PROJETO

Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo II

1

editAedi

Assessoria de Educação a Distância • UFPA

Cristina Lúcia Dias Vaz
José Miguel Martins Veloso

Caderno de Exercícios
Cálculo II

1ª edição

Belém-Pa

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

2015

REVISÃO
André Fellipe Ribeiro de Almeida
Felipe da Silva Mendonça
João Carlos Pantoja Fortes
Lidiane Cristina da Costa Carvalho

CAPA
Giordanna De Gregoriis

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO
Fernanda Kelly de Jesus Gomes
Helder Monteiro Santana
Israel Gonçalves Batista

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Vaz, Cristina Lúcia Dias
Veloso, José Miguel Martins
Caderno de Exercícios: cálculo II / Cristina Lúcia Dias Vaz e José Miguel Martins Veloso.
- Belém: AEDI/UFPA, 2016

ISBN E-book: 978-85-65054-30-0
ISBN Livro : 978-85-65054-31-7

1. Cálculo diferencial e integral
2. Exercícios de cálculo
3. Projeto Newton

Sumário

INTRODUÇÃO

Caro leitor, o Projeto Newton visa atender aos alunos de Cálculo I e II da Universidade Federal do Pará (UFPA), principalmente do Instituto Tecnológico, oferecendo uma ampla gama de recursos e apoio aos estudantes. As aulas são presenciais em um auditório e salas remotas que comportam 400 alunos, filmadas no auditório e transmitidas as salas remotas e também pela internet através do Portal da UFPA. Estas aulas são editadas e disponibilidades no Repositório da UFPA no endereço http://www.multimidia.ufpa.br.

Oferecemos um sistema de tutoria presencial diário além de apoio pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem - **Moodle** no endereço http://www.aedmoodle.ufpa.br/mod. Listas semanais de exercícios são dispostas aos alunos, que devem ser devolvidas e corrigidas pelo sistema de tutoria. A resolução dos exercícios da lista é divulgada aos estudantes depois da entrega.

Este livro é um caderno dos exercícios semanais de Cálculo II propostos no segundo semestre de 2014 e no primeiro semestre de 2015. Além dos exercícios e suas soluções, apresenta sugestões para as resoluções das questões e descreve os métodos matemáticos usados nestas resoluções. Tem como principal objetivo ser um guia de estudos para os alunos do Projeto Newton e qualquer aluno interessado em Cálculo.

Agradecemos a equipe de monitores do ano de 2015 que leram, comentaram, diagramaram e colaboraram na edição deste livro. A todos nossos sinceros agradecimentos.

Os autores
Dezembro de 2015

Curvas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- O Espaço $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades;
- Domínio, imagem e gráfico de funções vetoriais;
- Limite e continuidade de funções vetoriais;
- Derivada de funções vetoriais;
- Integral de funções vetoriais.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria Analítica;
- Limite e continuidade de funções de uma variável;
- Derivação de funções de uma variável;
- Integração de funções de uma variável.

Métodos e Técnicas

Cálculo componente a componente e aplicação das regras de derivação e integração.

- Efetua-se os cálculos por componente em cada um dos seguintes exercícios, utilizando as regras imediatas de limite, derivação e integração.

Exercícios 1.8, 1.11, 1.25

- No seguinte exercício utilizam-se as regras básicas de integração para resolver uma equação diferencial.

Exercício 1.9

Enunciado dos Exercícios

●○○○

1.1 Complete os quadrados para obter a equação canônica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0.$$

Determine o centro e o raio.

●●○○

1.2 Descreva o sólido que satisfaz a condição

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 36.$$

●●○○

1.3 Faça o que se pede:

(a) Determine o comprimento dos lados do triângulo de vértices $A = (1, -3, -2)$, $B = (5, -1, 2)$ e $C = (-1, 1, 2)$;

(b) Represente os vértices do triângulo num sistema de coordenadas tridimensional;

(c) Este triângulo é retângulo, isósceles ou nenhum dos dois?

●●○○

1.4 Faça o que se pede:

(a) Enuncie a definição de vetores paralelos;

(b) Represente graficamente vetores paralelos no plano;

(c) Dê exemplo de um vetor paralelo ao vetor $\vec{w} = (-6, 8, 2)$;

(d) Dê exemplo de um vetor que não é paralelo ao vetor $\vec{w} = (-6, 8, 2)$.

●●○○

1.5 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Para o caso falso, explique ou dê um contra-exemplo.

(a) É possível achar o produto vetorial de dois vetores num sistema de coordenadas bidimensional;

(b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.

●●○○

1.6 Calcule a área do paralelogramo que tem os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$ como lados adjacentes.

●●●○

1.7 Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1, 3, 1)$, $\vec{v} = (0, 6, 6)$ e $\vec{w} = (-4, 0, -4)$.

●●●○

1.8 Faça o que se pede:

(a) Calcule $\lim\limits_{t\to 2} \vec{r}(t)$ com $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \dfrac{t^2 - 4}{t^2 - 2t}\,\vec{j} + \dfrac{1}{t}\,\vec{k}$;

(b) Determine o(s) intervalo(s) dos pontos de continuidade da função vetorial $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + \sqrt{t-1}\,\vec{j}$.

●●●●

1.9 Determine $\vec{r}(t)$ sabendo que $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = t^2\,\vec{i} + 4\,t^3\,\vec{j} - t^2\,\vec{k}$ e $\vec{r}(0) = \vec{j}$.

●○○○

1.10 Esboce o gráfico da curva $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Indique com setas a direção de crescimento do parâmetro t.

●●○○

1.11 Sejam $\mathbf{r}(t) = (t, 2\mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$ e $\mathbf{u}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, 2\mathrm{sen}(t), 2\cos(t)\right)$ para $t > 0$. Usando as propriedades de derivada, calcule:

(a) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{u}(t)]$.

(b) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)]$.

●●○○

1.12 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos casos, explique. Se a afirmação for falsa explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)$ é constante então $\mathbf{r}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$.

(b) $\dfrac{d}{dt}||\mathbf{r}(t)|| = ||\mathbf{r}'(t)||$.

●●○○

1.13

(a) Qual a relação entre o vetor tangente unitário e a orientação da curva? Explique.

(b) Determine o vetor tangente unitário à curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \cos(t)\vec{i} + e^t \vec{j}$$

no ponto $t = 0$.

●●○○

1.14

(a) Defina a função comprimento de arco de uma curva espacial. Calcule a sua derivada;

(b) Explique como podemos parametrizar uma curva com relação ao comprimento de arco. Dê um exemplo.

●○○○

1.15 Faça o que se pede:

(a) Determine o vetor tangente unitário $\vec{\mathbf{T}}(t)$ e as equações paramétricas da reta tangente à hélice dada por $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}(t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ no ponto correspondente a $t = \dfrac{\pi}{4}$;

(b) Faça um esboço da reta tangente à hélice do item (a);

(c) Calcule o comprimento de uma volta da hélice dada no item (a).

●○○○

1.16 Encontre todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que os vetores $u = 2\alpha i - 2j - k$ e $v = 2\alpha i + 3\alpha j - 2k$ são perpendiculares.

●○○○

1.17 Suponha que os átomos de hidrogênio de uma molécula de metano (CH_4) estão localizados nos pontos $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ enquanto o átomo de carbono está localizado em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Encontre o cosseno do ângulo entre dois raios ambos com origem no átomo de carbono e passando cada um por um átomo de hidrogênio.

●●○○

1.18 Qual a equação da esfera tal que um de seus diâmetros tem como pontos extremos $A = (1, 3, -2)$ e $B = (-1, 0, 4)$?

●○○○

1.19 Três vértices de um paralelogramo são $A = (1, 3, 2)$, $B = (3, 5, 7)$ e $C = (2, -1, 0)$. Calcule a área do paralelogramo.

●●●○

1.20 Suponha que $u, v \in \mathbb{R}^3$ são vetores de comprimento $2\sqrt{2}$ e $||u - v|| = 2\sqrt{2}$ (comprimento ou norma de $u - v$). Calcule a norma de $u + v$ e o ângulo entre u e v.

●○○○

1.21 Encontre a equação linear do plano que contém a circunferência de interseção das esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 10z + 25 = 0$.

●●○○

1.22 Encontre a equação da reta s que passa pelo centro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 4 = 0$ e é paralela a reta r de equação $r := (-2t - 7, t + 4, 3t - 8), t \in \mathbb{R}$.

●○○○

1.23 Encontre o ângulo entre os planos ω e γ, cujas equações são dadas respectivamente por $2x + 2y - z = 0$ e $x + y - 5z - 3 = 0$.

●●●○

1.24 As posições de duas partículas A e B são dadas respectivamente pelas curvas r e s onde:

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(\sqrt{1+t^2}, t\right) \\ s(t) &= \left(4 - \frac{t^2}{8}, \sqrt{\frac{t^2}{4} + 6}\right) \end{aligned}$$

Encontre os pontos nos quais as trajetórias se intersectam e os valores de t para os quais as partículas colidem.

●○○○

1.25 Encontre o limite da curva $\gamma(t) = \left(\sqrt{t}\cos(t), \sqrt{t}\operatorname{sen}(t), \frac{e^t - 1}{t}\right)$ quando $t \to 0^+$.

●●●○

1.26 Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$ para t variando de 0 a 2π.

●●○○

1.27 Encontre os pontos onde a reta tangente à curva $\gamma(t) = (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$ em $t = \pi/4$ intercepta os eixos x e y.

●●○○

1.28 Encontre o ângulo entre as curvas

$$\gamma_1(t) = (t, 2t, t^2)$$

e

$$\gamma_2(s) = (s^2, 1 - s, 2 - s^2)$$

no ponto de interseção das mesmas.

●●○○

1.29 Encontre uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(0) = (5, 0)$ tal que $\gamma(t).\gamma'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sugestões

1.1 Agrupe os termos de mesma variável e some ou subtraia para fechar o trinômio quadrado perfeito.

1.2 Lembre-se da equação geral da esfera.

1.3 Lembre-se que a distância entre os pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ é dado por

$$d_{AB} = \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

1.4 Lembre-se que vetores paralelos são múltiplos entre si.

1.5 Lembre-se que o resultado do produto vetorial é um vetor perpendicular aos outros dois e que o produto vetorial entre vetores paralelos é igual ao vetor nulo.

1.6 Utilize produto vetorial entre os vetores dados.

1.7 Utilize produto misto entre vetores.

1.8 Aplique o limite em cada componente e lembre-se que uma curva é contínua na intersecção dos domínios das funções componentes.

1.9 Encontre a família de primitivas de cada componente e utilize a condição inicial.

1.10 Encontre uma relação entre x e y a partir de t para esboçar o gráfico da curva no plano xy.

1.11 Lembre-se que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{u}(t).$$

e que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{u}(t).$$

1.12 Seja $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{a}(t), \ldots, \mathbf{z}(t))$, definimos $||\mathbf{r}(t)|| = \sqrt{[\mathbf{a}(t)]^2 + \ldots + [\mathbf{z}(t)]^2}$. Lembre também que a derivada de uma constante é nula.

1.13 Lembre-se da representação geométrica do vetor tangente à uma curva e que $\mathbf{T}(p) = \dfrac{\mathbf{r}'(p)}{||\mathbf{r}'(p)||}$.

1.14 Seja $\mathbf{r}(t)$ uma curva e $s(t)$ a função comprimento de arco. Para parametrizarmos $\mathbf{r}(t)$ com relação ao comprimento de arco s, devemos ser capazes de escrever $t = t(s)$ (o parâmetro t como função do parâmetro s). Depois, a curva pode ser reparametrizada em termos do parâmetro s pela substituição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$.

1.15 Lembre-se que para encontrar as equações paramétricas da reta tangente deve-se achar o vetor diretor (vetor tangente) e um ponto pelo qual a reta passa (ponto de tangência).

1.16 Lembre-se que vetores perpendiculares têm produto interno igual a zero.

1.17 Lembre-se que o cosseno do ângulo entre dois vetores está relacionado ao produto interno e a norma dos mesmos.

1.18 Utilize o cálculo da distância entre pontos para encontrar o raio e o centro da esfera.

1.19 Sabe-se que a área do paralelogramo é a norma do produto vetorial entre dois vetores que definem seus lados adjacentes.

1.20 Lembre-se que $|| \vec{v} ||^2 = v \cdot v$ e utilize este fato nos casos da norma da soma e da diferença.

1.21 Substitua $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ na segunda equação.

1.22 Encontre o centro da esfera e lembre-se que retas paralelas tem o mesmo vetor diretor.

1.23 Lembre-se que o ângulo entre os vetores normais aos planos é igual ao ângulo entre os planos.

1.24 Iguale as componentes das curvas e obtenha funções de uma variável. Atente para o valor positivo ou negativo do(s) ponto(s) de colisão encontrado(s).

1.25 Calcule o limite de cada componente.

1.26 Analise a função modular no intervalo de integração.

1.27 Lembre-se que, se a reta intercpta o eixo y, então $x = 0$ e vice-versa.

1.28 Use os vetores tangentes à cada curva no ponto de interseção para encontrar o ângulo entre elas.

1.29 Lembre-se da relação entre o vetor posição e o vetor tângente da circunferência.

Respostas

1.1 Complete os quadrados para obter a equação canônica da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x + 6\,y + 8\,z + 1 = 0.$$

Determine o centro e o raio.

Solução: completando os quadrados

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 3^2 - 3^2 + z^2 + 8z + 4^2 - 4^2 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

dessa forma o centro da esfera é o ponto $(1, -3, -4)$ e raio 5.

1.2 Descreva o sólido que satisfaz a condição

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 36.$$

Solução: podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 6^2$$

que representa uma esfera maciça de raio 6 e centro na origem.

1.3 Faça o que se pede:

(a) Determine o comprimento dos lados do triângulo de vértices $A = (1, -3, -2)$, $B = (5, -1, 2)$ e $C = (-1, 1, 2)$;

Solução: Os comprimentos dos lados são dados pelas distâncias entre os pontos A, B e C,

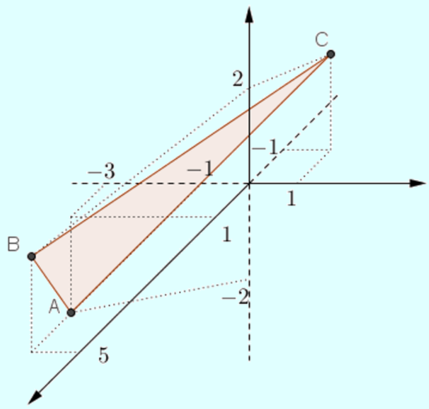
$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(1-5)^2 + (-3-(-1))^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4+16} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{AC} &= \sqrt{(1-(-1))^2 + (-3-1)^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{4+16+16} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{BC} &= \sqrt{5-(-1))^2+(-1-1)^2+(2-2)^2} \\
&= \sqrt{36+4+0} \\
&= \sqrt{40} \\
&= 2\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

(b) Represente os vértices do triângulo num sistema de coordenadas tridimensional;

Solução:



(c) Este triângulo é retângulo, isósceles ou nenhum dos dois?

Solução: Não é um triângulo retângulo, pois essas medidas não satisfazem o teorema de Pitágoras. É um triângulo isósceles, pois tem dois lados de mesma medida.

1.4 Faça o que se pede:

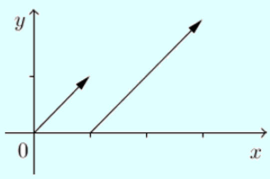
(a) Enuncie a definição de vetores paralelos;

Solução: dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tem a mesma direção, equivalentemente,se existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}.$$

(b) Represente graficamente vetores paralelos no plano;

Solução:



(c) Dê exemplo de um vetor paralelo ao vetor $\vec{w} = (-6, 8, 2)$;

Solução: Basta tomar $\alpha \in \mathbb{R}^*$ que o vetor $\vec{u} = \alpha\vec{w}$ será paralelo ao vetor $\vec{w}$, dessa forma, seja $\alpha = 2$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \alpha\vec{w} \\ &= 2(-6, 8, 2) \\ &= (-12, 16, 4) \end{aligned}$$

(d) Dê exemplo de um vetor que não é paralelo ao vetor $\vec{w} = (-6, 8, 2)$.

Solução: Dado um vetor que não é paralelo ao vetor $\vec{u}$, se não existir uma constante $\alpha \in \mathbb{R}^*$, tal que

$$\alpha\vec{w} = \vec{u},$$

dizemos que os vetores $\vec{w}$ e $\vec{u}$ não são paralelos, dessa forma, basta anular uma das coordenadas de $\vec{w}$, assim, seja

$$\vec{u} = (0, 8, 2).$$

1.5 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Para o caso falso, explique ou dê um contra-exemplo.

(a) É possível achar o produto vetorial de dois vetores num sistema de coordenadas bidimensional;

Solução: Não, pois se tomarmos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que não sejam paralelos, teremos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

onde $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente, logo $\vec{w}$ não está no plano que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.

Solução: Falso, pois dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos e paralelos teremos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w} = 0$$

mas podemos ter

$$\vec{v} \neq \vec{w}$$

por exemplo, sejam

$$\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{w} = (2, 2, 2) \text{ e } \vec{v} = (3, 3, 3)$$

como

$$\vec{w} = 2\vec{u} \text{ e } \vec{v} = 3\vec{u}$$

temos que

$$\vec{u} \times \vec{w} = 0 = \vec{u} = \vec{v}$$

mas

$$\vec{v} \neq \vec{w}.$$

1.6 Calcule a área do paralelogramo que tem os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$ como lados adjacentes.

Solução: Lembremos inicialmente que dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, a área do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pelo módulo do produto vetorial.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (8, -10, 4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \sqrt{8^2 + (-10)^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{64 + 100 + 16} \\
&= \sqrt{180} \\
&= 6\sqrt{5}
\end{aligned}$$

1.7 Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (1, 3, 1)$, $\vec{v} = (0, 6, 6)$ e $\vec{w} = (-4, 0, -4)$.

Solução: Lembremos que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o módulo do produto misto:

$$V = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|$$

dessa forma, calculemos inicialmente

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\
&= (-24, -24, 24),
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} V &= |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})| \\ &= |(1,3,1).(-24,-24,24)| \\ &= |-24-72+24| \\ &= 72. \end{aligned}$$

1.8 Faça o que se pede:

(a) Calcule $\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)$ com $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \dfrac{t^2-4}{t^2-2\,t}\,\vec{j} + \dfrac{1}{t}\,\vec{k}$;

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 2}\vec{r}(t) &= \lim_{t\to 2}\left(t\,\vec{i} + \frac{t^2-4}{t^2-2t}\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}\right) \\ &= \lim_{t\to 2}\left(t\,\vec{i} + \frac{(t-2)(t+2)}{t(t-2)}\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}\right) \\ &= \lim_{t\to 2}\left(t\,\vec{i} + \frac{t+2}{t}\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}\right) \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}. \end{aligned}$$

(b) Determine o(s) intervalo(s) dos pontos de continuidade da função vetorial $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + \sqrt{t-1}\,\vec{j}$.

Solução: Notemos inicialmente que a função $f(t) = \sqrt{t}$ tem como domínio o conjunto

$$A_1 = x \in \mathbb{R}; x \geq 0,$$

e a função $g(t) = \sqrt{t-1}$ tem como domínio o conjunto

$$A_2 = x \in \mathbb{R}; x \geq 1,$$

nesses conjuntos as funções f e g são contínuas, dessa forma, o conjunto onde a função vetorial $\vec{r}$ é contínua é dado por

$$A = A_1 \cap A_2 = x \in \mathbb{R}; x \geq 1,$$

1.9 Determine $\vec{r}(t)$ sabendo que $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = t^2\,\vec{i} + 4\,t^3\,\vec{j} - t^2\,\vec{k}$ e $\vec{r}(0) = \vec{j}$.

Solução: Sabendo que $\vec{r}(t) = \displaystyle\int \frac{d\vec{r}}{dt}$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \int t^2 dt\ \vec{i} + \int (4t^3) dt\ \vec{j} + \int (-t^2) dt\ \vec{k} \\
&= \frac{t^3}{3}\ \vec{i} + t^4\ \vec{j} - \frac{t^3}{3}\ \vec{k} + C
\end{aligned}$$

Como $\vec{r}(0) = \vec{j}$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \frac{0^3}{3}\ \vec{i} + 0^4\ \vec{j} - \frac{0^3}{3}\ \vec{k} + C \\
C &= \vec{j}.
\end{aligned}$$

Logo,

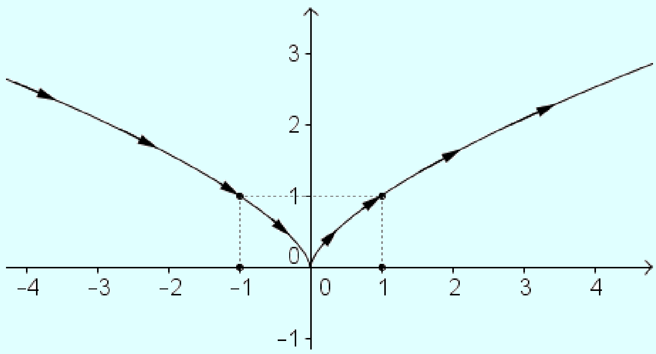
$$\vec{r}(t) = \frac{t^3}{3}\ \vec{i} + t^4\ \vec{j} - \left(\frac{t^3}{3} - 1\right)\ \vec{k}.$$

1.10 Esboce o gráfico da curva $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Indique com setas a direção de crescimento do parâmetro t.

Solução: Observe que $x = t^3$ e $y = t^2$. Logo, $t = x^{1/3}$ e $y = (x^{1/3})^2 = x^{2/3}$. Assim, a imagem da curva $\mathbf{r}(t)$ coincide com o gráfico da função $y = x^{2/3}$. Além disso, calculando alguns pontos da curva podemos observar o crescimento do parâmetro t. De fato,

t	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{r}(t)$	(-8,4)	(-1,1)	(0,0)	(1,1)	(8,4)

Para traçar o gráfico da função $y = x^{2/3}$, você pode usar os seus conhecimentos de Cálculo I (estudo da variação de função). Assim,



1.11 Sejam $\mathbf{r}(t) = (t, 2\text{sen}(t), 2\cos(t))$ e $\mathbf{u}(t) = \left(\frac{1}{t}, 2\text{sen}(t), 2\cos(t)\right)$ para $t > 0$. Usando as propriedades de derivada, calcule:

(a) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$.

