIL, 1998, p. 46).

A potencialidade dos jogos como recurso didático é enfatizada pela ludicidade como motivação, onde o estudante é envolvido de forma ativa, desenvolvendo autoconfiança e sai da passividade que normalmente ocorre em aulas tradicionais, em que se prioriza a transmissão do conteúdo. Mesmo o mais simples dos jogos, como por exemplo, os jogos de memória, desenvolvem habilidades e competências que favorecem o processo de aprendizagem (GRANDO, 2000).

> Embora possa ser caracterizado como uma atividade lúdica, o jogo pode também ser utilizado como meio para aprender matemática. O jogo em sala de aula pode ser eficaz para aumentar a concentração e a atividade mental e assim contribuir para o envolvimento das crianças em atividades matemáticas.

> Além disso, o fato de possuir regras próprias, às quais os participantes devem obedecer, gera ordem, pois a desobediência de qualquer regra "estraga o jogo". Da mesma forma, no aprendizado da Matemática, a percepção da existência de regras gerais e de propriedades é de fundamental importância (FREITAS e BITTAR, 2004, p. 37).

Assim, acredita-se que a aprendizagem por meio de jogos poderá acontecer na sala de aula quando bem planejada e mediada pelo professor e cujo objetivo seja, realmente, a aprendizagem efetiva de conteúdos matemáticos. O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, analise e levantamento de hipóteses, busca de suposições e reflexão, tomada de decisões, argumentação e organização, as quais estão estritamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico (FREITAS; BITTAR, 2004).

Os jogos de tabuleiro apresentam superfície específicas que podem ou não fazer uso de formas geométricas, podem requerer apenas sorte ou conhecimento, ou estratégia e memória, porém os jogos tratados nesta pesquisa, são sobretudo jogos matemáticos o que implica a não dependência da sorte e memória. Apesar de ser um objeto de pesquisa frequente em projetos de professores da área de matemática, enquanto reuníamos nosso referencial teórico não encontramos trabalhos que explicitavam a fundamentação dos jogos de tabuleiro em si, em geral, as pesquisas apresentam o jogo e sua dinâmica enquanto exercício, a fundamentação teórica se frisa nos parâmetros dos jogos, em sua ampla definição lúdica pedagógica.

Tendo em vista este impasse, a presente pesquisa segue segundo as questões norteadoras apresentadas em nossa metodologia em pesquisa, dessa forma, trazendo relações mais explicitas entre o conhecimento matemático e o jogo de tabuleiro, elaborando sua fundamentação enquanto conhecimento científico a partir da produção e análise de material, ou seja, a partir da construção do jogo de tabuleiro.

Jogos de tabuleiro

Antes de adentrarmos aos tabuleiros, acredito que seja importante frisar a colaboração que os jogos, em um plano geral, possuem no desenvolvimento humano, para tanto vamos considerar o pensamento de Henri Wallon (1968). O pesquisador pontua que a aprendizagem se inicia antes mesmo de nascermos, isso se considerarmos os espasmos do bebê no ventre de sua mãe, como expressão motora e afetiva, estas são vistas por Wallon como dimensões do desenvolvimento humano, ao nascermos a terceira dimensão, o cognitivo, começa a se expressar.

Logo, nossa jornada de aprendizagem está ligada à processos motores, afetivos e cognitivos. Dessa forma, os jogos se apresentam como uma relevante prática pedagógica para o desenvolvimento humano em sua totalidade. Tendo em vista o quanto contribuem para o processo de ensino e aprendizagem, os jogos possibilitam que algumas disciplinas escolares consideradas difíceis, se tornem mais dinâmicas e interessantes para o aluno (KISHIMOTO, 1998).

A matemática é vista por muitos como uma matéria difícil de aprender, mas existe um *jogo* cientifico de grande importância para estudar os processos de transmissão e apreensão dos conhecimentos matemáticos, considerando-a como um domínio cientifico próprio. Não queremos dizer que a matemática independe de outras ciências, mas frisamos que a mesma possui identidade própria que não se reduz a conhecimentos da psicologia, por exemplo. Para este processo de transmissão e apreensão os jogos são uma alternativa equivalente para trabalhar o desenvolvimento matemático dos alunos, incentivando estes a rever conceitos e perspectivas que não consideram ser importante para seu cotidiano e desenvolvimento de habilidades.