Solução: Sabemos que a derivada do produto escalar é dada por

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{u}(t).$$

Calculando as derivadas obtemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 2\cos(t), -2\text{sen}(t)); \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(-\frac{1}{t^2}, 2\cos(t), -2\text{sen}(t)\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= (t, 2\text{sen}(t), 2\cos(t)) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}, 2\cos(t), -2\text{sen}(t)\right) \\
&= -\frac{1}{t} + 4\text{sen}(t)\cos(t) - 4\cos(t)\text{sen}(t) \\
&= -\frac{1}{t};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{u}(t) &= (1, 2\cos(t), -2\text{sen}(t)) \cdot \left(\frac{1}{t}, 2\text{sen}(t), 2\cos(t)\right) \\
&= \frac{1}{t} + 4\text{sen}(t)\cos(t) - 4\cos(t)\text{sen}(t) \\
&= \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t} = 0.$$

(b) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$.

Solução: Sabemos que a derivada do produto vetorial é dada por

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{u}(t);$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & 2\text{sen}(t) & 2\cos(t) \\ -\frac{1}{t^2} & 2\cos(t) & -2\text{sen}(t) \end{vmatrix} \\
&= -4\mathbf{i} + \left(-\frac{2\cos(t)}{t^2} + 2t\text{sen}(t)\right)\mathbf{j} + \left(2t\cos(t) + \frac{2\text{sen}(t)}{t^2}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{u}(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2\cos(t) & -2\,\text{sen}(t) \\ \frac{1}{t} & 2\text{sen}(t) & 2\cos(t) \end{vmatrix} \\
&= 4\mathbf{i} + \left(-\frac{2\text{sen}(t)}{t} - 2\cos(t)\right)\mathbf{j} + \left(2\text{sen}(t) - \frac{2\cos(t)}{t}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \begin{array}{l} \left(-\frac{2\cos(t)}{t^2} + 2t\text{sen}(t) - \frac{2\text{sen}(t)}{t} - 2\cos(t)\right)\mathbf{j} + \\ \left(2t\cos(t) + \frac{2\text{sen}(t)}{t^2} + 2\text{sen}(t) - \frac{2\cos(t)}{t}\right)\mathbf{k} \end{array}.$$

1.12 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos casos, explique. Se for falsa explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ é constante então $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$.

Solução: Verdadeira. Como $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, derivando em relação a t e fazendo o uso da propriedade de derivada para produto escalar, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r}(t)\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{r}(t) = 2\,\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.$$

(b) $\frac{d}{dt}||\mathbf{r}(t)|| = ||\mathbf{r}'(t)||$.

Solução: Falso. Considere $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), 1)$. Então,

$$||\mathbf{r}(t)|| = \sqrt{\cos(t)^2 + \text{sen}(t)^2 + 1} = \sqrt{2}; \quad \frac{d}{dt}[||\mathbf{r}(t)||] = 0.$$

Entretanto,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\text{sen}(t), \cos(t), 0); \quad \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{(-\text{sen}(t))^2 + \cos(t)^2 + 0} = 1.$$

Logo, $\frac{d}{dt}[||\mathbf{r}(t)||] \neq \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|$.

1.13

(a) Qual a relação entre o vetor tangente unitário e a orientação da curva? Explique.

Solução: O sentido do vetor tangente unitário depende da orientação da curva ou a orientação da curva determina o sentido do vetor tangente unitário.

(b) Determine o vetor tangente unitário à curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \cos(t)\vec{i} + e^t\vec{j}$$

no ponto $t = 0$.

Solução: Precisamos determinar o vetor $\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{||\mathbf{r}'(0)||}$. Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (e^t\cos(t) - e^t\text{sen}(t))\vec{i} + e^t\vec{j}; \\ ||\mathbf{r}'(t)|| &= \sqrt{e^{2t}(\cos(t) - \text{sen}(t))^2 + e^{2t}}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{r}'(0) = (1, 1)$ e $||\mathbf{r}'(0)|| = \sqrt{2}$. Portanto, o vetor tangente unitário é dado por

$$\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

1.14

(a) Defina a função comprimento de arco de uma curva espacial. Calcule a sua derivada;

Solução: Suponha que C seja uma curva dada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

com $\mathbf{r}'(t)$ contínua e C percorrida exatamente uma vez à medida que t aumenta de a para b. Definimos a **função comprimento de arco** por

$$s(t) = \int_a^t ||\mathbf{r}'(u)||\text{du} = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\text{du}$$

com $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$. Pelo Teorema fundamental do Cálculo tem-se

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t ||\mathbf{r}'(u)||\text{du}\right) = ||\mathbf{r}'(t)||.$$

(b) Explique como podemos parametrizar uma curva com relação ao comprimento de arco. Dê um exemplo.

Solução: Considere o Exemplo 2 dado na página 769 do livro texto: seja a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \text{sen}(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= -\text{sen}(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k}; \\ s'(t) &= ||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{\text{sen}(t)^2 + \cos(t)^2 + 1} = \sqrt{2}; \\ s(t) &= \int_0^t ||\mathbf{r}'(u)||\text{du} = \int_0^t \sqrt{2}\,\text{du} = \sqrt{2}\;t. \end{aligned}$$

Portanto, $s = \sqrt{2}\;t \Rightarrow t = \dfrac{s}{\sqrt{2}}$. A reparametrização é dada por

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

1.15 Faça o que se pede:

(a) Determine o vetor tangente unitário $\vec{\mathbf{T}}(t)$ e as equações paramétricas da reta tangente à hélice dada por $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}(t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ no ponto correspondente a $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Solução: Sabemos que o vetor tangente unitário é dado por:

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||},$$

como,

$$\mathbf{r}'(t) = -2\text{sen}(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{4\,\text{sen}(t)^2 + 4\,\cos(t)^2 + 1} = \sqrt{5},$$

segue que

$$\vec{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-2\text{sen}(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big).$$

Para determinar as equações paramétricas da reta tangente à hélice no ponto $(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, ou seja, na direção do vetor $(a, b, c) = \vec{\mathbf{T}}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, precisamos calcular

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ e } \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right);
\end{aligned}$$

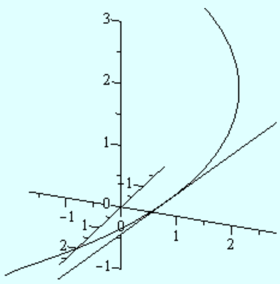
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 1\right) \\
&= (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + a\,\tau &&= \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\tau \\
y &= y_1 + b\,\tau &&= \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\tau \\
z &= z_1 + c\,\tau &&= \frac{\pi}{4} + \tau
\end{aligned}$$

(b) Faça um esboço da reta tangente à hélice do item (a);

Solução:



(c) Calcule o comprimento de uma volta da hélice dada no item (a).

Solução: Sabemos que o comprimento de arco em $[a, b]$ é dado por

$$s = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||\text{dt}.$$

Para uma volta da hélice temos $0 \leq t \leq 2\,\pi$, e logo,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,dt = 2\pi\sqrt{5}.$$

1.16 Encontre todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que os vetores $u = 2\alpha i - 2j - k$ e $v = 2\alpha i + 3\alpha j - 2k$ são perpendiculares.

Solução: $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$. Então, de $u = (2\alpha, -2, -1)$ e $v = (2\alpha, 3\alpha, -2)$, temos $u \cdot v = 4\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0$. Assim, $2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} \\ &= \frac{3 \pm 1}{4} \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = 1$ ou $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

1.17 Suponha que os átomos de hidrogênio de uma molécula de metano (CH_4) estão localizados em $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,0,1)$ enquanto o átomo de carbono está localizado em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Encontre o cosseno do ângulo entre dois raios com vértice no átomo de carbono e vértices nos átomos de hidrogênio.

Solução: Sejam $O = (0,0,0)$, $P = (0,1,1)$, $Q = (1,0,1)$, $R = (1,1,0)$ e $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Observe que o tetaedro $OPQR$ é regular, pois seus lados são todos diagonais de quadrados unitários e, portanto, medem $\sqrt{2}$. Verifique ainda que $\overline{CP} \equiv \overline{CQ} \equiv \overline{CR}$. Então, basta calcular o ângulo entre quaisquer dois destes três vetores $\vec{CP}, \vec{CQ}, \vec{CR}$. Se $u = \vec{CP}$ e $v = \vec{CR}$, então $u = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Assim,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

1.18 Qual a equação da esfera tal que um de seus diâmetros tem como pontos extremos $A = (1,3,-2)$ e $B = (-1,0,4)$?

Solução: Considere os vetores $\vec{OA} = (1,3,-2)$ e $\vec{OB} = (-1,0,4)$. O vetor $\vec{OC} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$ é tal que C é o ponto médio do segmemto $\overline{AB}$. Portanto, $C = \frac{(1,3,-2)+(-1,0,4)}{2} = \left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$ é o centro da esfera.

Se r é o raio da esfera, então $r = \frac{||\vec{AB}||}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{(-1-1)^2 + (0-3)^2 + (4-(-2))^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4+9+36}}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

.

Logo, a equação da esfera de centro $C = \left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$ e raio $r = \frac{7}{2}$ é

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

1.19 Três vértices de um paralelogramo são $A = (1,3,2)$, $B = (3,5,7)$ e $C = (2,-1,0)$. Calcule a área do paralelogramo.

Solução: Sejam $u = \vec{AB}$ e $v = \vec{AC}$. Então, $u = (3-1, 5-3, 7-2) = (2,2,5)$ e $v = (2-1, -1-3, 0-2) = (1,-4,-2)$. A área do paralelogramo formado por estes vetores é igual à norma do produto vetorial entre eles. Assim,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow u \times v = -4i + 5j - 8k - 2k + 20i + 4j = (16, 9, -10)$. Portanto, a área do paralelogramo é igual à

$$||u \times v|| = \sqrt{16^2 + 9^2 + 10^2} = \sqrt{256 + 81 + 100} = \sqrt{437}$$

1.20 Suponha que $u, v \in \mathbb{R}^3$ são vetores de comprimento $2\sqrt{2}$ e $||u - v|| = 2\sqrt{2}$ (comprimento ou norma de $u - v$). Calcule a norma de $u + v$ e o ângulo entre u e v.

Solução: Considere os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$. Logo, $||u||^2 = u \cdot u$. Assim,

$$||u+v||^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = ||u||^2 + 2u \cdot v + ||v||^2 \qquad (1)$$

Analogamente, tem-se que

$$||u - v||^2 = ||u||^2 - 2u \cdot v + ||v||^2 \tag{2}$$

De (1) + (2) temos,

$$||u + v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 - ||u - v||^2 = 2 \cdot (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 24. \tag{3}$$

Portanto, $||u + v|| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Por outro lado, de (1) − (2) temos

$$u \cdot v = \frac{1}{4}(||u + v||^2 - ||u - v||^2) = \frac{1}{4}(24 - (2\sqrt{2})^2) = 4. \tag{4}$$

Como

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$$

e $||u|| \cdot ||v|| = (2\sqrt{2})^2 = 8$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{4}{(2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre u e v é $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

1.21 Encontre a equação linear do plano que contém a circunferência de interseção das esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 10z + 25 = 0$.

Solução: Substituindo $x^2 + y^2 + z^2$ por 9 na segunda equação, obtemos $9 - 8y + 10z + 25 = 0 \Rightarrow 4y - 5z = 17$ que é a equação do plano de interseção.
Justificativa: Todo ponto que dista 9 unidades da origem (ponto na esfera de raio 3) e satisfaz a equação deste plano satisfará a equação da outra esfera. Observe que na equação do plano a variável x é livre. Isto se deve ao fato de os centros estarem contidos no plano yz, logo o plano da circunferência de intersecção será paralelo ao eixo $\vec{Ox}$.

1.22 Encontre a equação da reta s que passa pelo centro da esfera $x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z+4 = 0$ e é paralela a reta r de equação $r := (-2t - 7, t + 4, 3t - 8), t \in \mathbb{R}$.

Solução: Completando quadrados na equação da esfera, temos $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 5^2$. Logo, seu centro é $C = (3, 2, -4)$. Reescrevendo a equação da reta r obtemos $r := t(-2, 1, 3) + (-7, 4, -8), t \in \mathbb{R}$. Como as retas são parelas, possuem o mesmo vetor diretor. Logo, a equação de s é dada por $s := t(-2, 1, 3) + (3, 2, -4) = (-2t + 2, t + 2, 3t - 4), t \in \mathbb{R}$.

1.23 Encontre o ângulo entre os planos ω e γ, cujas equações são dadas respectivamente por $2x + 2y - z = 0$ e $x + y - 5z - 3 = 0$.

Solução: Das equações dos planos, deduzimos que um vetor perpendicular a ω é $v = (2, 2, -1)$ e, perpendicular a γ, temos o vetor $u = (1, 1, -5)$. Encontrando o ângulo θ entre estes dois vetores podemos determinar o ângulo α entre os planos. Assim,

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||} = \frac{2 + 2 + 5}{\sqrt{27}\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, $\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.24 As posições de duas partículas A e B são dadas respectivamente pelas curvas f e g onde:

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(\sqrt{1 + t^2}, t\right) \\ s(t) &= \left(4 - \frac{t^2}{8}, \sqrt{\frac{t^2}{4} + 6}\right) \end{aligned}$$

Encontre os pontos nos quais as trajetórias se intersectam e os valores de t para os quais as partículas colidem.

Solução: As trajetórias se intersectam nos pontos com coordenadas iguais. Assim, devemos ter:

$$\sqrt{1 + t^2} = 4 - \frac{x^2}{8} \tag{5}$$

$$t = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 6} \tag{6}$$

Observe que a interseção das trajetórias pode ocorrer sem ser ponto de colisão. Também t é sempre não negativo. De (6) temos,

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{x^2}{4} + 6 \\ 1 + t^2 &= \frac{x^2}{4} + 7 \end{aligned}$$

e substituíndo em (5)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{4}+7 &= \left(4-\frac{x^2}{8}\right)^2\\
\frac{x^2}{4}+7 &= 4^2-2\cdot 4\cdot\frac{t^2}{8}+\frac{t^4}{64}\\
\frac{x^2}{4}+7 &= 16-x^2+\frac{x^4}{64}\\
0 &= \frac{x^4}{64}-\frac{5}{4}x^2+9
\end{aligned}$$

Assim, temos uma equação biquadrada.

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{4}{64}\cdot 9}}{2\cdot\frac{1}{64}}\\
&= 32\left(\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25-9}{16}}\right)\\
&= 32\left(\frac{5}{4}\pm 1\right)\\
&= 40\pm 32
\end{aligned}$$

Assim, $x^2 = 72$ ou $x^2 = 8$.

O valor $x^2 = 72$ não satisfaz (5), pois o termo esquerdo é positivo.

O valor $x^2 = 8$ substituído em (5) implica que $\sqrt{1+t^2} = 4-\frac{8}{8} = 3$, ou seja, $t^2 = 8$ de onde $t = 2\sqrt{2}$ (lembre que t é não negativo). Logo os pontos de interseção ocorrem em $\pm x = t = 2\sqrt{2}$. A trajetória de s intercepta a trajetória de r no mesmo ponto duas vezes, mas a colisão ocorre apenas para $t = x = 2\sqrt{2}$. Sobre as trajetórias o ponto correspondente é $r\left(2\sqrt{2}\right) = s\left(\pm 2\sqrt{2}\right) = \left(3, 2\sqrt{2}\right)$.

1.25 Encontre o limite da curva $\gamma(t) = \left(\sqrt{t}\cos(t), \sqrt{t}\mathrm{sen}(t), \frac{e^t-1}{t}\right)$ quando $t\to 0^+$.

Solução: O limite da curva existe se existirem os limites de cada uma das componentes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, onde $\gamma_1(t) = \sqrt{t}\cos(t)$, $\gamma_2(t) = \sqrt{t}\mathrm{sen}(t)$ e $\gamma_3(t) = \frac{e^t-1}{t}$. Observe que γ_1 e γ_2 são contínuas em $t = 0$. Logo,

$$\lim_{t\to 0^+}\gamma_1(t) = \gamma_1(0) = \sqrt{0}\cos(0) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0^+}\gamma_2(t) = \gamma_2(0) = \sqrt{0}\sin(0) = 0.$$

Como a função $\gamma_3(t) = \frac{e^t-1}{t}$ não é contínua em $t = 0$, e temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, podemos aplicar a 1° regra de L'Hopital. Assim,

$$\lim_{t\to 0^+} \gamma_3(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{[e^t - 1]'}{[t]'} = \lim_{t\to 0^+} e^t = e^0 = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \gamma(t) = (0, 0, 1).$$

1.26 Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (\cos^3(t), \text{sen}^3(t))$ para t variando de 0 a 2π.

Solução: Sabemos que o comprimento C_{ab} de uma curva γ definida em um intervalo $[a, b]$ é dado por $C_{ab} = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$. Como,

$$\gamma'(t) \quad = \quad (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))$$

temos

$$\begin{aligned}
C_{ab} &= \int_a^b |\gamma'(t)|dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2(t)\text{sen}(t))^2 + (3\text{sen}^2(t)\cos(t))^2} dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos^2(t)\text{sen}^2(t)(\text{sen}^2(t) + \cos(t)^2)} dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} |\cos(t)\text{sen}(t)|dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} |\frac{\text{sen}(2t)}{2}|dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\text{sen}(2t)|dt \\
&= \frac{3}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(2t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{sen}(2t)dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \text{sen}(2t)dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\text{sen}(2t)dt\right) \\
&= \frac{3}{2}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(2t)dt \\
&= 6\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -3(-1-1) = 6
\end{aligned}$$

1.27 Encontre os pontos onde a reta tangente à curva $\gamma(t) = (\cos^3(t), \text{sen}^3(t))$ em $t = \pi/4$ intercepta os eixos x e y.

Solução: Seja r a reta tangente à curva γ em $t = \frac{\pi}{4}$. Primeiramente, vamos determinar uma equação paramétrica de r, que terá como vetor diretor

$$\begin{aligned}
\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(-3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right), 3\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \left(-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

e passa pelo ponto $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Assim, a equação da reta r é dada por

$$r := (x(t), y(t)) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)t + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(-3t\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3t\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

A reta r intercepta o eixo x quando $y(t) = 0$, ou seja, quando

$$\frac{3t\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3t\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Assim,

$$r\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}, 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Analogamente, a interseção com o eixo y é dada por $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.28 Encontre o ângulo entre as curvas

$$\gamma_1(t) = (t, 2t, t^2)$$

e

$$\gamma_2(s) = (s^2, 1 - s, 2 - s^2)$$

no ponto de interseção das mesmas.

Solução: O ângulo entre duas curvas é o ângulo formado pelos vetores tangentes a cada uma destas curvas no ponto de interseção.

Para que haja interseção, devemos encontrar os valores de t e s tais que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s)$. Devemos ter então

- $t = s^2$

- $2t = 1 - s$

- $t^2 = 2 - s^2$

Da primeira e terceira equação obtemos $t^2 = 2 - t$ que tem como solução $t = 1$ e $t = -2$. Para $t = 1$ obtemos da segunda equação $s = -1$ que satisfaz o sistema. Para $t = -2$ obtemos $s = 5$ que não é uma solução do sistema. Logo temos um único ponto de interseção $\gamma_1(1) = (1, 2, 1) = \gamma_2(-1)$. Sejam $u = \gamma_1'(1) = (1, 2, 2 \cdot 1) = (1, 2, 2)$ e $v = \gamma_2'(-1) = (2 \cdot (-1), -1, -2 \cdot (-1)) = (-2, -1, 2)$. Tudo o que resta agora é calcular o ângulo θ entre u e v. Assim,

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||} = \frac{-2 - 2 + 4}{3 \cdot 3} = 0.$$

Portanto, u e v são perpendiculares e $\theta = 90°$.

1.29 Encontre uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $\gamma(0) = (5, 0)$ tal que $\gamma(t).\gamma'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Da geometria plana, sabemos que todo segmento tangente à uma circunferência é perpendicular ao raio da mesma no ponto de tangência. Então, basta tomarmos um círculo centrado na origem que passe pelo ponto $(5, 0)$ para satisfazer as condiçoes impostas. Assim,

$$\gamma(t) = (5\cos(t), 5\mathrm{sen}(t))$$

∀t∈ $\mathbb{R}$.

Funções de várias variáveis

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Domínio e Imagem de uma função de várias variáveis;
- Curvas e Superfícies de nível;
- Gráfico de uma função de várias variáveis.

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Geometria Analítica Espacial;
- Noções sobre domínio e imagem de uma função real;
- Construção de gráficos de uma função real.

Métodos e Técnicas

Esboço de gráficos

- Nas seguintes questões utiliza-se as interseções da função com os planos coordenados e as curvas de nível para esboçar o gráfico de uma função de duas variáveis.

Exercícios 2.3(b), 2.5, 2.6

Enunciado dos Exercícios

● ○ ○ ○

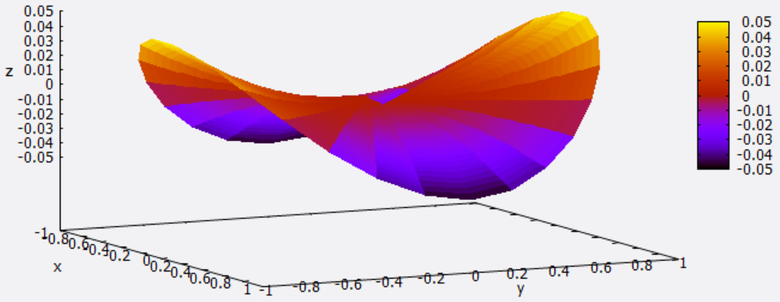
2.1 Determine e faça um esboço do domínio das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$.

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$.

● ● ○ ○

2.2 O parabolóide hiperbólico dado por $z = y^2 - x^2$ é mostrado na figura abaixo.



Esboce um mapa de contorno para esta superfície e faça uma breve descrição deste mapa de contorno.

● ● ○ ○

2.3 Faça o que se pede:

(a) Defina o gráfico de uma função de duas variáveis.

(b) Esboce o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

● ● ○ ○

2.4 Determine o domínio, a imagem e encontre as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

●●●○

2.5 Esboce as curvas de nível e determine o gráfico da função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

●●○○

2.6 Determine e esboçe as curvas de nível da função

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$$

e, a partir desta informação, esboce o gráfico da mesma.

●●●○

2.7 Determine as superfícies de nível da função $w(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ e esboce o gráfico das superfícies de nível.

Sugestões

2.1 Lembre-se da definição logarítmo. Faça a intersecção do domínio de cada radical.

2.2 Iguale a função a uma constante k e analise para $k \neq 0$ e $k = 0$.

2.3 Lembre-se que o gráfico de uma função $f(x, y)$ está contido no R^3. Utilize os mapas de contorno.

2.4 Faça a mudança de variável para coodenadas polares.

2.5 Faça $f(x, y) = k$, utilize completamento de quadrados para obter uma equação.

2.6 Analise o domínio da função e utilize os conceitos de curvas cônicas pra encontrar as curvas de nível.

2.7 Analise os casos em que $k < 0$, $k = 0$ e $k > 0$. Lembre-se dos conceitos de superfícies quádricas.

Respostas

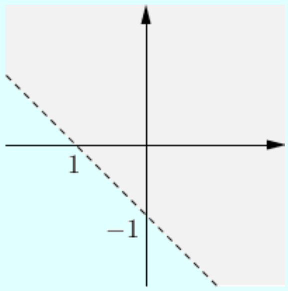
2.1 Determine e faça um esboço do domínio das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$;

Solução: Sabemos que a função logaritmo está definida apenas para valores positivos, dessa forma, temos que ter, $x + y + 1 > 0$. Portanto,

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y + 1 > 0\}.$$

A seguinte figura representa um esboço de D_f:

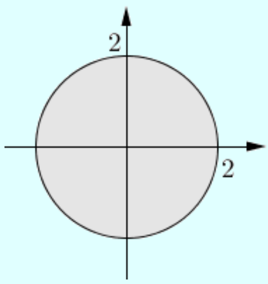


(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$.

Solução: Como a raiz quadrada está definida apenas para números não negativos, façamos por parte. Analisemos inicialmente o domínio de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Neste caso, temos que

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

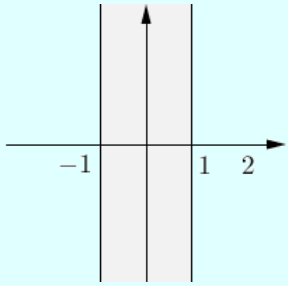
Logo, $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$. Assim, D_g é a região limitada por uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2 (um disco de centro $(0, 0)$ e raio 2), como mostra a seguinte figura:



Analisemos agora $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$. Neste caso temos que

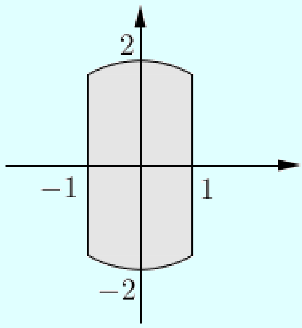
$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Logo, $D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1\}$. Assim, D_h é a faixa limitada pela retas $x = -1$ e $x = 1$, como mostra a seguinte figura:

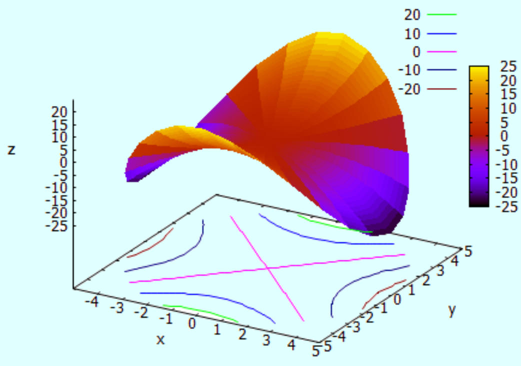


Portanto $D_f = Dg \cap D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x^2 \leq 1\}$.

A seguinte figura representa um esboço de D_f:



2.2 O parabolóide hiperbólico dado por $z = y^2 - x^2$ é mostrado na figura abaixo. Esboce um mapa de contorno para esta superfície. Faça uma breve descrição deste mapa de contorno.



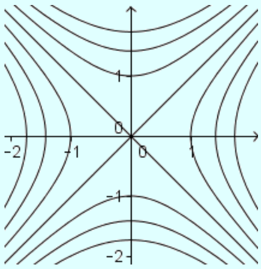
Solução: Descrição do mapa de contorno

Para cada valor constante k tal que $f(x, y) = y^2 - x^2 = k$ com $k \neq 0$, a curva de nível é uma hiperbóle com assíntotas $y = \pm x$.

Para $k < 0$, o eixo transversal da hipérbole é horizontal e para $k > 0$ o eixo transversal da hipérbole é vertical.

Para $k = 0$ temos uma cônica degenerada e tem-se as assíntotas $y = \pm x$.

Esboço do mapa de contorno:



2.3 Faça o que se pede:

(a) Defina o gráfico de uma função de duas variáveis.

Solução: Se f é uma função de duas variáveis com domínio $\mathcal{D}$, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a $\mathcal{D}$, ou seja, o subconjunto do espaço dado por

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = f(x, y) \text{ com } (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$

(b) Esboce o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução: O domínio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é $D_f = \mathbb{R}^2$ e o gráfico de f é o subconjunto do espaço dado por

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z = x^2 + y^2 \text{ com } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

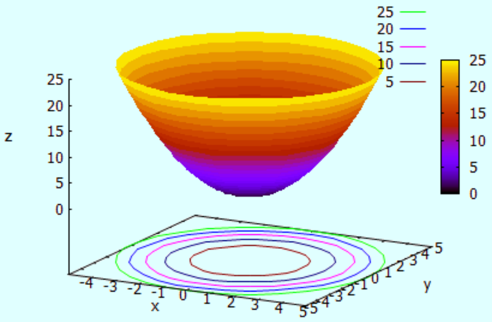
Para esboçarmos a superfície que representa G_f podemos reconhecer que $z = x^2 + y^2$ é a equação de um parabolóide elíptico com $a = b = 1$ ou fazer cortes em planos paralelos aos planos coordenados.

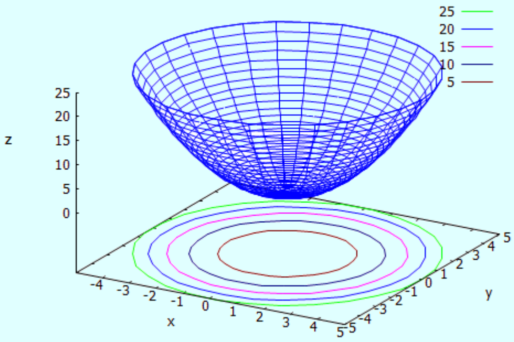
Para planos paralelos ao plano zy temos $x = k$, com $k \neq 0$, ou seja, $z = y^2 + k^2$ (equações de parábolas);

Para planos paralelos ao plano zx temos $y = k$, com $k \neq 0$, ou seja, $z = x^2 + k^2$ (equações de parábolas);

Para planos paralelos ao plano xy temos $z = k$, $k \geq 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = k^2$ (equações de círculos de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$ se $k \neq 0$; para $k = 0$ tem-se $(0, 0)$).

As figuras abaixo representam um esboço de G_f:





2.4 Determine o domínio, a imagem e encontre as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Solução:

- D_f (Domínio de f): Observe que f está bem definida se $x^2 + y^2 \neq 0$, ou seja, se $(x, y) \neq (0, 0)$.

- Im_f (Imagem de f): Da desigualdade (a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual a média aritmética) obtemos $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $x^2 + y^2 \geq \frac{|xy|}{2}$. Logo,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

  Portanto, $Im_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

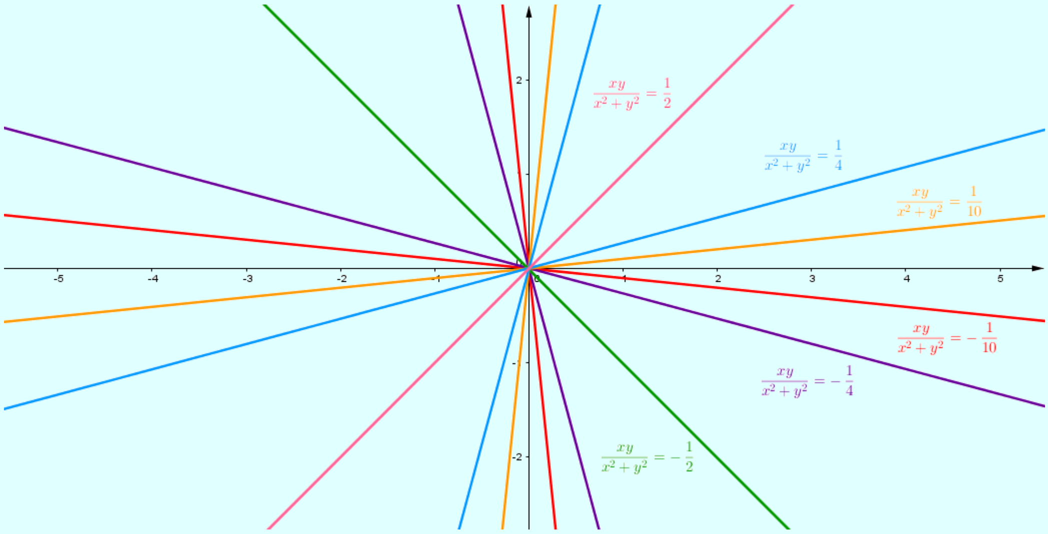
- Curvas de Nível: Vamos escrever a função em coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\text{sen}\theta$. Se $k \in Im_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a curva de nível é dada por

$$k = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta \cdot r\text{sen}\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\text{sen}(2\theta).$$

  Assim a curva de nível de cota k corresponde a reta pela origem

$$\theta = \frac{1}{2}\text{arcsen}(2k).$$

Veja alguns exemplos de valores para k:



2.5 Esboce as curvas de nível e determine o gráfico da função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Solução: As curvas de nível são dadas pelas intersecções dos planos de equação $z = k$ com a superfície $z = f(x,y)$. Assim, as equações de tais curvas são dadas por $k = f(x,y)$. Se $k = 0$, então $f(x,y) = 0$, o que implica $y = -x$. Se $k \neq 0$ temos,

$$\begin{aligned}
k &= f(x,y)\\
k &= \frac{x+y}{x^2+y^2}\\
x^2+y^2 &= \frac{x+y}{k}\\
x^2+y^2-2\cdot\frac{1}{2k}\cdot x-2\cdot\frac{1}{2k}\cdot y &= 0\\
\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2 &= 2\cdot\left(\frac{1}{2k}\right)^2\\
\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2k}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2k}\right)^2
\end{aligned}$$

Portanto, para $k \neq 0$ as curvas de nível são circunferências de raio $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2k}$ e centro $C = \left(\dfrac{1}{2k}, \dfrac{1}{2k}\right)$.

Observe algumas curvas de nível e gráfico da função:

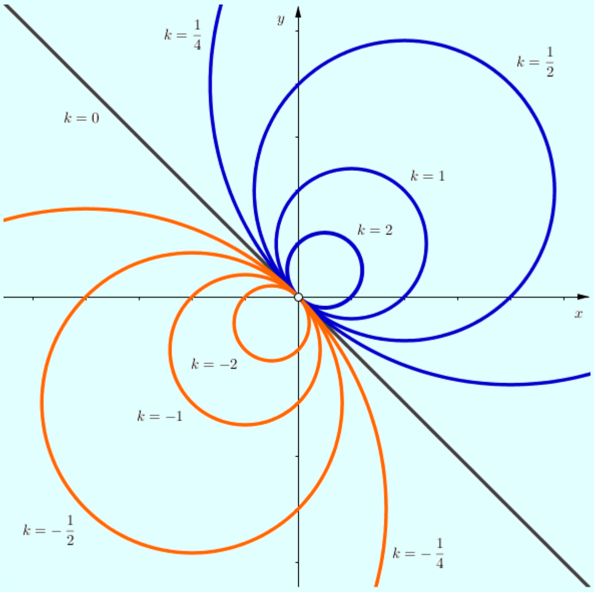
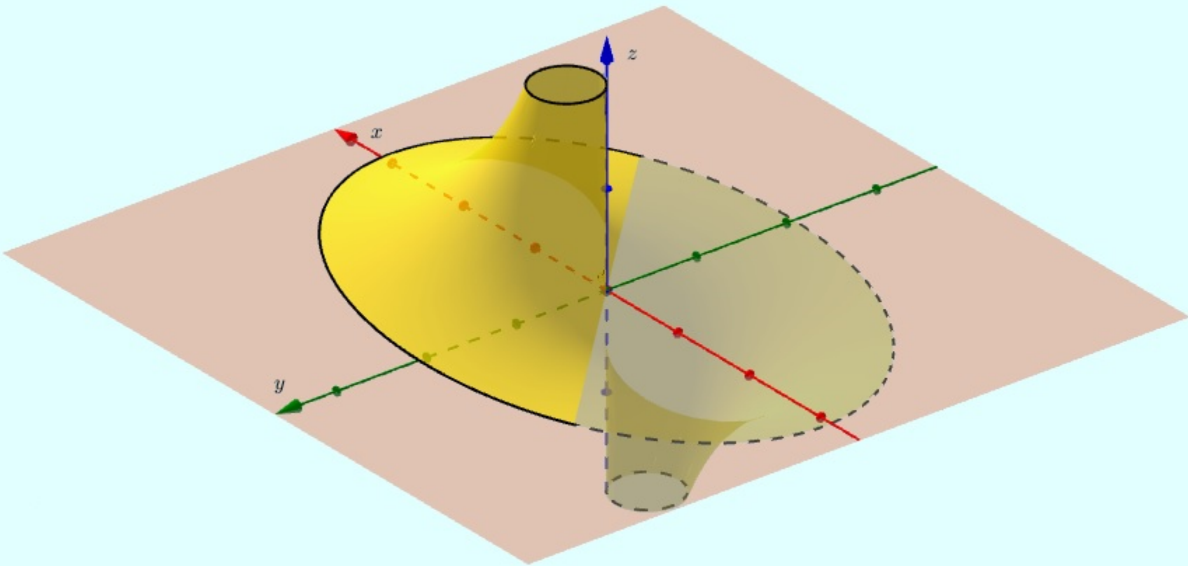


Gráfico da função $f(x, y)$:



2.6 Determine as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

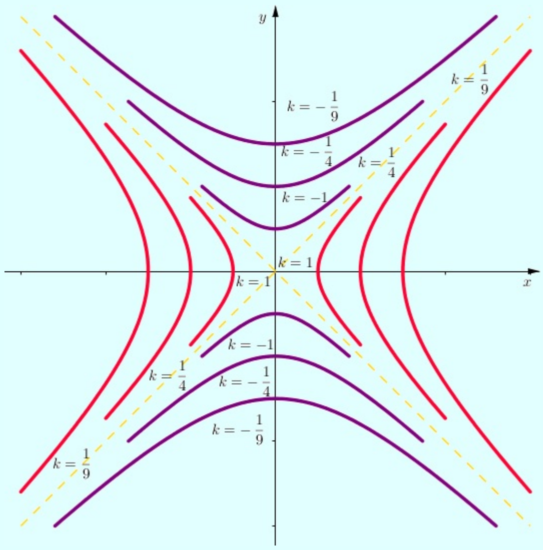
e, a partir desta informção, esboce o gráfico da mesma.

Solução: Inicialmente, observe que $Im_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Assim As curvas de nível são dadas por $k = f(x, y)$, onde $k \neq 0$.

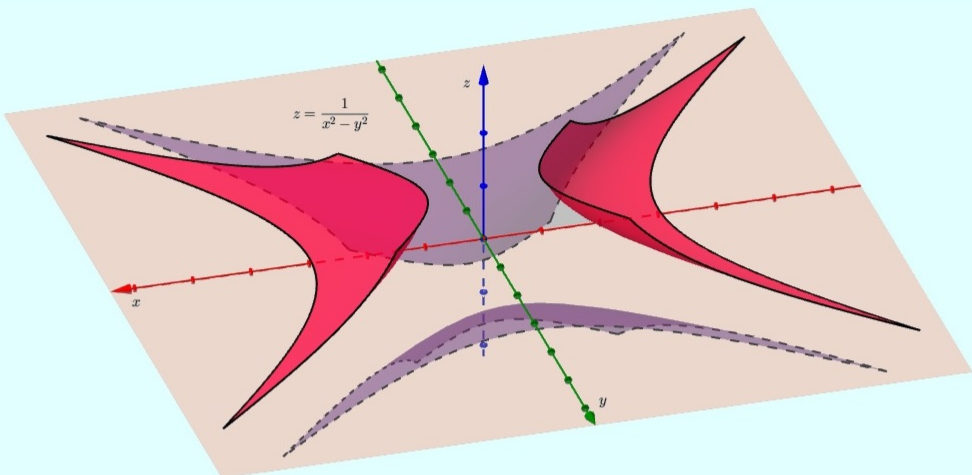
Temos

$$\begin{aligned} k &= f(x,y) \\ k &= \frac{1}{x^2-y^2} \\ k\cdot x^2 - k\cdot y^2 &= 1 \\ \frac{x^2}{\frac{1}{k}} - \frac{y^2}{\frac{1}{k}} &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, as curvas de nível são hipérboles, centradas na origem, cujos comprimentos dos eixos real $2a$ e imaginário $2b$ se igualam a $2a = 2b = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{k^2}}$.
Observe algumas curvas de nível e gráfico da função:



E o gráfico será:



2.7 Determine as superfícies de nível da função $w(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ e esboce o gráfico das superfícies de nível.

Solução: As equações das superfícies de nível são dadas por $k = w(x, y, z)$. Se $k = 0$, então $w(x, y, z) = 0$, o que implica

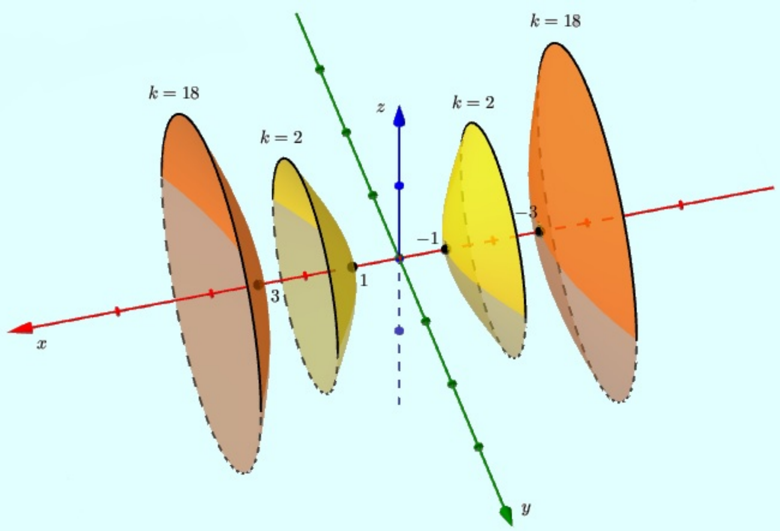
$$2x^2 - y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

Logo, se $k = 0$ a superfície de nível é um cone com vértice na origem e eixo sobre o eixo x. Se $k \neq 0$ temos,

$$\begin{aligned} k &= w(x, y, z) \\ k &= 2x^2 - y^2 - z^2 \\ \frac{x^2}{\frac{k}{2}} - \frac{y^2}{k} - \frac{z^2}{k} &= 1 \end{aligned}$$

Se $k < 0$, temos um hiperbolóide de uma folha cujo eixo de simetria é o eixo x. Se $k > 0$, temos um hiperbolóide de duas folhas cujo eixo de simetria é também o eixo x.

Portanto, esboçando as superfícies de nível, temos:



Limite e continuidade

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Limite e continuidade de uma função de várias variáveis;
- Teoremas de limite de uma função de várias variáveis.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios

- Limite e continuidade de uma função de uma variável;
- Teoremas de limite de uma função de uma variável;

Métodos e Técnicas

Teorema do Confronto	• No exercício a seguir, utiliza-se o Teorema do Confronto para mostrar a continuidade de uma função. **Exercício 3.3**
Aplicação da Definição de Limite para funções de várias variáveis	• Nos exercícios a seguir usa-se o limite da composta entre a função dada e duas curvas diferentes para mostrar a não existência dos limites considerados. **Exercícios 3.5, 3.6**

Enunciado dos Exercícios

●●○○

3.1 Explique sua resposta para as seguintes perguntas:

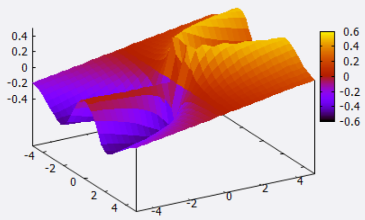
(a) Se $f(0,0) = 6$, você pode concluir alguma coisa sobre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(b) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 6$, você pode concluir alguma coisa sobre $f(0,0)$?

(c) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 6$ e a função f é contínua em $(0,0)$, você pode concluir alguma coisa sobre $f(0,0)$?

●●○○

3.2 Considere $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (veja figura abaixo).



(a) Determine (se possível) o limite sobre qualquer reta da forma $y = a\,x$, $a \neq 0$.

(b) Determine (se possível) o limite sobre a parábola $y = x^2$.

(c) O limite existe? Explique.

●●○○

3.3 Discuta a continidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4\,x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ k & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

●●○○

3.4 Usando as propriedades de limite e continuidade, calcule os limites abaixo. Cite as propriedades usadas.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} y\ \cos(xy)$.

●○○○

3.5 Verifique a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

●●○○

3.6 Verifique a existência de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

e calcule se o limite existir.

●○○○

3.7 A função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 y \cos(x^3 - 7y^5)$ é contínua? Justifique.

Sugestões

3.1 Lembre-se da definição de função contínua em um ponto. Lembre que o limite é uma tendência e não necessariamente expressa o valor da função no ponto. Lembre-se da definição de função contínua em um ponto.

3.2 Determine $f(x, y) = f(x, ax)$ e utilize as propriedades de limites. Determine $f(x, y) = f(x, x^2)$ e utilize as propriedades de limites. Verifique se os limites encontrados em (a) e (b) são iguais ou diferentes.

3.3 Lembre-se que $f(x, y)$ é contínua em (a, b) se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} = f(a, b)$ - definição de continuidade.

3.4 Faça $f(x, y) = xy$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$ e utilize as propriedades de soma, produto e quociente de limites. Faça $f(x, y) = xy$ e $h(t) = \cos(t)$ em $\cos(xy)$ para encontrar o limite desta função através do teorema de continuidade de funções compostas e das propriedades de produto de limites. Em seguida, utilize novamente as propriedades de produto de limites na função $y \cos(xy)$.