As habilidades desenvolvidas durante o jogo nos levam a considerar que os jogos fazem parte das relações humanas, seu aspecto criativo eleva o exercício de comunicação, respeito entre pares e o convívio saudável com o outro, ou seja, o jogo nos dá a possibilidade de exercitar ações que são e podem se transformar em saberes culturais.

> (...) Encontramos o jogo na cultura, como um elemento dado existente antes da própria cultura, acompanhando-a e marcando-a desde as mais distantes origens até a fase de civilização em que agora nos encontramos. Em toda parte, encontramos presente o jogo, como uma qualidade bem determinada e distinta da vida “comum” (HUIZINGA, 2000, p. 7)

O jogo como fator cultural da vida pressupõe idealização de valores e significados, diante das imagens, causas e consequências que o jogo revela para seus jogadores a partir de sua própria imaginação. Para a criança, principalmente, o jogo viabiliza a alternância entre dois mundos, o real e aquele que engloba suas brincadeiras e sua criatividade, este contraste faz a criança recriar incontáveis vezes sua percepção sobre o que conhece, essa é uma das formas de apreensão e transformação de saberes culturais e nos demonstra uma faceta dos jogos, sobre o qual pouco pensamos, mas que representa nosso desenvolvimento enquanto *Homo Ludens* (HUIZINGA, 2000).

Ao longo de décadas, através de pesquisas relacionadas a diversas áreas, diversos tipos de tabuleiros foram encontrados. Os mesmos advêm de civilizações antigas e diversas, é possível concluir que cada jogo tem sua origem de acordo com a cultural na qual se desenvolveu. Em razão do tempo de descoberta, muitos tabuleiros não foram identificados, ou seja, não se sabe como seus jogadores o chamavam, enquanto que a realidade de outros jogos são inconclusivos, pela falta de peças que não foram encontradas, o que dificulta reproduzir o jogo em sua forma original. Considerando este último pensamento, talvez ainda haja tabuleiros e outros tipos de jogos soterrados e esquecidos na história (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Apesar deste contexto, muitos jogos foram recuperados, a exemplo, temos os jogos *Mancala.*

> O Ouri, o Bao, o Ayòayò ou o Kahala (este último uma invenção moderna de William Champion e comum nos computadores e telemóveis) são alguns dos mais conhecidos desta família. O Ouri (Figura 1) é tradicionalmente jogado na África Ocidental (por exemplo, no Senegal, no Mali ou em Cabo Verde) e em parte das Caraíbas (sendo mais comum nas ilhas de língua inglesa e francesa), por isso pode ser encontrado com outros

> nomes como Wari, Awari, Aware, Awele ou Oware (TEIXEIRA; SILVA, 2016, p. 241).

Pesquisas realizadas em áreas onde os jogos *Mancala* foram encontrados, indicam a existência de uma variedade de tabuleiros, enterrados em rochas, e que podem ter vindo de outros lugares com um nome que não se tem conhecimento, logo sua origem pode ser mais antiga do que se imagina. Dessa forma, é importante frisar a importância das intervenções arqueológicas. Leigos podem supor que a descoberta de jogos não representa tanto para o conhecimento atual. Contudo não são apenas peças antigas de um “passa-tempo” sem importância, pois carregam cultura antiga e contam parte da história de determinado povo (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Desde a forma que possui, às peças auxiliares utilizadas, o tabuleiro revela como se dava o pensamento da civilização que o criou, ou seja, explica como se dava o raciocínio lógico de uma civilização. Alguns tabuleiros representam um grande desafio para os pesquisadores, os quais ainda não entenderam o raciocínio de sua execução. Os tabuleiros carregam informações sobre a estrutura do pensamento humano e suas modificações, são peças fantásticas para compreender o *Homo Ludens* e conhecer grandes gênios do passado, mentes brilhantes por traz da composição dos jogos.

> No final do século XIX, uma tabuinha de barro do século II a.C., com escrita cuneiforme, foi comprada, como muitas outras, pelo Museu Britânico. O seu conteúdo foi mal interpretado e não suscitou interesse particular. Contudo, o aparecimento de uma outra tabuinha com conteúdo semelhante e o trabalho de vários especialistas em escrita cuneiforme, principalmente de Irving Finkel, permitiu concluir que os conteúdos focavam as regras de duas versões do Jogo de Ur, bem como a utilização dos tabuleiros em atividades divinatórias. Um dos tabuleiros encontrados por Woolley encontra-se exposto no Museu Britânico, em Londres (Figura 2), apresenta a configuração de dois grupos de casas, um de doze e outro de seis, unidos por uma ponte de duas casas, 14 peças e 3 dados (tetraédricos!). Trata-se de uma corrida entre dois oponentes, o primeiro a completar o seu percurso será o vencedor. O Jogo Real do Ur é assim o jogo mais antigo para o qual se conhecem as regras originais (TEIXEIRA, SILVA, 2016, p. 242/243).