3.5 Utilze duas curvas parametrizadas($f(x, y) = \gamma_1(t)$ e $f(x, y) = \gamma_2(t)$), para cálcular os limites e comparar os resultados encontrados para esses limites.

3.6 Utilize curvas parametrizadas para cálcular os limites e comparar os resultados encontrados para esses limites.

3.7 Atente para a composição de funções contínuas.

Respostas

3.1 Explique sua resposta para as seguintes perguntas:

(a) Se $f(0,0) = 6$, você pode concluir alguma coisa sobre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solução: Não, pois o valor de f no ponto $(0,0)$ não tem influência na existência do limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Pode acontecer deste limite não existir, como mostra o seguinte exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 6 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Observe que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

(b) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 6$, você pode concluir alguma coisa sobre $f(0,0)$?

Solução: Não, pois a existência do limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 6$ não garante que f está definida em $(0,0)$ com valor igual ao do limite. Por exemplo,

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + 6 & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 10 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Observe que:

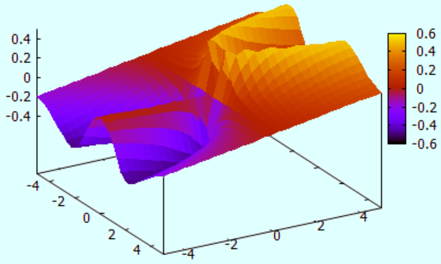
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y + 6 = 6,$$

mas $f(0,0) = 10$.

(c) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 6$ e a função f é contínua em $(0,0)$, você pode concluir alguma coisa sobre $f(0,0)$?

Solução: Sim, pois f é contínua em $(0,0)$ se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ e como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 6$ temos que $f(0,0) = 6$.

3.2 Considere $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ (veja figura abaixo).



(a) Determine (se possível) o limite sobre qualquer reta da forma $y = a\,x$, $a \neq 0$;

Solução: Vamos nos aproximar de $(0,0)$ ao longo da reta $y = ax$. Então

$$f(x,y) = f(x,ax) = \frac{x^2ax}{x^4+(ax)^2} = \frac{ax^3}{x^4+a^2x^2} = \frac{ax}{x^2+a^2}, \ \forall x \neq 0.$$

Fazendo $g(x) = a\,x$ e $h(x) = x^2 + a^2$ temos que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = a \lim_{x\to 0} x = 0; \quad \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(x^2+a^2) = a^2 \text{ , com } a \neq 0$$

Usando a propriedade de limite do quociente obtemos

$$\lim_{x\to 0} f(x,a\,x) \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x^2+a^2} = 0.$$

(b) Determine (se possível) o limite sobre a parábola $y = x^2$;

Solução: Seja f como no item (a). Vamos nos aproximar de $(0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$. Então

$$f(x,y) = f(x,x^2) = \frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = \frac{x^4}{2\,x^4} = \frac{1}{2}, \ \forall x \neq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c) O limite existe? Explique.

Solução: O limite não existe, pois ao longo das retas $y = a\,x$ com $a \neq 0$ (caminho C_1), a função aproxima-se do número $L_1 = 0$ e ao longo da parábola $y = x^2$ (caminho C_2), aproxima-se do número $L_2 = \dfrac{1}{2}$. Daí, $L_1 \neq L_2$ (limites diferentes).

3.3 Discuta a continidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ k & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução: A função $f(x,y)$ é contínua em (a,b) se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Isto implica que:

i) f está definida em (a,b);

ii) existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$;

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Observe que $D_f = \mathbb{R}^2$, pois $f(a,b) = \dfrac{4\,a^2b^2}{a^2+b^2}$ se $(a,b) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Logo, f está definida em $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Agora vamos verificar se existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Para isto, notemos que para todo $x,\ y \in \mathbb{R}$, temos que $x^2 \leq x^2+y^2$, e logo, $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ para $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto,

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Por outro lado, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 4\,y^2 = 0$. Estes resultados implicam que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Dessa forma, analisemos os casos a seguir:

1. $k = 0$. Neste caso, temos:

   Se $(a,b) \neq (0,0)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{4\,a^2b^2}{a^2+b^2} = f(a,b)$;

   Se $(a,b) = (0,0)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$.

   Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

2. $k \neq 0$. Neste caso, temos:

Se $(a, b) \neq (0,0)$ então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{4\,a^2b^2}{a^2+b^2} = f(a,b)$;

Se $(a, b) = (0,0)$ então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4\,x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 \neq f(0,0)$.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

3.4 Usando as propriedades de limite e continuidade, calcule os limites abaixo. Cite as propriedades usadas.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$.

Solução: Sejam $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2 + y^2$. Note que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(1,1)} y = 1.$$

Usando as propriedades de limite do produto tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x\,y = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x \lim_{(x,y)\to(1,1)} y = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x \lim_{(x,y)\to(1,1)} x = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} y^2 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} y \lim_{(x,y)\to(1,1)} y = 1 \cdot 1 = 1.$$

Usando a propriedade de limite da soma obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + y^2 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,1)} y^2 = 1 + 1 = 2.$$

Observando que $g(x,y) = x^2 + y^2 \neq 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$ e que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = 2,$$

podemos aplicar a propriedade do limite do quociente para obter

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} y\cos(xy)$.

Solução: Sejam as funções $f(x,y) = x\,y$ e $h(t) = \cos(t)$. Pela propriedade do limite do produto tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} x\,y = \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} x \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} y = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}.$$

Como $h(t)$ é contínua em $f\left(\frac{\pi}{4}, 2\right) = \frac{\pi}{2}$ e $f(x,y) = xy$ é contínua em $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, pelo teorema da continuidade da composta temos que $h(f(x,y)) = \cos(xy)$ é contínua em $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$, ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} \cos(xy) = \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} h(f(x,y)) = h(f\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Finalmente, usando a propriedade de limite do produto obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} y\cos(xy) &= \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} y \lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},2)} \cos(xy)\\ &= 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

3.5 Verifique a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Solução: O limite existe se, dadas quaisquer curvas $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ com $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = (0,0)$, tivermos

$$\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t)).$$

Assim, sejam $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$. Temos

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Portanto, o limite não existe.

3.6 Verifique a existência de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

e calcule se o limite existir.

Solução: Sejam $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$. Temos

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1,$$

pois a mudança de variável $u = t^2$ que resulta no limite fundamental nos diz que $u \to 0$ quando $t \to 0$. Analogamente,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-t^2)}{t^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(u)}{u} = -\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = -1.$$

Portanto, o limite não existe

3.7 A função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 y \cos(x^3 - 7y^5)$ é contínua? Justifique.

Solução: Observe que as funções $g, h, j : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x^3 - 7y^5 \\ h(x, y) &= \cos(x) \\ j(x, y) &= x^2 y \end{aligned}$$

são todas contínuas. Como $\mathbb{R} = Im_g \subset D_h = \mathbb{R}^2$ e a composta de funções contínuas é uma função contínua, temos $h \circ g$ contínua. Como o produto de funçoes contínuas é uma função contínua, $f = j \cdot (h \circ g)$ é contínua.

Diferenciabilidade

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Derivadas parciais e sua interpretação geométrica;
- Diferenciabilidade e diferencial;
- Derivadas direcionais e Gradiente: Cálculo e Interpretação Geométrica;
- Regra da Cadeia e o Teorema da Função Implícita;
- Derivadas de Ordem superior e o Teorema de Clairaut.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria Analítica;
- Derivada de uma função de uma variável e regras básicas de derivação;
- Regra da Cadeia para funções de uma variável;
- Limite de funções de várias variáveis.

Métodos e Técnicas

Regra da Cadeia	• Nas questões que seguem, faz-se uso direto da regra da cadeia para funções de mais de uma variável. **Exercícios 4.11, 4.13, 4.32, 4.33, 4.34**
Teorema da Função Implícita	• Nas questões a seguir, aplica-se o teorema da função implícita para calcular derivadas ordinárias e parcias de funções dadas implicitamente; **Exercícios 4.13, 4.14, 4.35, 4.38, 4.39** • Nos seguintes exercícios, aplica-se o teorema da função implícita para determinar o coeficiente angular de uma reta tangente à uma curva dada implicitamente. **Exercícios 4.40, 4.41**
Teorema de Clairaut	• Nas questões a seguir, aplicamos o Teorema de Clairaut para discutir sobre a continuidade de derivadas parciais. **Exercícios 4.7(b), 4.27**

●○○○

4.1

(a) Defina as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$;

(b) Descreva um procedimento para calcularmos as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função $z = f(x,y)$.

●○○○

4.2 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos casos, explique. Se a afirmação for falsa, explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $z = f(x,y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ então $z = c(x+y)$;

(b) Se $z = f(x)\,g(y)$ então $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x)\,g(y) + f(x)\,g'(y)$.

●○○○

4.3 Calcule as derivadas parciais como indicado:

(a) Usando a definição calcule $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ para $f(x,y) = x\,y^2 - x^3\,y$;

(b) $f(x,y) = \text{sen}(3x)\cos(x^2+y^2)$; $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$;

(d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$; $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.

●●○○

4.4 Calcule as derivadas parciais e as derivadas parciais de ordem superior como indicado:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{3x^2+y^2-2z^2}$; $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ e $f_z(x,y,z)$;

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{x\,y}{x+y+z}$; $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ e $f_z(x,y,z)$;

(c) $f(x,y,z) = e^x\text{sen}(yz)$; $f_{xyz}(x,y,z)$;

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y+2z}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$;

●●○○

4.5 Seja $z = f(x, y)$ uma função com derivadas parciais no ponto $(x_0, y_0) \in D_f$. Responda as seguintes perguntas, lembrando que o gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$ é a interseção do plano $y = y_0$ com o gráfico de $f(x, y)$.

(a) Qual é a interpretação geométrica de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$? Explique e desenhe;

(b) Para $f(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} - y^2 + \dfrac{25}{8}$, calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 1, f\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)\right)$.

(c) Interprete geometricamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Explique e desenhe.

●○○○

4.6 Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{7}$$

(a) Calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$;

(b) Use a definição e calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

●●○○

4.7 Considere a função dada em (7) e responda as seguintes perguntas:

(a) Use a definição e calcule $f_{xy}(0, 0)$ e $f_{yx}(0, 0)$;

(b) Usando o **Teorema de Clairaut** (veja página 817 do livro) e o resultado do item (a), o que podemos concluir sobre f_{xy} e f_{yx}?

●○○○

4.8 Sejam $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ e $(x_0, y_0) = \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(a) Mostre que f é diferenciável em (x_0, y_0);

(b) Encontre a linearização $L(x, y)$ de f em (x_0, y_0). Compare os valores de $L(x, y)$ e $f(x, y)$ no ponto $(0.2, 0.68)$.

●●○○

4.9 Considere a função f e o ponto (x_0, y_0) dados na questão 4.8.

(a) Encontre a equação do plano tangente a da reta normal ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0);

(b) Se (x_0, y_0) varia até o ponto $(0.2, 0.68)$, calcule o diferencial dz e o acréscimo Δz de f em (x_0, y_0). Compare os resultados obtidos;

(c) Descreva a diferença entre dz e de Δz para uma função $f(x, y)$ qualquer.

●●●●

4.10 Justifique suas respostas para as seguintes perguntas:

(a) Disseram-lhe que existe uma função $f(x, y)$ com derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ descontínuas em (x_0, y_0), que é diferenciável em (x_0, y_0). Você deve acreditar nisso?

(b) Toda função descontínua não é diferenciável?

(c) Existe um plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

no ponto $(0, 0, 0)$?

(d) Para algumas superfícies, a reta normal em quaisquer de seus pontos passa por um mesmo objeto geométrico. Qual é o objeto comum para a esfera?

●●●○

4.11

(a) Seja $z = f(x, y)$ com $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Enuncie a regra da cadeia para calcular $\dfrac{dz}{dt}$. Aplique a regra na função $z = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, com $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$.

(b) Seja $z = f(x, y)$ com $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$. Enuncie a regra da cadeia para calcular $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$. Aplique a regra na função $z = \operatorname{sen}(2\,x + 3\,y)$, com $x = s + t$ e $y = s - t$.

●●○○

4.12

(a) Descreva a diferença entre a forma explícita e a forma implícita de uma função de duas variáveis x e y. Dê um exemplo em cada caso;

(b) Se $F(x, y) = 0$, enuncie a regra da cadeia para calcular implicitamente $\dfrac{dy}{dx}$. Se $F(x, y, z) = 0$, enuncie a regra da cadeia para calcular implicitamente $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Dê um exemplo em cada caso.

●●○○

4.13 Usando a regra da cadeia apropriada, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$;

(b) $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ para $z = \dfrac{x^2}{y}$, $x = t^2$ e $y = t + 1$;

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ para $z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$, $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\operatorname{sen}(\theta)$;

(d) $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w = x\cos(yz)$, $x = s^2$, $y = t^2$ e $z = s - 2t$.

●●●○

4.14 Diferenciando implicitamente, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{dy}{dx}$ para $\cos(x) + \operatorname{tg}(xy) + 5 = 0$;

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para $x\ln(y) + zy^2 + z^2 = 8$.

●●●○

4.15 Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $\vec{u} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \text{sen}(\theta)\mathbf{j}$

(a) Usando a definição, calcule a derivada direcional $D_u f(x_0, y_0)$ de f em (x_0, y_0) na direção do vetor $\vec{u}$.

(b) Considere $g(h) = f(x_0 + h\cos(\theta), y_0 + h\,\text{sen}(\theta))$. Verifique que $g'(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\text{sen}(\theta)$ e $g'(0) = D_u f(x_0, y_0)$. Conclua que

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\text{sen}(\theta).$$

●●●●

4.16 Faça o que se pede:

(a) Defina o vetor gradiente da função $z = f(x,y)$ e enuncie suas propriedades;

(b) Descreva a relação entre o vetor gradiente e as curvas de nível da função $z = f(x,y)$.

●○○○

4.17 Calcule a derivada direcional das seguintes funções, no ponto P na direção do vetor $\mathbf{v}$:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (3,4)$ e $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$;

(b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P = (0,0)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;

(c) $f(x,y) = \cos x^2 + y^2$, $P = (1,1)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i}$;

(d) $f(x,y) = \ln x^2 - y$, $P = (2,3)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{j}$.

●●○○

4.18 Considere a função $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$.

(a) Calcule $D_u f(x,y)$ com $\mathbf{u} = \cos(\theta)\,\mathbf{i} + \text{sen}(\theta)\,\mathbf{j}$ para $\theta = \dfrac{\pi}{3}$;

(b) Calcule $\nabla f(1,2)$ e $||\nabla f(1,2)||$;

(c) Ache um vetor unitário $\mathbf{u}$ ortogonal a $\nabla f(1,2)$ e calcule $D_u f(1,2)$;

(d) Discuta o significado geométrico do resultado do item (c).

●●●○

4.19 Seja $f(x,y) = y\,e^x + x\,\ln(z)$. Mostre que:

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$;

(b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$.

●●●○

4.20 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos caso, explique. Se for falsa explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $f(x,y)$ tem um máximo local no ponto (a,b) e as derivadas parciais de 1^a ordem existem então o plano tangente a superfície $z = f(x,y)$ no ponto (a,b) é horizintal;

(b) Todos os pontos críticos de uma função $f(x,y)$ são máximos locais ou mínimos locais de $f(x,y)$.

(c) Se $\nabla f(a,b) = (0,0)$ então o ponto (a,b) é ponto crítico da função $f(x,y)$.

(d) Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. O ponto $(a,b) = (0,0)$ não é ponto crítico da função f.

●○○○

4.21 Para as funções abaixo, calcule todas as derivadas de 2^a ordem:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(b) $f(x,y) = \ln(x-y)$;

(c) $f(x,y) = 2\,x\,e^y - 3\,y\,e^{-x}$;

(d) $f(x,y) = \text{sen}(x - 2\,y)$.

●●○○

4.22 Para as funções abaixo, mostre que as derivadas mistas $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ são iguais.

(a) $f(x,y,z) = e^{-x}\text{sen}(yz)$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{2\,z}{x+y}$.

●●●○

4.23 Mostre que a função dada satisfaz a equação diferencial indicada.

(a) **Equação de Laplace:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$

função: $z = e^x \operatorname{sen}(y)$

(b) **Equação da onda:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad c \neq 0;$

função: $z = \operatorname{sen}(\omega\, c\, t)\operatorname{sen}(\omega\, x).$

(c) **Equação do calor:** $\dfrac{\partial z}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad c \neq 0;$

função: $z = e^{-t} \cos\left(\dfrac{x}{c}\right).$

●●●○

4.24

(a) Defina cada um dos seguintes conceitos para uma função de duas variáveis:

(i) Máximo relativo e mínimo relativo;

(ii) Ponto crítico e ponto de sela.

(b) Enuncie o teste das derivadas parciais de 2^a ordem para extremos relativos e pontos de sela.

●○○○

4.25 Encontre os extremos relativos das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = -x^3 + 4\,x\,y - 2\,y^2 + 1;$

(b) $f(x, y) = x^2\, y^2.$

●○○○

4.26 Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y) = e^{xy}\operatorname{sen}(x^2 - y^2).$

●●○○

4.27 Determine se as derivadas de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} da função $f(x, y) = xy^3\operatorname{sen}(x^2 - 3y^5)$ são contínuas e verifique o teorema de Clairaut para a mesma.

●●○○ **4.28** Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 3x^2 - 8y^2$ no ponto $(5, 7)$.

●●○○ **4.29** Determine uma aproximação linear para a função $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{x^2 + y^2}$ no ponto $(-3, -5)$.

●●●○ **4.30** Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 y \cos(xy\pi)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2, 1)$ e interprete estes números como inclinações.

●●●○ **4.31** Dada a função $f(x, y) = e^{xy^2}(x^3 - 2x^2 y + y - 1)$, estude o sinal da função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 1)$, e a partir destas informações, esboce a interseção do gráfico de f com o plano $y = -1$.

●●○○ **4.32** Dada a função $f(x, y) = e^{xy} \cos(2x - y)$, usando a regra da cadeia, determine:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, se $x(t) = 3t^2 - 1$ e $y(t) = 2t + 1$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, se $x(s, t) = 2t^2 + s^3$ e $y(s, t) = 3st + 1$.

●●●○ **4.33** Em cada um dos itens anteriores, substitua as funções x e y, obtenha $g(t) = f(x(t), y(t))$ e $h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$, e calcule $\dfrac{dg}{dt}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial s}$.
Comparando com os resultados obtidos no problema 4.32, o que você pode notar?

●●●○ **4.34** Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e $x(u, v) = 2u^2 - v$ e $y(u, v) = 3uv^2$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$.

●●●○ **4.35** Dada a função $F(x, y, z) = 10x^2 - 3y^2 + 4z^2$, determine as equações do plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = 2$ no ponto $(-1, 2, -1)$ e a equação da reta normal à esta superfície no mesmo ponto.

●●●● **4.36** Mostre que a função $f(x, y) = \text{tg}(xy)$ é diferenciável:

●●●○ **4.37** Determine o conjunto dos pontos em que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável.

●●●● **4.38** Mostre que a equação

$$3x^2y + \text{sen}(2y) = x$$

define implicitamente pela menos uma função $y = y(x)$ com $y(0) = 0$. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

●●●● **4.39** Mostre que a equação

$$e^{2x+3y+z} + 6xyz = 1$$

define implicitamente pela menos uma função $z = z(x, y)$ com $z(0, 0) = 0$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

●●○○ **4.40** Determine as equações das retas que sejam tangentes à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralelas à reta $2x + y = 7$.

●●○○ **4.41** Determine as equações das retas que sejam tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta $4x + 5y = 13$.

●●●○ **4.42**

(a) Escreva uma expressão definindo a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = (a, b)$

(b) Como interpretá-la como taxa de variação? Como interpretá-la geometricamente?

(c) Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Usando a definição, calcule a derivada direcional de f no ponto (1,1) e na direção do vetor $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

••••

4.43

(a) Expresse $D_u f$ em termos de ∇f

(b) Explique o significado geométrico do gradiente.

(c) Considere $f(x, y) = x^2 + xy$. Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 2)$ e na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (3, 4)$.

4.1 Lembre-se da definição de derivadas parciais. Lembre-se, também, que para se derivar com relação a x, considerey constante. O procedimento é análogo para se derivar com relação a y, ou seja, considere x constante.

4.2 Verifique a afirmativa para $f(x,y) = e^{x+y}$ e lembre-se da regra para calcular as derivadas parciais de $f(x,y)$.

4.3 Lembre-se que

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

e que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Lembre-se de utilizar as regras de derivação, atenção para a regra da cadeia.

4.4 Derive parcialmente utilizando a regra da cadeia e regra do quociente.

4.5 Note que $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{dg(x_0)}{dx}$, ou seja, a derivada parcial de f no ponto (x_0, y_0) com relação a x, nada mais é do que a inclinação da reta tangente a curva g, que é intersecção do plano y_0 com o gráfico de f, no ponto x_0. Perceba que a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto é dado por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e lembre-se da interpretação geométrica para a derivada nas funções de uma variável.

4.6 Utilize a regra do quociente e lembre-se da definição de derivada.

4.7 Lembre-se que $f_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$. Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_y(x,y),$$

logo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h}.$$

Semelhantemente para $f_{xy}(x,y)$, temos

$$f_{xy}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x,y+h) - f_x(x,y)}{h}.$$

Observe a continuidade das derivadas mistas no ponto.

4.8 Utilize o critério de diferenciabilidade: se as derivadas parciais de uma função existem e são contínuas num ponto, então a função é diferenciável neste ponto. Lembre-se que $L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$.

4.9 Utilize as equações que calculam o plano tangente e calculam a reta normal de $f(x,y)$ em um ponto (x_0, y_0). Utilize as equações que expressam o cálculo de Δz , dz e de $z = f(x,y)$. Perceba a diferença entre a variação da linearização e a variação da função.

4.10 Você pode utilizar o seguinte teorema: Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (x_0, y_0). Utilize a contrapositiva deste teorema para a sua resposta. Use a contrapositiva do seguinte resultado: toda função diferenciável é contínua. Verifique se f é diferenciável em $(0, 0)$ pela definição, pois esta é uma hipótese para a existência do plano tangente em $(0, 0, 0)$. Considere uma esfera de centro (α, β, γ) e raio r; além disso, considere (x_0, y_0, z_0) um ponto dessa esfera $(z \geq 0)$. Encontre a equação da reta normal que passa por este ponto genérico, conclua que $\tau = z_0 - z$ e daí conclua que o ponto em comum (x, y, z) é o centro (α, β, γ) da esfera.