O jogo Real de Ur nos demonstra a importância que um tabuleiro possui para os tempos atuais, segundo o que significaram para a época que foram criados. Hoje é um artefato de grande valor monetário, mas principalmente, cultural. Outra fonte interessante sobre jogos, esta da Era Medieval, é o livro de jogos de Afonso X, o sábio. Primogênito de Fernando III, Afonso X de Castela e Leão, assumiu o trono de Burgos aos 23 anos. Seu Reinado desempenhou um papel decisivo na cultura europeia, uma de suas contribuições foi um manuscrito sobre os jogos da época, sua intenção era de preservar tal conhecimento. O original se encontra na biblioteca do Escorial, aos arredores de Madrid (TEIXEIRA e SILVA, 2016).

As informações obtidas através dos jogos, são memórias de conhecimentos que não possuem data de validade, são nada menos do que passos da ciência. Muitos tabuleiros, e demais jogos, estão intrinsicamente ligados a alguma ou várias áreas de conhecimento, nomes como Pet Hein, John Nash e Arquimedes são alguns dos notórios contribuintes em executar teorias matemáticas em tabuleiros, sejam no campo da geometria, aritmética ou outro campo matemático. Renomados nomes que também são o *xeque-mate* para esta pesquisa, nos dando o incentivo preciso para pensar as possibilidades que o jogo de tabuleiro possui para o ensino e aprendizagem (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Dessa forma, vislumbra-se a contribuição dos jogos de tabuleiro, enquanto metodologia de ensino, para modificação do cenário atual, em que a Matemática ainda é motivo de aversão por parte dos estudantes. Contudo, pode-se observar que a potencialidade do jogo como recurso didático está intimamente ligada com a postura do professor, uma vez que esse tem um papel preponderante nas finalidades do mesmo, como já explicitamos anteriormente.

O breve trajeto histórico que realizamos sobre os jogos de tabuleiro, pontuam a finalidade e importância deste presente estudo, desde seus objetivos até sua relevância para pesquisas futuras. Apresentar os jogos de tabuleiro, como ferramenta pedagógica, além de auxiliar os educandos no aprimoramento de suas habilidades matemáticas e capacidade de concentração, proporciona–lhes a utilização do tempo livre na escola de forma prazerosa e saudável, estreitando relações sociais. Os mesmos também possuem caráter interdisciplinar, se considerarmos toda a historicidade dos jogos de tabuleiros, pois, interage com diversas áreas do conhecimento e podem ser utilizados como método interdisciplinar em qualquer módulo da Educação Básica.

Proposta pedagógica

Em nossa proposta pedagógica evidenciamos a importância de aproximar o cotidiano do aluno com a ciência, entendemos que este pode ser o ponto de partida para uma ação pedagógica eficaz. Sendo a matemática nosso contexto de estudo, devemos considerar o pouco interesse que muitos alunos tem sobre a mesma, dessa forma, há a necessidade de encontrar uma metodologia que a princípio aproxime o aluno dos conhecimentos matemáticos, do contrário, o jogo em si não será suficiente para estreitar esta relação. A curiosidade do aluno e seu esforço em prosseguir com o jogo depende do seu interesse sobre o assunto que o jogo propõe, logo, contextualizar essas informações pode ser a primeira jogada do professor para avançar em sua metodologia de ensino. Mendes (2006, p. 57) explica que:

> Para efetivarmos um ensino-aprendizagem significativo em matemática, é necessário utilizarmos as atividades históricas, buscarmos no material histórico existente todas as informações úteis à condução da nossa ação docente e, somente a partir daí, orientar os estudantes à realização de atividades. Surge, porém, nesse momento, uma questão: Como conduzir esse processo? Esse questionamento se resolve quando fazemos uma reflexão acerca da necessidade de se buscar a investigação histórica como meio de (re)construção da matemática produzida em diferentes contextos socioculturais e em diferentes épocas da vida humana.