4.11 Lembre-se da regra da cadeia caso 1 e caso 2.

4.12 Na forma explícita temos $z = f(x, y)$, já na forma implícita temos $F(x, y) = 0$. Dê a sua resposta com maiores detalhes. Já para a segunda alternativa utilize o caso 1 da regra da cadeia para ambos os lados da igualdade.

4.13 Para a resolução da alternativas utilize a regra da cadeia, levando em consideração os seus "casos". Na letra b, utilize a regra da cadeia para calcular $\dfrac{dz}{dt}$. Para calcular $\dfrac{d^2z}{dt^2}$, basta derivar $\dfrac{dz}{dt}$, em relação à t.

4.14 Use o teorema da função implícita.

4.15 Use a definição de derivada direcional. Na outra alternativa utilize a regra da cadeia para calcular $g'(h)$ e use a definição de derivada para encontrar $g'(0)$.

4.16 Use a definição de vetor gradiente. Faça uma análise geométrica do vetor gradiente.

4.17 A derivada direcional de uma função diferenciável f na direção do vetor unitário $\mathbf{u}$ no ponto (x, y) é dado por

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

Verifique, em cada ítem, se o vetor $\mathbf{v}$ dado é unitário, se for, faça $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, caso não seja unitário, considere $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$. Em seguida, substitua o ponto $P = (x_0, y_0)$ dado em $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$.

4.18 Utilize a definição de derivada direcional. Utilize $\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$ e $||\nabla f(x_0, y_0))|| = \sqrt{(f_x(x_0, y_0))^2 + (f_y(x_0, y_0))^2}$. Lembre-se que o produto escalar entre dois vetores ortogonais é nulo. Faça o produto escalar entre $\nabla f(1, 2)$ e o vetor unitário $\mathbf{u} = (a, b)$.

4.19 Em cada ítem, calcule cada uma das derivadas superiores membro a membro e verifique a igualdade comparando os resultados.

4.20 As derivadas parciais, caso existam, são nulas em um ponto de máximo local. Substitua este resultado na equação do plano tangente. No seu raciocínio, considere o teste da segunda derivada. No seu raciocínio, considere a definição de ponto crítico. Considere a definição de ponto crítico e verifique se as derivadas parciais existem no ponto dado.

4.21 Em cada ítem, calcule as derivadas parciais de primeira ordem e a partir delas calcule as derivadas parciais de segunda ordem. Tenha atenção com as regras de derivação.

4.22 Atenção com a notação utilizada. Por exemplo, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ indica que você deve derivar f primeiro em relação a x, depois em relação a y mais duas vezes. Identifique esta ordem lendo o denominador da direita para a esquerda. Verifique a igualdade comparando os resultados obtidos.

4.23 Em cada ítem, aparecem derivadas parciais de até segunda ordem. Calcule estas derivadas parciais e susbstitua nas equações para verificá-las.

4.24 Estes conceitos, encontardos em livros de cálculo diferencial, utilizam as derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

4.25 Em cada ítem, obtenho os pontos críticos calculando as derivadas parciais e igualando-as a zero. Resolva o sistema de equações. Finalmente, classifique estes pontos críticos utilizando o teste da segunda derivada.

4.26 Ao calcular a derivada parcial de z em relação à x, considere y constante e vice-versa.

4.27 Ao calcular a derivada parcial ce z em relação à x, considere y constante e voc-versa.

4.28 Utilize a fórmula para o cálculo do plano tangente.

4.29 Use a equação do plano tangente.

4.30 Geometricamente, as derivadas parcias, calculadad num ponto (x_0, y_0), são coeficientes angulaes de retas tangentes, paralelas aos eixos x e y.

4.31 Encontre os intervalos nos quais a função $g(x)$ tem imagem negativa e os intervalos onde a função tem imagem positiva e os valores de x tais que $g(x) = 0$

4.32 Utilize a equação da regra da cadeia.

4.33 Derive h em relação à s e analise a equivalência de resultados com a questão anterior.

4.34 Utilize a equação da regra da cadeia.

4.35 Use a equação do plano tangente à superfície de nível.

4.36 Verifique a continuidade de suas derivadas parciais de primeira ordem.

4.37 Verifique a continuidade das derivadas parciais em $\mathbb{R}^2$.

4.38 Utilize o teorema da função implicita.

4.39 Verifique a continuidade das derivadas parciais e utilize o teorema da função implicita.

4.40 Use a equação da reta s na forma paramétrica e lembre-se que vetores perpendiculares tem produto interno igual a zero.

4.41 Esta questão pode ser resolvida com o mesmo metodo do exercício anterior. Se for oportuno, tente de outra forma. Utilize o teorema da função implicita.

4.42 Considere $z = f(x, y)$ uma superfície e v um vetor diretor de um plano que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ da superfície.

4.43 Note que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal ao plano tangente à superfície no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

Respostas

4.1

(a) Defina as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$;

Solução: Seja $f(x, y)$. Então as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ são definidas por

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ f_y(x, y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

(b) Descreva um procedimento para calcularmos as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ da função $z = f(x, y)$.

Solução: Seja $z = f(x, y)$. Para calcularmos $f_x(x, y)$ devemos tratar y como uma constante e derivar $f(x, y)$ em relação a x. Analogamente, para calcularmos $f_y(x, y)$ devemos tratar x como uma constante e derivar $f(x, y)$ em relação a y.

4.2 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos casos, explique. Se a afirmação for falsa, explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $z = f(x, y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ então $z = c(x + y)$;

Solução: Falso, pois para $f(x, y) = e^{x+y}$ temos que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}$.

(b) Se $z = f(x)\, g(y)$ então $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x)\, g(y) + f(x)\, g'(y)$.

Solução: Verdadeiro, pois $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x)g(y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f(x)g'(y)$, e logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x)g(y) + f(x)g'(y).$$

4.3 Calcule as derivadas parciais como indicado:

(a) Usando a definição calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para $f(x, y) = xy^2 - x^3y$.

Solução: Pela definição de derivada parcial temos que

$$f_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)y^2-(x+h)^3y-xy^2+x^3y}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{xy^2+hy^2-x^3y-3x^2hy-3xh^2y-h^3y-xy^2+x^3y}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(y^2-3x^2y-3xhy-h^2y)}{h} = \lim_{h\to 0} y^2-3x^2y-3xhy-h^2y\\
&= (y^2-3x^2y)+\lim_{h\to 0}(-3xhy-h^2y)\\
&= y^2-3x^2y;\\
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x(y+h)^2-x^3(y+h)-xy^2+x^3y}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{xy^2+2xyh+xh^2-x^3y-x^3h-xy^2+x^3y}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2xy+xh-x^3)}{h} = \lim_{h\to 0} 2xy+xh-x^3\\
&= (2xy-x^3)+\lim_{h\to 0} xh\\
&= 2xy-x^3
\end{aligned}$$

(b) $f(x,y) = \text{sen}(3x)\cos(x^2+y^2)$; $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$;

Solução: Neste item usaremos a regra do produto e a regra da cadeia para funções de uma variável

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{d}{dx}(\text{sen}(3x))\cos(x^2+y^2) + \text{sen}(3x)\frac{d}{dx}(\cos(x^2+y^2)) \\ &= \cos(3x)\frac{d}{dx}(3x)\cos(x^2+y^2) - \text{sen}(3x)\text{sen}(x^2+y^2)\frac{d}{dx}(x^2+y^2) \\ &= 3\cos(3x)\cos(x^2+y^2) - 2x\text{sen}(3x)\text{sen}(x^2+y^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \text{sen}(3x)\left(\frac{d}{dy}(\cos(x^2+y^2))\right) \\ &= \text{sen}(3x)\Big(-\text{sen}(x^2+y^2)\frac{d}{dy}(x^2+y^2)\Big) \\ &= -2y\text{sen}(3x)\text{sen}(x^2+y^2) \end{aligned}$$

(c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$;

Solução: Neste item usaremos a regra do quociente para funções de uma variável

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

(d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$; $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.

Solução: Neste item usaremos a regra da cadeia para funções de uma variável

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{-(x^2+y^2)}\frac{d}{dx}(-(x^2+y^2)) &= -2x\,e^{-(x^2+y^2)} \\ f_y(x,y) &= e^{-(x^2+y^2)}\frac{d}{dy}(-(x^2+y^2)) &= -2y\,e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

4.4 Calcule as derivadas parciais e as derivadas parciais de ordem superior como indicado:

(a) $f(x,y,z)=\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}$; $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ e $f_z(x,y,z)$;

Solução: Neste item em cada derivada parcial usaremos a regra da cadeia para funções de uma variável

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}}\frac{d}{dx}(3x^2+y^2-2z^2) &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}}\\
f_y(x,y,z) &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}}\frac{d}{dy}(3x^2+y^2-2z^2) &= \frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}}\\
f_z(x,y,z) &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}}\frac{d}{dz}(3x^2+y^2-2z^2) &= \frac{-2z}{\sqrt{3x^2+y^2-2z^2}}
\end{aligned}$$

(b) $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{x+y+z}$; $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$ e $f_z(x,y,z)$;

Solução: Neste item em cada derivada parcial usaremos a regra do quociente para funções de uma variável

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= \frac{y(x+y+z)-xy}{(x+y+z)^2} &= \frac{y^2+yz}{(x+y+z)^2}\\
f_y(x,y,z) &= \frac{x(x+y+z)-xy}{(x+y+z)^2} &= \frac{x^2+xz}{(x+y+z)^2}\\
f_z(x,y,z) &= \frac{0(x+y+z)-xy}{(x+y+z)^2} &= \frac{-xy}{(x+y+z)^2}
\end{aligned}$$

(c) $f(x,y,z)=e^x\text{sen}(yz)$; $f_{xyz}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$;

Solução: Neste item usaremos a regra da cadeia e do produto para funções de uma variável

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\text{sen}(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=e^x\cos(yz)\,\frac{d}{dy}(yz)=ze^x\cos(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)=e^x\cos(yz)-ze^x\text{sen}(yz)\frac{d}{dz}(yz)=e^x\cos(yz)-yze^x\text{sen}(yz)$$

(d) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{y+2\,z}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$;

Solução: Neste item usaremos a derivada da função polinomial e a regra do quociente para funções de uma variável. Determinemos inicialmente $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{(y+2z)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{-x^2}{(y+2z)^2}\right) = \frac{-2x}{(y+2z)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{-2}{(y+2z)^2}$$

Calculemos $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y+2z}$$

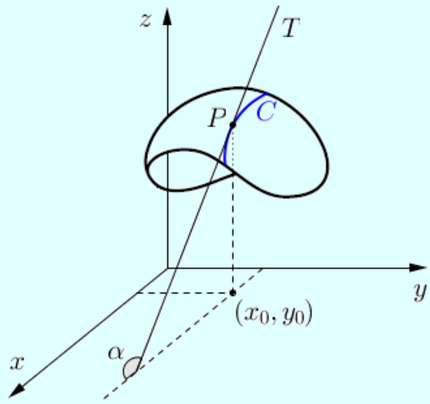
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{-2x}{(y+2z)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} &= \frac{-(-2x)(2(y+2z))(2)}{(y+2z)^4} \\ &= \frac{8x(y+2z)}{(y+2z)^4} = \frac{8x}{(y+2z)^3}\end{aligned}$$

4.5 Seja $z=f(x,y)$ uma função com derivadas parciais no ponto $(x_0,y_0)\in D_f$. Responda as seguintes perguntas, lembrando que o gráfico da função $g(x)=f(x,y_0)$ é a interseção do plano $y=y_0$ com o gráfico de $f(x,y)$.

(a) Qual é a interpretação geométrica de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$? Explique e desenhe;

Solução: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g (curva C) no ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.



Observe que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\alpha$.

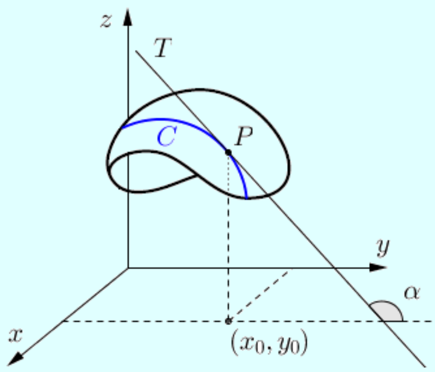
(b) Para $f(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} - y^2 + \dfrac{25}{8}$, calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $\left(\dfrac{1}{2}, 1, f\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)\right)$.

Solução: A inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, f\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)\right)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -x_0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}.$$

(c) Interprete geometricamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Explique e desenhe.

Solução: A interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ é o gráfico da função $h(y) = f(x_0, y)$. Logo, $h'(y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h (curva C) no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Observe que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\alpha$.

4.6 Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{8}$$

(a) Calcule $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$;

Solução: Como $(x,y) \neq (0,0)$, temos que $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2y - y^3)\cdot(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{(3x^2y - y^3)x^2 + (3x^2y - y^3)y^2 - (2x^2y - 2y^3)x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2(3x^2y - y^3 - 2x^2y + 2y^3) + (3x^2y - y^3)y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2(x^2y + y^3) + (3x^2y - y^3)y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)\cdot(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2(x^3 - 3xy^2) + (x^3 - 3xy^2)y^2 - (2x^3 - 2xy^2)y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2(x^3 - 3xy^2) + y^2(-x^3 - xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 3x^3y^2 - x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

(b) Use a definição e calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Solução: Da definição de derivada parcial temos

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

4.7 Considere a função dada em (8) e responda as seguintes perguntas:

(a) Use a definição e calcule $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$;

Solução:

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

(b) Usando o **Teorema de Clairaut** (veja página 817 do livro) e o resultado do item (a), o que podemos concluir sobre f_{xy} e f_{yx}?

Solução: Podemos concluir que a derivada mista f_{xy} ou a derivada mista f_{yx} ou as duas derivadas mistas não são contínuas em $(0, 0)$.

4.8 Sejam $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ e $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(a) Mostre que f é diferenciável em (x_0, y_0);

Solução: Usaremos o critério de diferenciabilidade, o qual diz que se as derivadas parciais existirem e forem contínuas em um ponto, então a função será diferenciável nesse ponto. Desta forma, note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \cos(y)$$

são contínuas em qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pois são produtos de funções contínuas. Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(b) Encontre a linearização $L(x, y)$ de f em (x_0, y_0). Compare os valores de $L(x, y)$ e $f(x, y)$ no ponto $(0.2, 0.68)$.

Solução: A linearização de uma função $f(x, y)$ é dada por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= e^0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + e^0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) x + e^0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + y - \frac{\pi}{4} + 1\right).
\end{aligned}$$

Agora, comparamos os valores de $L(x, y)$ e $f(x, y)$ em $(0.2, 0.68)$.

$$\begin{aligned}
L(0.2, 0.68) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2 + 0.68 - \frac{\pi}{4} + 1\right) \\
&\cong 0.7741
\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} f(0.2, 0.68) &= e^{0.2}\text{sen}(0.68) \\ &\cong 0.7680 \end{aligned}$$

Comparando os resultados, obtemos $|f(0.2, 0.68) - L(0.2, 0.68)| = |0.7680 - 0.7741| = 0.0061$. Podemos observar que $L(0.2, 0.68)$ é uma boa aproximação de $f(0.2, 0.68)$, pois o erro absoluto foi de aproximadamente 10^{-2}.

4.9 Considere a função f e o ponto (x_0, y_0) dados na questão 7.1.

(a) Encontre a equação do plano tangente a da reta normal ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0);

Solução: Sabemos que a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é dada por

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} z &= f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + y - \frac{\pi}{4} + 1\right). \end{aligned}$$

Também sabemos que a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \ \tau \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \tau\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y &= y_0 + \tau\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ z &= z_0 - \tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \left(0, \frac{\pi}{4}, f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) + \tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{4}\right), -1\right) \\ &= \left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \tau\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right), \ \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\tau \\
y &= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tau \\
z &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \tau.
\end{aligned}
$$

(b) Se (x_0, y_0) varia até o ponto $(0.2, 0.68)$, calcule o diferencial dz e o acréscimo Δz de f em (x_0, y_0). Compare os resultados obtidos;

Solução: O diferencial e o acréscimo são dados respectivamente por,

$$
\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\
\Delta z &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Neste caso, $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)h + \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)k \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}h + \frac{\sqrt{2}}{2}k; \\
\Delta z &= f\left(0 + h, \frac{\pi}{4} + k\right) - f\left(0, \tfrac{\pi}{4}\right) \\
&= e^h \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ varia até o ponto $(0.2, 0.68)$, temos

$$h = 0.2 \text{ e } k = 0.68 - \frac{\pi}{4}.$$

Logo,

$$dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.68 - \frac{\pi}{4}\right) \cong 0.06689$$

e

$$\Delta z = e^{0.2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 0.68 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -0.69261.$$

(c) Descreva a diferença entre dz e de Δz para uma função $f(x, y)$ qualquer.

Solução: dz é a variação da linearização $L(x, y)$ quando (x_0, y_0) varia até o ponto (x_0+h, y_0+k) e Δz é a variação da função $z = f(x, y)$ quando (x_0, y_0) varia até o ponto $(x_0 + h, y_0 + k)$.

4.10 Justifique suas respostas para as seguintes perguntas:

(a) Disseram-lhe que existe uma função $f(x,y)$ com derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ descontínuas em (x_0, y_0), que é diferenciável em (x_0, y_0). Você deve acreditar nisso?

Solução: Sim.

Justificativa 1: Use o seguinte resultado:

> Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais existem e são contínuas em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0).

Logo, se as derivadas parciais são descontínuas então a função f pode ou não ser diferenciável.

Justificativa 2: Apresente um exemplo:

Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2\,x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Entretanto, o limite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,t)$ não existe. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{||(h,k)||} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\ \text{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) Toda função descontínua não é diferenciável?

Solução: Sim, pois esta afirmação é a contrapositiva do seguinte resultado: Toda função diferenciável é contínua.

(c) Existe um plano tangente ao gráfico da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

no ponto $(0,0,0)$?

Solução: A hipótese para que exista o plano tangente ao gráfico de f em um ponto dado é que a função seja diferenciável nesse ponto. Portanto, verifiquemos se f é diferenciável em $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{||(h,k)||} = \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} G(h,k). \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\lim_{t\to 0} G(0,t) = 0; \ \lim_{t\to 0} G(t,t) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

o que implica que o limite $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} G(h,k)$ não existe.

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$. Logo, não admite plano tangente no ponto $(0,0,0)$.

(d) Para algumas superfícies, a reta normal em quaisquer de seus pontos passa por um mesmo objeto geométrico. Qual é o objeto comum para a esfera?

Solução 1: Sejam S uma esfera, P um ponto de S, O o centro desta esfera e T_pS o plano tangente à S no ponto P. De fato, seja r uma reta normal à esfera em P - note que $r \perp T_pS$. Seja $\overline{OP}$ um raio de S. Este é perpendicular à T_pS; logo, $\overline{OP}$ está contido na reta r. Daí, comcluímos que r passa por O. Como r foi tomada genericamente, concluímos que todas as retas normais à esfera passam por O.

Solução 2: Considere a esfera de centro (α,β,γ) e raio r então

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = r^2 \Rightarrow z = \gamma + \sqrt{r^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}, \ \ z \geq 0.$$

Por outro lado, seja (x_0,y_0,z_0) um ponto da esfera (para $z \geq 0$). Então a equação da reta normal passando por (x_0,y_0,z_0) é dada por

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \tau\left(\frac{x_0-\alpha}{z_0-\gamma}\right) && (9)\\ y &= y_0 - \tau\left(\frac{y_0-\beta}{z_0-\gamma}\right) && (10)\\ z &= z_0 - \tau. \end{aligned}$$

Logo, $\tau = z_0 - z$. Substituindo em (11) e (10) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x_0-x}{z_0-z} &= \frac{x_0-\alpha}{z_0-\gamma} \Rightarrow x = \alpha\,,\ z = \gamma\\ \frac{y_0-y}{z_0-z} &= \frac{y_0-\beta}{z_0-\gamma} \Rightarrow y = \alpha\,,\ z = \gamma. \end{aligned}$$

Portanto, $(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$ (centro da esfera).

4.11

(a) Seja $z = f(x, y)$ com $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Enuncie a regra da cadeia para calcular $\frac{dz}{dt}$. Aplique a regra na função $z = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$, com $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$.

Solução: Regra da Cadeia (Caso 1): seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em (x, y), com $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funções diferenciáveis de t. Então $f(x(t), y(t))$ é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}(\cos(t)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)\cdot\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(t))\\ &= -\frac{1}{x}\cdot(-\operatorname{sen}(t)) + \frac{1}{y}\cdot\cos(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} + \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}\\ &= \operatorname{tg}(t) + \operatorname{cotg}(t). \end{aligned}$$

(b) Seja $z = f(x, y)$ com $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$. Enuncie a regra da cadeia para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$. Aplique a regra na função $z = \operatorname{sen}(2\,x + 3\,y)$, com $x = s + t$ e $y = s - t$.

Solução: Regra da Cadeia (Caso 2): suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, com $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ funções diferenciáveis de s e t. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x}(\text{sen}(2x+3y)) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s+t) + \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}(2x+3y)) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s-t) \\
&= 2\cos(2x+3y) \cdot 1 + 3\cos(2x+3y) \cdot 1 \\
&= 5\cos(2x+3y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}(\text{sen}(2x+3y)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s+t) + \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}(2x+3y)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s-t) \\
&= 2\cos(2x+3y) \cdot 1 + 3\cos(2x+3y) \cdot (-1) \\
&= -\cos(2x+3y).
\end{aligned}$$

4.12

(a) Descreva a diferença entre a forma explícita e a forma implícita de uma função de duas variáveis x e y. Dê um exemplo em cada caso;

Solução: Nas funções explícitas temos uma forma de determinar o valor de z em termos de x e y, ou seja, temos $z = f(x, y)$. Já nas funções implícitas, o valor de z é obtido de x e y através da resolução de uma equação da forma $F(x, y) = 0$.

Exemplos:

Forma explícita: seja f uma função tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Forma implícita: seja $y = y(x)$ uma função diferenciável dada implicitamente pela equação $y^3 + xy + x^3 = 3$.

(b) Se $F(x, y) = 0$, enuncie a regra da cadeia para calcular implicitamente $\frac{dy}{dx}$. Se $F(x, y, z) = 0$, enuncie a regra da cadeia para calcular implicitamente $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dê um exemplo em cada caso.

Solução: Suponhamos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, $y = f(x)$, em que $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x, já que x e y são funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

No entanto, $\dfrac{dx}{dx} = 1$, então se $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ resolvemos para $\dfrac{dy}{dx}$ e obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Exemplo 1: Determine $\dfrac{dy}{dx}$ se $y\cos(x) = x^2 + y^2$.

Solução: A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = y\cos(x) - x^2 - y^2 = 0$$

e dessa forma, da equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

teremos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(-y\,\mathrm{sen}(x) - 2x)}{\cos(x) - 2y} = \frac{y\,\mathrm{sen}(x) + 2x}{\cos(x) - 2y}$$

Suponhamos agora que z seja dada implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação $F(x, y, z) = 0$. Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Entetanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \text{ e } \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0,$$

portanto, essa equação resulta em

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, resolvemos em $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Daí, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Analogamente teremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Entretanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \text{ e } \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0,$$

portanto, essa equação resulta em

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, resolvemos em $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Exemplo 2: Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $e^z = xyz$.

Solução: A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y, z) = e^z - xyz = 0.$$

Dessa forma, das equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(-yz)}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(-xz)}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

4.13 Usando a regra da cadeia apropriada, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$;

Solução: Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot (-\operatorname{sen}(t)) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x\,y}} \cdot \cos(t) \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2\cos(t)}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}} \cdot \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2\cos(t)}\sqrt{\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}} \cdot \cos(t) \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2}(\operatorname{tg}(t))^{3/2} + \frac{1}{2}(\operatorname{cotg}(t))^{1/2}.
\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ para $z = \dfrac{x^2}{y}$, $x = t^2$ e $y = t+1$;

Solução: Notemos que

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Vamos calcular inicialmente $\dfrac{dz}{dt}$. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{2x}{y}\cdot 2t - \frac{x^2}{y^2}\cdot 1\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{4t^3}{t+1} - \frac{t^4}{(t+1)^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{8t^3+12t^2}{(t+1)^2} - \frac{2t^5+6t^4+4t^3}{(t+1)^4}\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{6t^5+22t^4+28t^3+12t^2}{(t+1)^4}
\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ para $z = \sqrt{25-5x^2-5y^2}$, $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\text{sen}(\theta)$;

Solução: Usando a regra da cadeia teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= \frac{-10x}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}}\cdot\cos(\theta) - \frac{10y}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}}\cdot\text{sen}(\theta)\\
&= \frac{-5}{\sqrt{25-5r^2}}\cdot\left(r\cos^2(\theta) + r\text{sen}^2(\theta)\right)\\
&= \frac{-5r(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta))}{\sqrt{25-5r^2}} = \frac{-5r}{\sqrt{25-5r^2}}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-10x}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}} \cdot (-r\,\mathrm{sen}(\theta)) - \frac{10y}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}} \cdot r\cos(\theta) \\
&= \frac{5r}{\sqrt{25-5r^2}} \cdot \left(r^2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) - r^2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(d) $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w = x\cos(yz)$, $x = s^2$, $y = t^2$ e $z = s - 2t$.

Solução: Usando a regra da cadeia para função de três variáveis, teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \\
&= \cos(yz) \cdot 2s + (-x\,\mathrm{sen}(yz) \cdot z) \cdot 0 + (-x\,\mathrm{sen}(yz) \cdot y) \cdot 1 \\
&= 2s\cos(t^2s - 2t^3) - s^2t^2\,\mathrm{sen}(t^2s - 2t^3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\
&= \cos(yz) \cdot 0 + (-x\,\mathrm{sen}(yz) \cdot z) \cdot 2t + (-x\,\mathrm{sen}(yz) \cdot y) \cdot (-2) \\
&= -2xzt\,\mathrm{sen}(yz) + 2xy\,\mathrm{sen}(yz) \\
&= (-2ts^3 + 6s^2t^2)\mathrm{sen}(st^2 - 2t^3)
\end{aligned}
$$

4.14 Diferenciando implicitamente, calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{dy}{dx}$ para $\cos(x) + \mathrm{tg}(xy) + 5 = 0$;

Solução: Seja $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = \cos(x) + \mathrm{tg}(xy) + 5$, assim, da equação a seguir, podemos determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{se} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= -\operatorname{sen}(x) + \frac{\cos^2(xy)y + \operatorname{sen}^2(xy)y}{\cos^2(xy)} = -\operatorname{sen}(x) + \frac{y}{\cos^2(xy)} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\cos^2(xy)x + \operatorname{sen}^2(xy)x}{\cos^2(xy)} = \frac{x}{\cos^2(xy)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \left(\operatorname{sen}(x) - \frac{y}{\cos^2(xy)}\right) \div \left(\frac{x}{\cos^2(xy)}\right) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos^2(xy) - y}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0.
\end{aligned}
$$

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para $x\ln(y) + zy^2 + z^2 = 8$.

Solução: Seja $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = x\ln(y) + zy^2 + z^2 - 8$, assim, das equações a seguir, podemos determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{se} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\ln(y)}{y^2 + 2z} \quad \text{se } y^2 + 2z \neq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{se} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x \cdot \dfrac{1}{y} + 2zy}{y^2 + 2z} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x + 2y^2 z}{y^3 + 2zy} \quad \text{se } y^3 + 2zy \neq 0.
\end{aligned}
$$

4.15 Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\vec{u} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \text{sen}(\theta)\mathbf{j}$

(a) Usando a definição, calcule a derivada direcional $D_u f(x_0, y_0)$ de f em (x_0, y_0) na direção do vetor $\vec{u}$.

Solução: Sabemos que a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ é

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir. Dessa forma

$$\begin{aligned}
D_u f(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cos(\theta), y_0 + h\text{sen}(\theta)) - f(x_0, y_0)}{h} \\
D_u f(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h\cos(\theta))^2 + (y_0 + h\text{sen}(\theta))^2 - x_0^2 - y_0^2}{h} \\
D_u f(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h\cos(\theta) + h^2\cos^2(\theta) + 2y_0 h\text{sen}(\theta) + h^2\text{sen}^2(\theta)}{h} \\
D_u f(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0\cos(\theta) + 2y_0\text{sen}(\theta)) + h^2(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta))}{h} \\
D_u f(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} (2x_0\cos(\theta) + 2y_0\text{sen}(\theta) + h) \\
D_u f(x_0, y_0) &= 2x_0\cos(\theta) + 2y_0\text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

(b) Considere $g(h) = f(x_0 + h\cos(\theta), y_0 + h\,\text{sen}(\theta))$. Verifique que $g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\text{sen}(\theta)$ e $g'(0) = D_u f(x_0, y_0)$. Conclua que

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\text{sen}(\theta).$$

Solução: Como $g(h) = f(x_0 + h\cos(\theta), y_0 + h\,\text{sen}(\theta))$, pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned}
g'(h) = \frac{dg}{dh} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} \\
&= 2x \cdot \cos(\theta) + 2y \cdot \text{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

Mas, $x = x_0 + h\cos(\theta)$ e $y = y_0 + h\text{sen}(\theta)$. Logo,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dh} = 2x_0\cos(\theta) + 2y_0\text{sen}(\theta). \tag{11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\cos(\theta), y_0+h\,\mathrm{sen}(\theta)) - f(x_0,y_0)}{h} \\ &= D_u f(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Mas, item (a) tem-se $D_u f(x_0, y_0) = 2x_0 \cos(\theta) + 2y_0 \mathrm{sen}(\theta)$. Portanto, por (11), obtemos

$$D_u f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\mathrm{sen}(\theta).$$

4.16 Faça o que se pede:

(a) Defina o vetor gradiente da função $z = f(x, y)$ e enuncie suas propriedades;

Solução: Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

denomina-se **gradiente** de f em (x_0, y_0).

Propriedades: O vetor gradiente de $z = f(x, y)$ é um vetor no plano xy que aponta na direção de maior crescimento da função f.

(b) Descreva a relação entre o vetor gradiente e as curvas de nível da função $z = f(x, y)$.

Solução: Se f é diferenciável em (x_0, y_0) e $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, então $\nabla f(x_0, y_0)$, é um vetor normal à curva de nível em (x_0, y_0).

4.17 Calcule a derivada direcional das seguintes funções, no ponto P na direção do vetor $\mathbf{v}$:

Observação: Sabemos que a derivada direcional de uma função diferenciável f na direção do vetor unitário $\mathbf{u}$ no ponto (x, y) é dado por

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\mathbf{u}.$$

Dessa forma, nos itens a seguir, verificaremos inicialmente se o vetor $\mathbf{v}$ dado é unitário, se for, faremos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, caso não seja unitário, tomaremos $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$.

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P = (3,4)$ e $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$;

Solução: Note que

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

dessa forma,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

determinemos agora o gradiente de f,

$$\nabla f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$$

dessa forma,

$$\nabla f(3,4) = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\mathbf{j} \Rightarrow \nabla f(3,4) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

portanto,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(3,4) &= \nabla f(3,4) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

(b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P = (0,0)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;

Solução: Notemos inicialmente que

$$\nabla f(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}\mathbf{i} - 2ye^{-(x^2+y^2)}\mathbf{j}$$

dessa forma

$$\nabla f(0,0) = \vec{0}$$

portanto

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = 0$$

(c) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$, $P = (1,1)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i}$;

Solução: Note que

$$||\mathbf{v}|| = 1 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

determinemos agora o vetor gradiente

$$\nabla f(x,y) = -2x\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)\mathbf{i} - 2y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)\mathbf{j}$$

daí

$$\nabla f(1,1) = -2\,\mathrm{sen}(2)\mathbf{i} - 2\,\mathrm{sen}(2)\mathbf{j}$$

dessa forma

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1,1) &= \nabla f(1,1)\cdot(1,0) \\ &= (-2\,\text{sen}(2), -2\,\text{sen}(2))\cdot(1,0) \\ &= -2\,\text{sen}(2) \end{aligned}$$

(d) $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$, $P = (2,3)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{j}$.

Solução: Note que

$$||\mathbf{v}|| = 1 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

determinemos agora o vetor gradiente

$$\nabla f(x,y) = \frac{2x}{x^2 - y}\mathbf{i} - \frac{1}{x^2 - y}\mathbf{j}$$

daí

$$\nabla f(2,3) = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

dessa forma

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(2,3) &= \nabla f(2,3)\cdot(0,1) \\ &= (4,-1)\cdot(0,1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

4.18 Considere a função $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$.

(a) Calcule $D_u f(x,y)$ com $\mathbf{u} = \cos(\theta)\,\mathbf{i} + \text{sen}(\theta)\,\mathbf{j}$ para $\theta = \dfrac{\pi}{3}$;

Solução: $\mathbf{u} = (\cos(\pi/3), \text{sen}(\pi/3)) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Então,

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (-2\,x, -2\,y); \\ D_{\mathbf{u}}f(x,y) &= \nabla f(x,y)\cdot\mathbf{u} \\ &= (-2x,-2y)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -x - \sqrt{3}\,y. \end{aligned}$$

(b) Calcule $\nabla f(1,2)$ e $||\nabla f(1,2)||$;

Solução: Do item (a) temos que

$$\nabla f(x,y) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$$

assim,

$$\nabla f(1,2) = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

e

$$\begin{aligned} ||\nabla f(1,2)|| &= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(c) Ache um vetor unitário $\mathbf{u}$ ortogonal a $\nabla f(1,2)$ e calcule $D_u f(1,2)$;

Solução: Temos que ter $\mathbf{u} \perp \nabla f(1,2)$ e $||\mathbf{u}|| = 1$, dessa forma seja $\mathbf{u} = (a,b)$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f(1,2) = 0 \Rightarrow (a,b) \cdot (-2,-4) = 0 \Rightarrow a = -2b$$

Daí

$$\begin{aligned} 1 &= ||u|| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{4b^2 + b^2} \\ &= \sqrt{5b^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Note que,

$$D_{\mathbf{u}} f(1,2) = \nabla f(1,2).\mathbf{u} = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1,2) &= \nabla f(1,2) \cdot \mathbf{u} \\ &= (-2,-4) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0. \end{aligned}$$

(d) Discuta o significado geométrico do resultado do item (c).

Solução: No item (c) temos que os vetores $\nabla f(1,2)$ e $\mathbf{u}$ são perpendi- culares, o que implica que $D_{\mathbf{u}}f(1,2) = 0$. Portanto, a taxa de variação de f na direção $\mathbf{u}$, perpendicular ao gradiente $\nabla f(1,2)$, é nula.

4.19 Seja $f(x,y) = y\,e^x + x\,\ln(z)$. Mostre que:

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$;

Solução: Determinemos inicialmente $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{z}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + \ln(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{1}{z}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

(b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$.

Solução: Calculemos cada uma das derivadas de ordem superior

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + \ln(z) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = -\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = -\frac{1}{z^2}$$

e finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -\frac{x}{z^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = -\frac{1}{z^2}$$

portanto,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$$

4.20 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Em qualquer um dos caso, explique. Se for falsa explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $f(x,y)$ tem um máximo local no ponto (a,b) e as derivadas parciais de 1^a ordem existem então o plano tangente a superfície $z = f(x,y)$ no ponto (a,b) é horizontal;

Solução: Verdadeiro, pois se (a,b) é um ponto de máximo local e as derivadas parciais existem, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Subistituindo na equação do plano tangente obtemos $z = z_0 = f(a,b)$. Logo, o plano tangente é horizontal.

(b) Todos os pontos críticos de uma função $f(x,y)$ são máximos locais ou mínimos locais de $f(x,y)$.

Solução: Falso, pois existem pontos críticos denominados de pontos de sela, os quais não são máximo e nem mínimo.

Por exemplo, para $f(x,y) = y^2 - x^2$ tem-se $f_x(x,y) = -2x$ e $f_y(x,y) = 2y$ e, logo, o único ponto crítico é $(0,0)$. Mas, $f(x,0) = -x^2 < 0$ se $x \neq 0$ e $f(0,y) = y^2 > 0$ se $y \neq 0$. Logo, no disco de centro $(0,0)$ existem pontos para os quais f é positiva e pontos para os quais f é negativa. Logo, $f(0,0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f, e portanto, f não tem valor extremo.

(c) Se $\nabla f(a,b) = (0,0)$ então o ponto (a,b) é ponto crítico da função $f(x,y)$.

Solução: Verdadeiro, pois pela definição de ponto crítico, temos que: Um ponto (a,b) é chamado de ponto crítico de f se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ ou se uma das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ não existe.

(d) Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. O ponto $(a,b) = (0,0)$ não é ponto crítico da função f.

Solução: Falso, $(0,0)$ é ponto crítico de f, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}. \end{aligned}$$

Mas, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$, logo, o limite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ não existe, o que implica que a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe. Portanto, pela definição $(0,0)$ é um ponto crítico de f.

4.21 Para as funções abaixo, calcule todas as derivadas de 2^a ordem:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

Solução: Determinemos inicialmente as derivadas parciais de primeira ordem. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{2}\cdot y\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= -\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}
\end{aligned}$$

(b) $f(x,y)=\ln(x-y)$

Solução: Determinemos inicialmente as derivadas parciais de primeira ordem. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x-y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y-x}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -1\cdot(x-y)^{-2}\cdot 1=\frac{-1}{(x-y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= -1\cdot(y-x)^{-2}\cdot(-1)=\frac{1}{(y-x)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= -1\cdot(x-y)^{-2}\cdot(-1)=\frac{1}{(x-y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -1\cdot(y-x)^{-2}\cdot 1=\frac{-1}{(y-x)^2}
\end{aligned}$$

(c) $f(x,y)=2\,x\,e^y-3\,y\,e^{-x}$

Solução: Determinemos inicialmente as derivadas parciais de primeira ordem. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\,e^y+3\,y\,e^{-x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\,x\,e^y-3\,e^{-x}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -3\, y\, e^{-x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2\, e^{y} + 3\, e^{-x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 2\, e^{y} + 3\, e^{-x} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2\, x\, e^{y}
\end{aligned}$$

(d) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2\, y)$.

Solução: Determinemos inicialmente as derivadas parciais de primeira ordem. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x - 2y) \;\text{ e }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\, \cos(x - 2y)$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\operatorname{sen}(x - 2y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 2\operatorname{sen}(x - 2y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= -\operatorname{sen}(x - 2y) \cdot (-2) = 2\operatorname{sen}(x - 2y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2\operatorname{sen}(x - 2y) \cdot (-2) = -4\operatorname{sen}(x - 2y)
\end{aligned}$$

4.22 Para as funções abaixo, mostre que as derivadas mistas $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ são iguais.

(a) $f(x, y, z) = e^{-x}\operatorname{sen}(yz)$

Solução:

$$\text{calculando } \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \left| \begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= -e^{-x}\operatorname{sen}(yz) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) &= -e^{-x} \cos(yz) \cdot z = -ze^{-x} \cos(yz) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y, z) &= ze^{-x} \cos(yz) \cdot z = z^2 e^{-x}\operatorname{sen}(yz)
\end{aligned} \right.$$

$$\text{calculando } \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & e^{-x}\cos(yz)\cdot z = ze^{-x}\cos(yz) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & = & -ze^{-x}\cos(yz) \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y,z) & = & ze^{-x}\text{sen}(yz)\cdot z = z^2e^{-x}\text{sen}(yz) \end{array}\right.$$

$$\text{calculando } \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & ze^{-x}\cos(yz) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & = & -ze^{-x}\text{sen}(yz)\cdot z = -z^2e^{-x}\text{sen}(yz) \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y,z) & = & z^2e^{-x}\text{sen}(yz) \end{array}\right.$$

portanto,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

(b) $f(x,y) = \dfrac{2\,z}{x+y}$.

Solução:

$$\text{calculando } \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{0\cdot(x+y)-2z\cdot 1}{(x+y)^2} = \dfrac{-2z}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & = & \dfrac{0\cdot(x+y)^2-(-2z)\cdot 2(x+y)\cdot 1}{(x+y)^4} = \dfrac{4z}{(x+y)^3} \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y,z) & = & \dfrac{0\cdot(x+y)^3-4z\cdot 3\cdot(x+y)^2}{(x+y)^6} = \dfrac{-12z}{(x+y)^4} \end{array}\right.$$

$$\text{calculando } \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{0\cdot(x+y)-2z\cdot 1}{(x+y)^2} = \dfrac{-2z}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & = & \dfrac{0\cdot(x+y)^2-(-2z)\cdot 2(x+y)\cdot 1}{(x+y)^4} = \dfrac{4z}{(x+y)^3} \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} & = & \dfrac{0\cdot(x+y)^3-4z\cdot 3\cdot(x+y)^2\cdot 1}{(x+y)^6} = \dfrac{-12z}{(x+y)^4} \end{array}\right.$$

$$\text{calculando } \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \left| \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{-2z}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & \dfrac{0 \cdot (x+y)^2 - (-2z) \cdot 2(x+y) \cdot 1}{(x+y)^4} = \dfrac{4z}{(x+y)^3} \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} & = & \dfrac{0 \cdot (x+y)^3 - 4z \cdot 3 \cdot (x+y)^2 \cdot 1}{(x+y)^6} = \dfrac{-12z}{(x+y)^4} \end{array} \right.$$

portanto,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$$

4.23 Mostre que a função dada satisfaz a equação diferencial indicada.

(a) **Equação de Laplace:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$

função: $z = e^x \operatorname{sen}(y)$

Solução: Note que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \operatorname{sen}(y) \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos(y)$$

dessa forma,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \operatorname{sen}(y) \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y)$$

portanto z satisfaz a Equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(b) **Equação da onda:** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \ \ c \neq 0;$

função: $z = \operatorname{sen}(\omega\, c\, t)\operatorname{sen}(\omega\, x)$.

Solução: Note que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = wc\, \cos(wct)\operatorname{sen}(wx) \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial x} = w \operatorname{sen}(wct) \cos(wx)$$

dessa forma,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -w^2 c^2 \operatorname{sen}(wct)\operatorname{sen}(wx) \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -w^2 \operatorname{sen}(wct)\operatorname{sen}(wx)$$

portanto z satisfaz a Equação da onda,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(c) **Equação do calor:** $\dfrac{\partial z}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $c \neq 0$;

função: $z = e^{-t}\cos\left(\dfrac{x}{c}\right)$.

Solução: Note que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t}\cos\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{c}e^{-t}\text{sen}\left(\frac{x}{c}\right)$$

dessa forma,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2}\cdot e^{-t}\cos\left(\frac{x}{c}\right)$$

portanto z satisfaz a Equação do calor,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

4.24

(a) Defina cada um dos seguintes conceitos para uma função de duas variáveis:

(i) Máximo relativo e mínimo relativo;

Solução: Uma função de duas variáveis tem um máximo relativo em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). [Isto significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) em alguma bola aberta com centro (a, b)]. O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo relativo**. Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo relativo** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo relativo**.

(ii) Ponto crítico e ponto de sela.

Solução: Um ponto (a, b) é chamado **ponto crítico** (ou ponto estacionário) de f se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir.

Seja

$$H = H(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right]^2.$$

Definimos como **ponto de sela**, o ponto (a, b) para o qual $H(a, b) < 0$.

(b) Enuncie o teste das derivadas parciais de 2^a ordem para extremos relativos e pontos de sela.

Solução: Teste da Segunda Derivada. Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$H = H(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right]^2.$$

(i) Se $H > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é um mínimo local.

(ii) Se $H > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é um máximo local.

(iii) Se $H < 0$, então $f(a,b)$ não é mínimo local e nem máximo local.

4.25 Encontre os extremos relativos das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = -x^3 + 4\,x\,y - 2\,y^2 + 1$

Solução: Determinemos inicialmente os pontos críticos de f, note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 4y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 4y$$

igualando a zero as derivadas parciais, teremos

$$\begin{aligned} -3x^2 + 4y &= 0 \quad (i) \\ 4x - 4y &= 0 \quad (ii) \end{aligned}$$

de (ii) temos que

$$x = y$$

Substituindo (ii) em (i) teremos

$$\begin{aligned} -3x^2 + 4x &= 0 \\ x \cdot (-3x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

daí

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{3},$$

dessa forma, os pontos críticos são

$$A = (0,0) \quad \text{e} \quad B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

As derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8,$$

dessa forma,

$$H(0,0) = 0 \cdot (-4) - 4^2 = -16 < 0$$

portanto, $(0,0)$ é ponto de sela.