Em nosso tópico anterior apresentamos eventos históricos sobre os jogos de tabuleiro, buscando entender sua origem e utilidade. Em resumo, foi possível observar que determinadas civilizações aplicaram seu conhecimento matemático em tabuleiros com a intenção de facilitar o trabalho de seu cotidiano, sendo esta a relação que devemos incitar ao aluno. Na medida que este entenda a história dos jogos de tabuleiro e sua utilidade ao longo dos anos, perceberá que sua realidade não está distante desses eventos históricos. Dessa forma, iniciamos um processo ativo reflexivo que leva o aluno a indagar sobre questões matemáticas e como esse conhecimento está relacionado com suas vivências (MENDES, 2006).

Logo, a abordagem histórica é o mecanismo primário para ressignificar o ensino da matemática aos alunos. Com a contextualização dos conteúdos, o aluno tem mais possibilidades de pensar a matemática para além da ideia sobre as dificuldades que a mesma aparentemente apresenta.

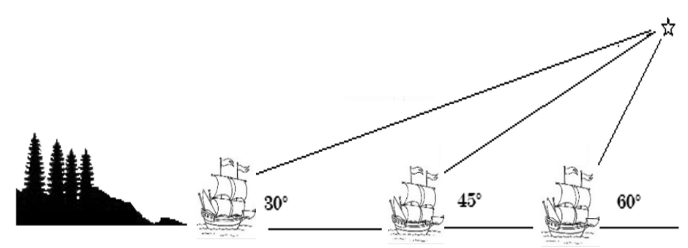
Jogo de tabuleiro

Nossa proposta encontra-se em desenvolvimento e para efetiva-la utilizaremos um jogo de trilha que descreve a trajetória de uma embarcação com uso de recursos náuticos, centrados no uso do astrolábio. dessa maneira utilizamos os ângulos como conceitos matemáticos que orientam para a navegação, assim como aconteceu no período das grandes navegações.

As peças serão embarcações do período das grandes navegações, no formato de cartelas ou outros materiais. As peças serão deslocadas de acordo com a numeração retirada no jogo de um dado numerado. Para o desenvolvimento do jogo, os estudantes terão a oportunidade de construir um astrolábio para classificar e medir aberturas angulares, compreendendo com esse instrumento era utilizado no período das grandes navegações.

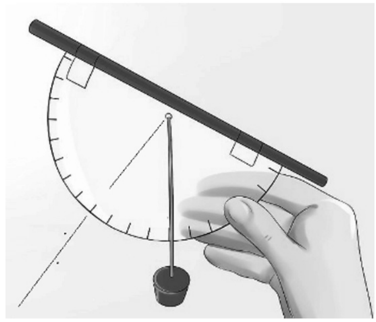
Como referência utilizamos o livro Qual seu signo, da coleção Astronomia para crianças (BARROS, 2020).

Figura 1 – Ângulos na navegação por estrelas



Fonte: Barros (2020, p. 19)

Figura 2 – Ângulos na navegação por estrelas



Fonte: Barros (2020, p. 19)

O uso do astrolábio é muito simples, basta fazer a subtração de 90° e a medida indicada pelo prumo, que é o fio esticado por um peso.

$$90° – 60°= 30°$$

> Para construirmos o nosso astrolábio, vamos usar o transferidor que está impresso no livro. Será necessário uma tesoura, um pouco de cola, um barbante e algum objeto que sirva de peso para o prumo. Também acompanha o transferidor instruções para construir um cilindro que será usado como mira. (BARROS,2019, p.19)

Considerações finais

O presente trabalho encontra-se em desenvolvimento e por isso, inacabado. O tabuleiro e as peças do jogo estão em desenvolvimento, de acordo com as estruturas e fundamentos que apresentamos.

Esperamos que essa proposta contribua para que os estudantes possam relacionar os conteúdos matemáticos com eventos da História da humanidade que revolucionaram o conhecimento matemático.

Nossos objetivos com esse estudo foram cumpridos na medida em que relacionamos os conceitos matemáticos a uma estrutura didática que possibilita trazer para a dinâmica da sala de aula, importantes conhecimentos matemáticos e os eventos nos quais suas práticas foram desenvolvidas.

Referências

ARCE, Alessandra. O jogo e o desenvolvimento na teoria da atividade e no pensamento educacional de Friedrich Froebel. *Cad. CEDES*, Campinas, v. 24, n. 62, 2004.

BARROS, Osvaldo dos Santos. *Astronomia para crianças*: qual é o seu signo? Abaetetuba, Edição do Autor, 2019.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: MEC, 2016.

FREITAS, J. L. M. de; BITTAR, M. *Fundamentos e Metodologia* de Matemática para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental. Campo Grande: UFMS, 2004.

GIL, A. C. *Como elaborar projetas de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002, p. 41.

GRANDO, R. C. *O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula*. 2000. 239 f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

HUIZINGA, Johan. *Homo Ludens* – von Unprung der kultur im Spiel. - 4.ed. São Paulo: Perspectiva, 2000.

KISHIMOTO, T.M. *O jogo e a educação infantil*. 2.ed. São Paulo: Pioneira, 1998.

MENDES, Iran A. *Matemática e investigação em sala de aula*: Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MOL, Rogério Santos. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

TEIXEIRA, Anabela, SILVA, Jorge Nuno. *HISTEMAT* – Revista de História da Educação Matemática Sociedade Brasileira de História da Matemática, n. 2, p. 239-263, 2016. ISSN 2447-6447.

WALLON, Henri. *A evolução psicológica da criança*. Lisboa: Edições 70, 1968.

Currículos dos autores

1. Adriana Nonato dos Santos

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: adriananonatodossantos@gmail.com

2. Daniele Esteves Pereira Smith

Doutora em Educação (UFRN), Professora, Orientadora e Vice-Coordenadora do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: danieleyz@gmail.com

3. Denivaldo Pantoja da Silva

Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA), Professor e Orientador do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: denivaldopdasilva@gmail.com

4. Edilson Pinheiro de Souza

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: edilpinheiro@hotmail.com

5. Ellen Cristian dos Santos Silva

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: ellensilva554@yahoo.com.br

6. Fábio Colins da Silva

Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA), Professor e Orientador do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (SEDUC/PA). E-mail: formador.ufpa@gmail.com

7. Jehny Adrianny Alves Vieira

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: jehnyaalves@gmail.com

8. Jeová Pereira Martins

Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA), Professor e Orientador do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: jeovapereira80@outlook.com

9. José dos Santos Guimarães Filho

Mestre em Educação Matemática (UFPA), Orientador do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (SEDUC/PA).
E-mail: js_guima@hotmail.com

10. Layana Barros Sousa

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: laianabarros100@gmail.com

11. Letícia Gonçalves Mascarenhas

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: leticiagmascarenhas@gmail.com

12. Luciene Moreira de Souza

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: luciene.ufpa@gmail.com

13. Manoel Junior Wanzeler Pompeu

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: manoelwanzeler@yahoo.com.br

14. Maria Katiane Miranda Ribeiro

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: katycell@hotmail.com

15. Marivaldo Gomes Cabral Tavares Ramos

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: marivaldogomes67@gmail.com

16. Nilcilene da Silva Coelho

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: nilcilenedasilvacoelho@yahoo.com.br

17. Oseas Rodrigues Cota

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: oseas06ufpa@gmail.com

18. Osvaldo dos Santos Barros

Doutor em Educação Matemática (UFRN), Professor e Orientador do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Abaetetuba, UFPA).
E-mail: o.barros@yahoo.com.br

19. Pedro de Jesus Wanzeler Pompeu

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: pedrojwp@gmail.com

20. Ramon Gil

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: ramongil330115@gmail.com

21. Rosivaldo da Silva Cardoso

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: rosivaldocardoso3@gmai.com

22. Rubenvaldo Monteiro Pereira

Doutora em Geofísica (UFPA), Professor, Orientador e Coordenador do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: rubenvaldo@ufpa.br

23. Suélen Márcia Vieira Franco

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: lukas_henrik28@yahoo.com.br

24. Tatiane Portilho Moraes

Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Básico (Faculdade de Matemática, Campus Universitário do Tocantins/Cametá, UFPA).
E-mail: tatianemoraesmatematica@gmail.com

TEMAS EM ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA
práticas e reflexões na Amazônia

Este livro reúne os resultados dos trabalhos de pesquisa oriundos do Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Básico, ofertado pela Faculdade de Matemática do Campus Universitário Tocantins/Cametá da Universidade Federal do Pará.

ISBN 658814005-3

Campus Universitário
do Tocantins/Cametá