Por outro lado,

$$H\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = -8 \cdot (-4) - 4^2 = 16 > 0,$$

como

$$H\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) > 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) < 0,$$

concluímos que $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ é um ponto de máximo local.

(b) $f(x,y) = x^2\, y^2$.

Solução: Determinemos inicialmente os pontos críticos de f, note que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y$$

igualando a zero as derivadas parciais, teremos

$$\begin{aligned} 2xy^2 &= 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0 \\ 2x^2 y &= 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ y = 0, \end{aligned}$$

dessa forma, os pontos críticos ocorrem em:

$$(0,y), \ y \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ (x,0), \ x \in \mathbb{R}$$

ou seja, os pontos críticos, são todos os pontos que pertencem aos eixos x e y. Analisemos agora se esses pontos são de máximo ou mínimo local, para isto, note que as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Para $(0,y)$ temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow H(0,0) = 0,$$

portanto pelo teste da segunda derivada nada podemos afirmar.

Para $(x,0)$ temos

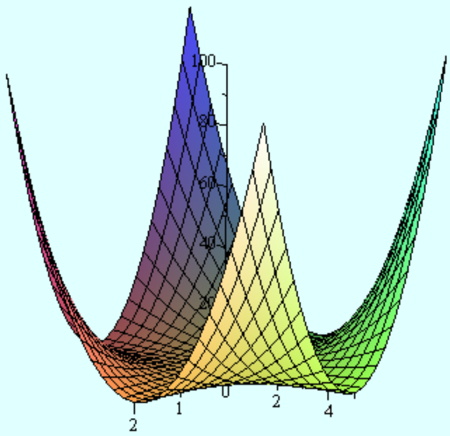
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow H(0,0) = 0,$$

portanto pelo teste da segunda derivada nada podemos afirmar.

Por outro lado, notemos que

$$f(0,y) = f(x,0) = 0 \text{ e } f(x,y) = x^2 + y^2 > 0 \; \forall x \neq 0 \text{ e } y \neq 0.$$

Logo, os pontos críticos $(x,0)$ e $(0,y)$ são pontos de mínimo (absolutos) de f.



4.26 Calcule as derivadas parciais da função $f(x,y) = e^{xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$.

Solução: Para avaliar a variação de f na direção x, devemos olhar para y como sendo uma constante. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= ye^{xy} \cdot \operatorname{sen}(x^2 - y^2) + e^{xy}[2x \cdot \cos(x^2 - y^2)] \\
&= e^{xy}[y \operatorname{sen}(x^2 - y^2) + 2x \cos(x^2 - y^2)]
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xe^{xy} \cdot \operatorname{sen}(x^2 - y^2) + e^{xy}[-2y \cdot \cos(x^2 - y^2)] \\
&= e^{xy}[x \operatorname{sen}(x^2 - y^2) - 2y \cos(x^2 - y^2)]
\end{aligned}$$

4.27 Determine se as derivadas de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} da função $f(x,y) = xy^3 \operatorname{sen}(x^2 - 3y^5)$ são contínuas e verifique o teorema de Clairaut para a mesma.

Solução: Inicialmente, vamos determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^3 \cdot \operatorname{sen}(x^2 - 3y^5) + xy^3 \cdot [2x \cos(x^2 - 3y^5)] \\
&= y^3[\cdot \operatorname{sen}(x^2 - 3y^5) + 2x^2 \cos(x^2 - 3y^5)]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3xy^2\cdot\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)+xy^3\cdot[-3\cdot 5y^4\cos(x^2-3y^5)]\\ &= 3xy^2\cdot\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)-15xy^7\cos(x^2-3y^5)\end{aligned}$$

Calculando f_{xy}, temos

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\cdot\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)+2y^3x^2\cos(x^2-3y^5)\right)=$$

$$=3y^2\cdot\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)+y^3[-15y^4\cos(x^2-3y^5)]+$$
$$+6y^2x^2\cos(x^2-3y^5)+2y^3x^2[(-15y^4)(-\mathrm{sen}(x^2-3y^5)],$$

Assim,

$$f_{xy}(x,y)=(6y^2x^2-15y^7)\cos(x^2-3y^5)+(3y^2+30x^2y^7)\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5).$$

Analogamente,

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2\cdot\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)-15xy^7\cos(x^2-3y^5)\right)=$$

$$=3y^2\cdot\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)+3xy^2[2x\cos(x^2-3y^5)]+$$
$$-15y^7\cos(x^2-3y^5)-15xy^7(2x)(-\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5)],$$

Assim,

$$f_{yx}(x,y)=(6y^2x^2-15y^7)\cos(x^2-3y^5)+(3y^2+30x^2y^7)\ \mathrm{sen}(x^2-3y^5).$$

Como f_{xy} e f_{yx} são resultados da soma de produtos de polinômios por composição de funções trigonométricas contínuas com polinômios, tais derivadas são contínuas. Além disso, os cálculos acima mostram que $f_{xy}=f_{yx}$, o que verifica o Teorema de Clairaut.

4.28 Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=3x^2-8y^2$ no ponto $(5,7)$.

Solução: A equação do plano tangente ao gráfico de uma função $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ no ponto (a,b) é dada por

$$z-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Se as derivadas parciais de f existirem e forem contínuas em um disco D contendo (a,b). Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -16y$$

são contínuas $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a equação do plano tangente no ponto $(5, 7)$ fica determinada por

$$z - f(5,7) = \frac{\partial f}{\partial x}(5,7)(x-5) + \frac{\partial f}{\partial y}(5,7)(y-7),$$

o que implica

$$z + 317 = 30(x-5) - 112(y-7)$$

4.29 Determine uma aproximação linear para a função $f(x, y) = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$ no ponto $(-3, -5)$.

Solução: Inicialmente, vamos determinar as derivadas parciais de f no ponto $(-3, -5)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2(x^2-y^2+xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2y(2x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-4xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-3,-5) = \frac{-2((-3)^2-(-5)^2+3\cdot 5)}{(9+25)^2} = \frac{-18-25+15}{34^2} = \frac{-28}{34^2} = \frac{-7}{289}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-3,-5) = \frac{-2((-3)^2-4\cdot 3\cdot 5)}{(9+25)^2} = \frac{-2(9-60)}{34^2} = \frac{102}{34^2} = \frac{3}{34}.$$

Como as derivadas parciais de f existem e são contínuas em qualquer disco que não contem a origem $O = (0, 0)$, A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-3, -5)$ é dada por

$$z = -f(-3,-5) - \frac{7}{289}(x+3) + \frac{3}{34}(y+5).$$

Se consideramos a função $g(x, y) = z$, temos que tal função é linear e, além disso, $f(x, y) \to g(x, y)$ quando $(x, y) \to (-3, -5)$. Assim, g é uma aproximação linear para f, sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for a distância entre (x, y) e $(-3, -5)$.

4.30 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 y \cos(xy\pi)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2, 1)$ e interprete estes números como inclinações.

Solução: Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy\cos(xy\pi) + x^2 y(-y\pi\ \mathrm{sen}(xy\pi)).$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -4\cos(-2\pi) + 4(-\pi\ \mathrm{sen}(-2\pi)) = -4.$$

Se θ é o ângulo no sentido anti-horário, formado pelo plano xy e a reta tangente ao gráfico de f no ponto (-2,1), contida no plano $y = 1$, então $\theta = -\mathrm{arctg}(4)$.

Similarmente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy\pi) + x^2y(-x\pi\ \mathrm{sen}(xy\pi)).$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 4\cos(-2\pi) + 8\pi\ \mathrm{sen}(-2\pi) = 4.$$

Se α é o ângulo no sentido anti-horário, formado pelo plano xy e a reta tangente ao gráfico de f no ponto (-2,1), contida no plano $x = -2$, então $\alpha = \mathrm{arctg}(4)$.

4.31 Dada a função $f(x,y) = e^{xy^2}(x^3 - 2x^2y + y - 1)$, estude o sinal da função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,1)$, e a partir destas informações, esboce a interseção do gráfico de f com o plano $y = 1$.

Solução: Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2e^{xy^2}(x^3 - 2x^2y + y - 1) + e^{xy^2}(3x^2 - 4xy).$$

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,1) &= e^x(x^3 - 2x^2) + e^x(3x^2 - 4x) \\ &= e^x(x^3 + x^2 - 4x) \\ &= xe^x(x^2 + x - 4) \end{aligned}$$

Para estudar o sinal de g, devemos estabelecer para quais valores de x temos $g(x) = 0$, $g(x) < 0$ e $g(x) > 0$. Vejamos:

Se $g(x) = 0$ então $xe^x(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow$

$$xe^x = 0 \tag{12}$$

ou

$$x^2 + x - 4 = 0 \tag{13}$$

(12) $\Rightarrow x = 0$. De (13) temos,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

.

$2xe^x$	$-$		$-$		$+$		$+$
$2x^2-x-2$	$+$		$-$		$-$		$+$
$g(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
		$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	

Analisando os sinais destas expressões, vemos que $g(x) \geq 0 \ \forall \ x \in I_1 = \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$ e $g(x) < 0 \ \forall \ x \in I_1^c = \mathbb{R} - I_1$.

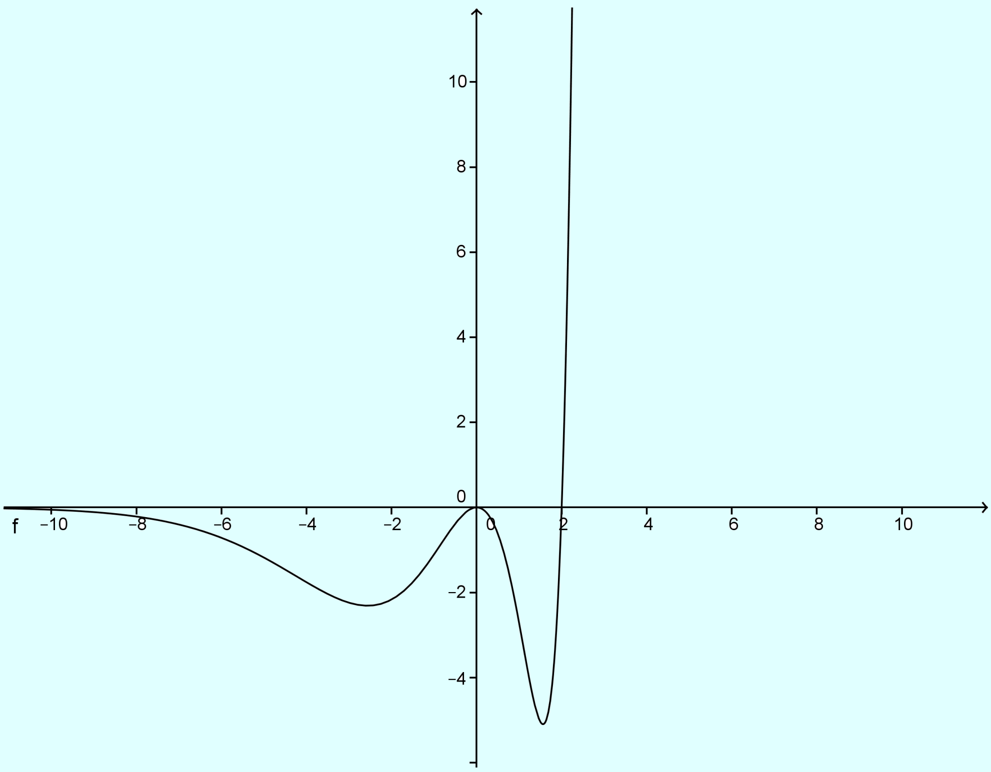
A interseção do gráfico de f com o plano $y = 1$ é o gráfico da função $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x, 1) = e^x(x^3 - 2x^2)$. Como $g(x) = h'(x)$, h é cresecente para todo $x \in I_1$ e decrescente em I_1^c.

$$h(x) = 0 \Rightarrow e^x x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$$

ou

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Assim, estes são os zeros da função h. Como o crescimento exponencial é mais rápido que o polinomial, $h(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e $h(x) \to 0$ quando $x \to -\infty$. Observe o gráfico abaixo:



4.32 Dada a função $f(x,y) = e^{xy}\cos(2x-y)$, usando a regra da cadeia, determine:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, se $x(t) = 3t^2 - 1$ e $y(t) = 2t + 1$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\
&= (ye^{xy}\cos(2x-y) - e^{xy}\,\mathrm{sen}(2x-y)2)\cdot 6t + (xe^{xy}\cos(2x-y)\\
&+ e^{xy}\,\mathrm{sen}(2x-y))\cdot 2\\
&= e^{xy}[\cos(2x-y)(y\cdot 6t + 2x) - \mathrm{sen}(2x-y)(2\cdot 6t - 2)]\\
&= 2e^{xy}[\cos(2x-y)(y\cdot 3t + x) - \mathrm{sen}(2x-y)(6t-1)]\\
&= 2e^{(6t^3+3t^2-2t-1)}[\cos(6t^2-2t-3)(6t^2+3t+3t^2-1)\\
&- \mathrm{sen}(6t^2-2t-3)(6t-1)]\\
&= 2e^{(6t^3+3t^2-2t-1)}[\cos(6t^2-2t-3)(9t^2+3t-1)\\
&- \ \mathrm{sen}(6t^2-2t-3)(6t-1)]
\end{aligned}
$$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, se $x(s,t) = 2t^2 + s^3$ e $y(s,t) = 3st + 1$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\
&= (ye^{xy}\cos(2x-y) - e^{xy}\,\mathrm{sen}(2x-y)2)\cdot 3s^2\\
&+ (xe^{xy}\cos(2x-y) + e^{xy}\,\mathrm{sen}(2x-y))\cdot 3t\\
&= e^{xy}[\cos(2x-y)(y\cdot 3s^2 + 3t\cdot x) - \mathrm{sen}(2x-y)(2\cdot 3s^2 - 3t)]\\
&= 3e^{xy}[\cos(2x-y)(y\cdot s^2 + t\cdot x) - \mathrm{sen}(2x-y)(2\cdot s^2 - t)]\\
&= 3e^{(2t^2+s^3)(3st+1)}[\cos(2(2t^2+s^3) - (3st+1))(s^2(3st+1) + t(2t^2+s^3))\\
&- \mathrm{sen}(2(2t^2+s^3) - (3st+1))(2s^2 - t)]\\
&= 3e^{(6st^3+3s^4t+2t^2+s^3)}[\cos(4t^2+2s^3-3st-1)(4s^3t+s^2+2t^3))\\
&- \mathrm{sen}(4t^2+2s^3-3st-1)(2s^2-t)]
\end{aligned}
$$

4.33 Em cada um dos itens anteriores, substitua as funções x e y, obtenha $g(t) = f(x(t), y(t))$ e $h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$, e calcule $\dfrac{dg}{dt}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial s}$.

Comparando com os resultados obtidos no problema 1, o que você pode notar?.

Solução: Temos

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = e^{(3t^2-1)(2t+1)} \cos(2(3t^2-1) - (2t+1)).$$

Logo,

$$g(t) = e^{(6t^3+3t^2-2t-1)} \cos(6t^2 - 2t - 3)$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} &= (18t^2 + 6t - 2)e^{(6t^3+3t^2-2t-1)} \cos(6t^2 - 2t - 3) \\
&- e^{(6t^3+3t^2-2t-1)} \operatorname{sen}(6t^2 - 2t - 3)(12t - 2) \\
&= 2e^{(6t^3+3t^2-2t-1)}[(9t^2 + 3t - 1)\cos(6t^2 - 2t - 3) \\
&- (6t - 1)\operatorname{sen}(6t^2 - 2t - 3)]
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t)) = e^{(2t^2+s^3)(3st+1)} \cos(2(2t^2 + s^3) - (3st + 1))$$

Então,

$$h(s,t) = e^{(6st^3+3s^4t+2t^2+s^3)} \cos(4t^2 + 2s^3 - 3st - 1)$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial s} &= (6t^3 + 12s^3t + 3s^2)e^{(6st^3+3s^4t+2t^2+s^3)} \cos(4t^2 + 2s^3 - 3st - 1) \\
&- e^{(6st^3+3s^4t+2t^2+s^3)} \operatorname{sen}(4t^2 + 2s^3 - 3st - 1)(6s^2 - 3t) \\
&= 3e^{(6st^3+3s^4t+2t^2+s^3)}[(2t^3 + 4s^3t + s^2)\cos(4t^2 + 2s^3 - 3st - 1) \\
&- (2s^2 - t)\operatorname{sen}(4t^2 + 2s^3 - 3st - 1)
\end{aligned}$$

Comparando com os resultados obtidos no problema 1, podemos notar que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{dt}.$$

Assim, vemos que a regra da cadeia pode ser dispensada para o cálculo de derivadas de funções compostas em alguns casos. Entretanto, para muitos outros problemas ela é essencial.

4.34 Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e $x(u, v) = 2u^2 - v$ e $y(u, v) = 3uv^2$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$.

Solução: Inicialmente, vamos determinar $\dfrac{\partial f}{\partial u}$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 4u+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 3v^2\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 4u+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 3v^2\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 4u\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 3v^2\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot 4u+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}(4u)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot 3v^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}\left(3v^2\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot 4u+4\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot 3v^2\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ também são funções de u e v, precisamos aplicar a regra da cadeia a estas funções. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 4u+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot 3v^2 \tag{14}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 4u+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 3v^2 \tag{15}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot 4u+4\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot 3v^2\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 4u+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot 3v^2\right)\cdot 4u+4\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 4u+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 3v^2\right)\cdot 3v^2\end{aligned}$$

Pelo teorema de Clairaut, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 4u+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 3v^2\right)\cdot 4u+4\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 4u+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 3v^2\right)\cdot 3v^2\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 16u^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 12uv^2+4\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 12uv^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 9v^4\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 16u^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 9v^4+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot 24uv^2+4\frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned}$$

4.35 Dada a função $F(x,y,z) = 10x^2 - 3y^2 + 4z^2$, determine as equações do plano tangente à superfície de nível $F(x,y,z) = 2$ no ponto $(-1,2,-1)$ e a equação da reta normal à esta superfície no mesmo ponto.

Solução: A equação do plano tangente à superfície de nível $F(x,y,z) = k$ no ponto (x_0,y_0,z_0) é dada por

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Como,

$$F_x(x,y,z) = 20x \Rightarrow F_x(-1,2,-1) = -20,$$

$$F_y(x,y,z) = -6y \Rightarrow F_y(-1,2,-1) = -12,$$

$$F_z(x,y,z) = 8z \Rightarrow F_z(-1,2,-1) = -8,$$

A equação do plano tangente à superfície de nível $10x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 2$ no ponto $(-1,2,-1)$ é dada por

$$20(x+1) + 12(y-2) + 8(z+1) = 0.$$

Observe que a reta normal à superfície $F(x,y,z) = 2$ no ponto $(-1,2,-1)$ tem a mesma direção do vetor diretor do plano tangente neste ponto. Portanto, a equação paramétrica da reta normal é dada por

$$r(t) = (-1,2,-1) + t(20,12,8).$$

4.36 Mostre que a função $f(x,y) = \text{tg}(xy)$ é diferenciável.

Solução: Observe que o domínio de f é o conjunto $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$. A função f é diferenciável se o é em todos os pontos de seu domínio. f é contínua, pois é a composta das funções contínuas $g(x) = \text{tg}(x)$ e $h(x,y) = xy$.

Vamos verificar se f é de classe C^1:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sec^2(xy),$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sec^2(xy).$$

Como a função $u(x,y) = \sec^2(xy)$ é a composta de funções contínuas, tal função é contínua no conjunto D_f. Além disso, o produto de funções contínuas é uma função contínua. Portanto, as derivadas parcias de f são contínuas, e assim f é diferenciável.

4.37 Determine o conjunto dos pontos em que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável.

Solução: f é contínua, pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \cdot \overbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}^{limitada} = 0,$$

pois $g(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitada e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$. Assim, vamos estudar a continuidade das derivadas parciais de f:

Se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x \cdot y^3 x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2y \cdot y^3 x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3y^2x^3 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Se $(x,y) = (0,0)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0-0}{x} = 0,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Como as derivadas parciais de f são quocientes de polinômios, elas são contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Vamos verificar a continuidade em $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0,$$

pois $g(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ e $h(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$ são limitadas e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$.

Analogamente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^2x^3 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2+3x^2}{x^2+y^2} = 0,$$

pois $g(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ e $j(x,y) = \dfrac{y^2+3x^2}{x^2+y^2}$ são limitadas e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0.$

Portanto, a diferenciabiliade de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ segue da continuidade de suas derivadas parciais.

4.38 Mostre que a equação

$$3x^2y + \operatorname{sen} 2y = x$$

define implicitamente pelo menos uma função $y = y(x)$ com $y(0) = 0$. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

Solução: Seja $F(x,y) = 3x^2y + \operatorname{sen} 2y - x$. Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 6xy - 1,$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 2\cos 2y.$$

Assim F é de classe C^1. Como $F(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$, pelo teorema das funções implícitas, existe um intervalo

$$U = (-\epsilon_1, \epsilon_2), \;\; \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$$

e uma função $y : U \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y(x)) = 0$ para todo $x \in U$, $y(0) = 0$ e

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{6xy - 1}{3x^2 + 2\cos 2y}.$$

4.39 Mostre que a equação

$$e^{2x+3y+z} + 6xyz = 1$$

define implicitamente pelo menos uma função $z = z(x,y)$ com $z(0,0) = 0$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

Solução: Seja $F(x,y,z) = e^{2x+3y+z} + 6xyz - 1$. Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2e^{2x+3y+z} + 6yz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3e^{2x+3y+z} + 6xz$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y) = e^{2x+3y+z} + 6xy.$$

Assim, F é de classe C^1, pois suas derivadas parciais são soma de funções contínuas. Como $F(0,0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$, pelo teorema das funções implícitas, a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função $z = z(x,y)$ satisfazendo $z(0,0) = 0$ e $F(x,y,z(x,y)) = 0$ para (x,y) pertencendo a um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $(0,0)$, e

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2e^{2x+3y+z} + 6yz}{e^{2x+3y+z} + 6xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3e^{2x+3y+z} + 6xz}{e^{2x+3y+z} + 6xy}.$$

4.40 Determine as equações das retas que sejam tangentes à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralelas à reta $2x + y = 7$.

Solução: Sejam r_1 e r_2 as retas procuradas tangentes à elipse. Sabemos que estas retas têm a mesma direção de sua paralela s, dada por $s : 2x + y = 7$. Vamos escrever esta última em forma paramétrica:

$$2x + y = 7 \Rightarrow y = -2x + 7,$$

então

$$s(x) : (x, -2x + 7) \Rightarrow s(x) : (0,7) + x(1,-2).$$

Logo, a direção de r_1 e r_2 também é dada pelo vetor $(1,-2)$. Seja (x_0, y_0) um ponto de tangência. Se $F(x,y) = 2x^2 + y^2$, então, pela regra da cadeia, o vetor gradiente de F é ortogonal à todo curva contida na curva de nível $F(x,y) = 3$. Em particular,

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot (1,-2) = 0.$$

Portanto,

$$(4x_0, 2y_0) \cdot (1,-2) = 0 \Rightarrow 4x_0 - 4y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0.$$

Como (x_0, y_0) pertence à curva $F(x,y) = 3$, temos

$$2x_0^2 + y_0^2 = 3 \Rightarrow 2x_0^2 + x_0^2 = 3 \Rightarrow x_0 = \pm 1.$$

Assim, as equações das retas procuradas são dadas por:

$$r_1(t) = (1,1) + t(1,-2)$$

e

$$r_2(t) = (-1,-1) + t(1,-2).$$

4.41 Determine as equações das retas que sejam tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta $4x + 5y = 13$.

Solução: Este problema poderia ser resolvido exatamente com o mesmo método do problema anterior, mas vamos aplicar aqui o teorema das funções implícitas e assim explorar uma nova técnica. Seja $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 7$. Temos,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x + y,$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y + x.$$

Logo, F é de classe C^1, pelo teorema das funções implícitas, para qualquer ponto (a,b) com $F(a,b) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ a equação $F(x,y) = 0$ define implicitamente uma função $y = y(x)$ na vizinhança de a com $y(a) = b$ e

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x + y}{2y + x}.$$

Sejam r_1 e r_2 as retas procuradas tangentes à curva $F(x,y) = 0$. Sabemos que estas retas têm o mesmo coeficiente angular de sua paralela s, dada por $4x + 5y = 13 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$. Então, devemos encontrar os pontos (a,b) pertencentes à curva $F(x,y) = 0$ tais que

$$\frac{dy}{dx}(a,b) = -\frac{4}{5}.$$

Assim,

$$-\frac{2a + b}{2b + a} = -\frac{4}{5} \Rightarrow 10a + 5b = 8b + 4a \Rightarrow 2a = b.$$

De $F(a,b) = 0$ temos

$$a^2 + ab + b^2 - 7 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a^2 + 4a^2 = 7 \Rightarrow a = \pm 1$$

Portanto, as equações reduzidas das retas r_1 e r_2 são dadas por

$$y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$$

e

$$y + 2 = -\frac{4}{5}(x + 1).$$

4.42

(a) Escreva uma expressão definindo a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = (a, b)$.

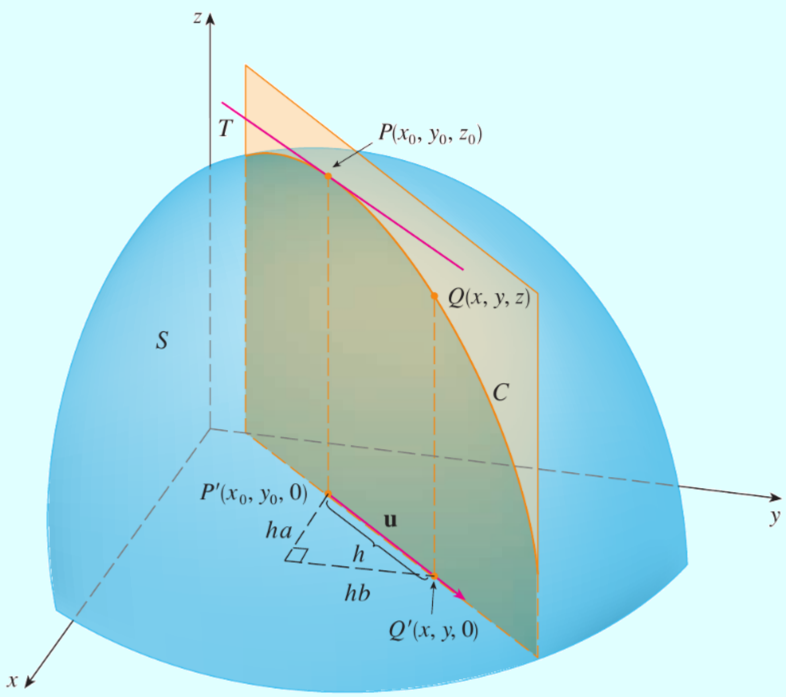
Solução: A derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = (a, b)$ é

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

(b) Como interpretá-la como taxa de variação? Como interpretá-la geometricamente?

Solução: Consideremos uma superfície S com equação $z = f(x, y)$ e tomemos $z_0 = f(x_0, y_0)$. Logo, o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ está em S. O plano vertical que passa por P na direção do vetor unitário u, intercepta S em uma curva C. A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção u. Geometricamente, temos



(c) Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Usando a definição, calcule a derivada direcional de f no ponto (1,1) e na direção do vetor $\overrightarrow{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solução: Usando o item (a) teremos que

$$\begin{aligned} D_u f(1,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1-\frac{1}{\sqrt{2}}h, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}h) - f(1,1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 \cancel{-\frac{2h}{\sqrt{2}}} + \frac{h^2}{2} + 1 \cancel{+\frac{2h}{\sqrt{2}}} + \frac{h^2}{2} \cancel{-2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4.43

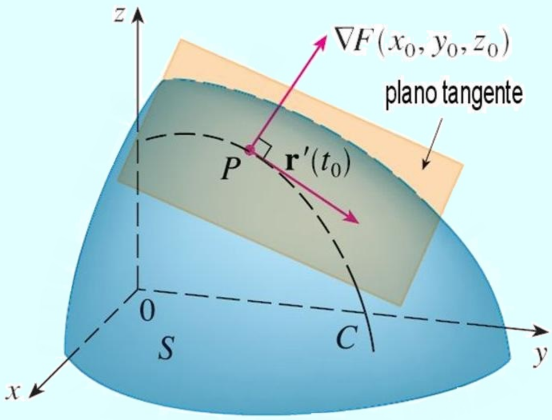
(a) Expresse $D_u f$ em termos de ∇f.

Solução: Se f é uma função diferenciável, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário u e

$$D_u f = \nabla f \,.\, \overrightarrow{u}$$

(b) Explique o significado geométrico do gradiente.

Solução: No caso de uma função $w = f(x,y,z)$ que define S como a superfície $w = w_0$, o vetor gradiente em um ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ é perpendicular ao vetor tangente $r'(t_0)$ onde $r(t)$ é qualquer curva em S tal que $r(t_0) = P$. Geometricamente temos



(c) Considere $f(x, y) = x^2 + xy$. Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 2)$ e na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (3, 4)$.

Solução: Temos que $f(x, y)$ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$, porém o vetor $\overrightarrow{u} = (3, 4)$ não é unitário, logo devemos calcular o seu versor. Assim,

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Portanto, segue do item (a) que:

$$D_u f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (4, 1) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

Integrais múltiplas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Definição e cálculo de integrais duplas e triplas;
- Teorema de Fubinni para integrais múltiplas;
- Mudança de Variável em integrais múltiplas.

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Integral de funções de uma variável em um intervalo fechado;
- Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável;
- Mudança de Variável na integral de uma função de uma variável;
- Coordenadas Polares.

Métodos e Técnicas

Teorema de Fubinni	• Nas questões abaixo, utiliza-se o teorema de Fubinni para calcular as integrais múltiplas de forma iterada. **Exercícios 5.1, 5.2, 5.3(c), 5.5, 5.6**
Mudança de Variáveis	• Nas seguintes questões, usa-se a mudança de variáveis para coordenadas polares para resolver as integrais múltiplas; **Exercícios 5.3(a,b), 5.7, 5.9** • Nos seguintes exercícios, faz-se uso da mudança de variáveis para coordenadas esféricas para resolver as integrais múltiplas; **Exercícios 5.4(b)** • Nas exercícios abaixo, utiliza-se a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas para resolver as integrais múltiplas. **Exercícios 5.4(a)**

●○○○

5.1 Calcule as seguintes integrais iteradas:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx\,dy$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} 3\,r^2 \text{sen}\theta\,dr\,d\theta$.

●●○○

5.2 Escreva a integral dupla nas duas ordens de integração e use a mais conveniente para calcular a integral . Esboce a região de integração.

(a) $\displaystyle\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$, R : triângulo limitado por $y=x$, $y=2\,x$ e $x=2$;

(b) $\displaystyle\iint_R -2y\,e^x\,dA$, R : região limitada por $y=4-x^2$ e $y=4-x$;

(c) $\displaystyle\iint_R x\,dA$, R : setor circular limitado por $y=\sqrt{25-x^2}$, $3x+4y=0$ e $y=0$;

(d) $\displaystyle\iint_R (x+y)\,dA$, R : semicírculo limitado por $y=\sqrt{4-x^2}$ e $y=0$.

●●●○

5.3 Faça o que se pede:

(a) Use coordenadas polares para calcular a integral $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,dA$, onde R : a região anular localizada entre os círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=5$;

(b) Use coordenadas polares para calcular o volume do sólido limitado acima por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e abaixo por $x^2 + y^2 \leq 4$;

(c) Calcule a integral tripla iterada $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dz\, dy\, dx$;

(d) Usando integral tripla, calcule o volume do elipsóide

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16.$$

●●●○ **5.4** Faça o que se pede:

(a) Usando coordenadas cilíndricas calcule a integral tripla

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} x\, dz\, dy\, dx;$$

(b) Usando coordenadas esféricas calcule o volume do sólido limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e abaixo pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

●●●○ **5.5** Calcule a integral iterada:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x) dy dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2} dy dx$.

●●●○ **5.6** Calcule a integral dupla:

(a) $\displaystyle\int\int_D y^3 dA$ onde D é a região triangular com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$ e $(3, 2)$;

(b) $\displaystyle\int\int_D x \cos y dA$ onde D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

●●●○

5.7 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int\int_D x^2 y dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5;

(b) $\displaystyle\int\int_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3.

●●●○

5.8 No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como o que segue

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)dxdy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária $dydx$.

●●●○

5.9 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)dydx$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)dxdy$.

Sugestões

5.1 Use o teorema de Fubini.

5.2 Para a resolução das alternativas da questão esboce as regiões para encontrar os limites de integração e, se necessário, faça mudança de variável para resolver as integrais. Use o teorema de Fubini

5.3 Lembre-se que $x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \text{sen}\theta$. Esboce a região de integração para determonar os limites de integração. Desenhe a região $x^2 + y^2 \leq 4$ para determinar os limites de integração e, se necessário, faça uma mudança de variável para resolver a integral. Utilize o teorema de Fubini para integrais triplas. Faça um esboço do elipsóide para determinar os limites de integração e observe que podemos usar simetria para calcular o volume desejado.

5.4 Faça a mudança para coordenadas cilíndricas e utilize o teorema de Fubini para integrais triplas. Faça a mudança para coordenadas esféricas e encontre a variação de ρ, θ e ϕ. Utilize o teorema de Fubini para resolver a integral.

5.5 Utilize o teorema de Fubinni.

5.6 Esboçe a região de integração e analise a intersecção da mesma com os eixos para assim, obter os limite de integração.

5.7 Lembre-se que.

$x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \text{sen}\theta$.

Esboce a região de integração para determonar os limites de integração.

5.8 Esboce a região de integração para determinar os limites de integração

5.9 Faça as mudanças necessárias e aplique o teorema de Fubinni.

Respostas

5.1 Calcule as seguintes integrais iteradas:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx\,dy$;

Solução: Iremos fazer os cálculos naturalmente, integrando primeiro em relação a x e depois em relação a y,

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1-y^2}{2}+y\sqrt{1-y^2}\right) dy \\
&= \left(\frac{y}{2}-\frac{y^3}{6}-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} 3\,r^2\text{sen}\theta\,dr\,d\theta.$

Solução: Iremos fazer os cálculos naturalmente, integrando primeiro em relação a r e depois em relação a θ, nesta última, faremos a mudança $u=\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} 3\,r^2\text{sen}\theta\,dr\,d\theta &= \int_0^{\pi/4} \text{sen}\theta\, r^3\Big|_0^{\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos^3\theta\,\text{sen}\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

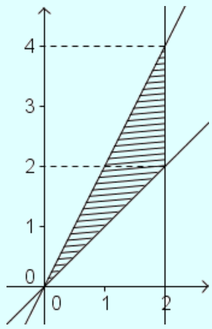
Fazendo $u=\cos\theta$ tem-se $du=-\text{sen}\theta\,d\theta$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} 3\,r^2\text{sen}\theta\,dr\,d\theta &= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^3\,du \\
&= \frac{u^4}{4}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

5.2 Escreva a integral dupla nas duas ordens de integração e use a mais conveniente para calcular a integral . Esboce a região de integração.

(a) $\displaystyle\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$, R : triângulo limitado por $y = x$, $y = 2\,x$ e $x = 2$;

Solução: O desenho a seguir representa a região de integração:



Note que,

$$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA = \int_0^2\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dydx$$

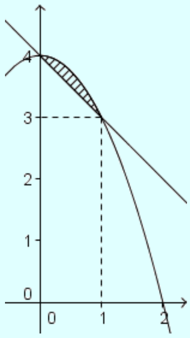
$$\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA = \int_0^2\int_{y/2}^{y} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy + \int_2^4\int_{y/2}^{2} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Fazendo $u = x^2 + y^2$ tem-se $du = 2\,y\,du$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_x^{2x} \frac{y}{x^2+y^2}\,dydx &= \frac{1}{2}\int_0^2\int_x^{2x} \frac{du}{u}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(u)\Big|_x^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(x^2+y^2)\Big|_x^{2x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(5x^2) - \ln(2x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)\int_0^2 dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)\,x\Big|_0^2 \\
&= \ln\left(\frac{5}{2}\right).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\iint_R -2y\,e^x\,dA$, R : região limitada por $y = 4 - x^2$ e $y = 4 - x$;

Solução: O desenho a seguir representa a região de integração:



Os pontos de interseção são determinados fazendo-se

$$4 - x^2 = 4 - x \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot (1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Portanto os pontos de interseção são $(0, 4)$ e $(1, 3)$. Dessa forma,

$$\iint_R -2ye^x \, dA = \int_0^1 \int_{4-x}^{4-x^2} -2ye^x \, dydx,$$
$$\iint_R -2ye^x \, dA = \int_3^4 \int_{4-y}^{\sqrt{4-y}} -2ye^x \, dxdy.$$

Vamos calcular agora a integral dupla,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{4-x}^{4-x^2} -2ye^x \, dydx &= \int_0^1 e^x \Big(-y^2\Big|_{4-x}^{4-x^2}\Big) dx \\
&= \int_0^1 e^x \left(-(4-x^2)^2 + (4-x)^2\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-8xe^x + 9x^2e^x - x^4e^x\right) dx \\
&= -\int_0^1 8xe^x dx + \int_0^1 9x^2e^x dx - \int_0^1 x^4e^x dx.
\end{aligned}$$

Vamos agora, usar a técnica da integração por partes para cada uma das integrais acima:

$$-\int_0^1 8xe^x dx = 8xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 8e^x dx = -8e + 8e^x\Big|_0^1 = -8,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 9x^2e^x dx &= 9x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 18xe^x dx \\
&= 9e - \int_0^1 18xe^x dx \\
&= 9e - \left(18xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 18e^x dx\right) \\
&= -9e + 18e^x\Big|_0^1 \\
&= 9e - 18
\end{aligned}$$

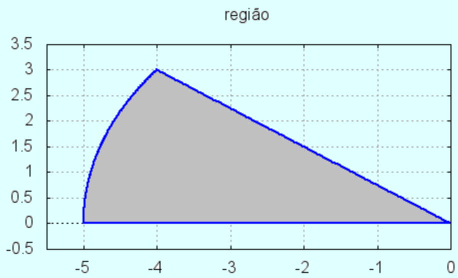
$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 x^4 e^x dx &= -\left(x^4 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 4x^3 e^x dx\right)\\
&= -e + \int_0^1 4x^3 e^x dx\\
&= -e + 4x^3 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 12x^2 e^x dx\\
&= -e + 4e - \left(12x^2 e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 24xe^x dx\right)\\
&= 3e - 12e + \int_0^1 24xe^x dx\\
&= -9e + \left(24xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 24e^x dx\right)\\
&= -9e + 24e - 24e^x\Big|_0^1\\
&= 24 - 9e
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\int_0^1\int_{4-x}^{4-x^2} -2ye^x\, dydx = -8 + 9e - 18 + 24 - 9e = -2$$

(c) $\displaystyle\iint_R x\, dA$, R : setor circular limitado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x + 4y = 0$ e $y = 0$.

Solução: A região de integração é dada por:



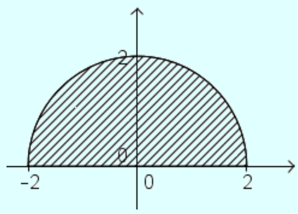
$$
\begin{aligned}
\iint_R x\, dA &= \int_{-5}^{-4}\int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\, dy\, dx + \int_{-4}^{0}\int_0^{-3x/4} x\, dy\, dx\\
\iint_R x\, dA &= \int_0^3\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{-4y/3} x\, dx\, dy.
\end{aligned}
$$

Calculando, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^3\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{-4y/3} x\,dx\,dy &= \int_0^3 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\sqrt{25-y^2}}^{-4y/3} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{16}{9}y^2 - (25-y^2)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{25}{9}y^2 - 25\right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{27}y^3 - 25y\Big|_0^3\right) \\
&= \frac{25}{2}(1-3) = -25.
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\iint_R (x+y)\,dA$, $\quad R$: semicírculo limitado por $y = \sqrt{4-x^2}$ e $y = 0$.

Solução: O desenho a seguir representa a região de integração:



$$\begin{aligned}
\iint_R (x+y)\,dA &= \int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dydx, \\
\iint_R (x+y)\,dA &= \int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x+y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dydx &= \int_{-2}^{2} \left.\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(x\sqrt{4-x^2} + 2 - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}dx + \int_{-2}^{2} 2\,dx - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $u = 4 - x^2$, $du = -2x$ tem-se

$$\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}dx = 0.$$

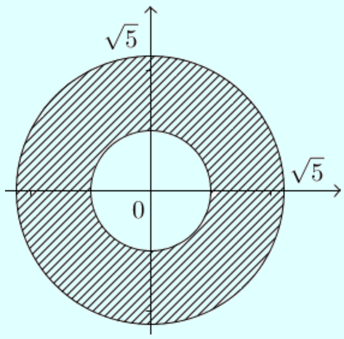
Assim,

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dydx = \left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

5.3 Faça o que se pede:

(a) Use coordenadas polares para calcular a integral $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,dA$, R : a região anular localizada entre os círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=5$;

Solução: A região de integração é a seguinte:



assim,

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2+y^2)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} \left[(r\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\theta)^2\right] r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} r^3\,drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Bigg|_1^{\sqrt{5}} d\theta = 6\theta\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi.\end{aligned}$$

(b) Use coordenadas polares para calcular o volume do sólido limitado acima por $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ e abaixo por $x^2+y^2\leq 4$;

Solução: o volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned}V = \iint_R \sqrt{16-x^2-y^2}\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sqrt{16-(r\cos\theta)^2-(r\text{sen}\theta)^2}\,r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\sqrt{16-r^2}\,drd\theta.\end{aligned}$$

Fazendo $u = 16 - r^2$, $du = -2\,r\,dr$ tem-se

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{12}^{16} u^{1/2}\,du\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} u^{3/2}\Big|_{12}^{16} d\theta \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{16^3}-\sqrt{12^3})\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{16^3}-\sqrt{12^3}) \\ &= \frac{2\pi}{3}(16.4 - 24\sqrt{3}) = \frac{16\pi}{3}(8-3\sqrt{3}).\end{aligned}$$

(c) Calcule a integral tripla iterada $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x\,dz\,dy\,dx$;

Solução: Integrando primeiro em relação a z, depois y e por último em relação a x obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x\,dz\,dy\,dx &= \int_0^1\int_0^x x\left(z\Big|_0^{xy}\right)dy\,dx = \int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x^2\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x\right)dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,dx \\
&= \frac{x^5}{10}\bigg|_0^1 = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

(d) Usando integral tripla, calcule o volume do elipsóide

$$4x^2+4y^2+z^2=16.$$

Solução: Observe que

$$4x^2+4y^2+z^2=16 \Rightarrow z^2=4(4-x^2-y^2) \Rightarrow -2\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 2\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Como temos simetria podemos considerar

$$V=8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
V &= 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(z\Big|_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)dy\,dx \\
&= 16\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}dy\;dx \\
&= 8\int_0^2\left(y\sqrt{4-x^2-y^2}+(4-x^2)\text{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= 8\int_0^2\left(0+(4-x^2)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right)dx = 8\int_0^2\frac{\pi}{2}(4-x^2)\,dx \\
&= 4\pi\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = 4\pi\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{64\pi}{3}.
\end{aligned}$$

5.4 Faça o que se pede:

(a) Usando coordenadas cilíndricas, calcule a integral tripla

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx;$$

Solução: Temos que a região de integração é dada por

$$E = \{(x,y,z)|\, -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, x^2+y^2 \le z \le 4\}.$$

Em coordenadas cilíndricas tem-se

$$E = \{(r,\theta,z)\ ;\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r^2 \le z \le 4\}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos\theta\ \ z\Big|_{r^2}^{4} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos\theta(4-r^2)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \cos\theta(4r^2-r^4)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^2 d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx &= 2^5\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)d\theta \\
&= \frac{2^6}{15}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = \frac{2^6}{15}\mathrm{sen}(\theta)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido limitado acima pela esfera $x^2+y^2+z^2=9$ e abaixo pelo cone $z^2=x^2+y^2$, $z\ge 0$.

Solução: O centro da esfera dada e o vértice do cone é o ponto $(0,0,0)$, fazendo

$$\begin{aligned}
x &= \rho\,\mathrm{sen}\phi\,\cos\theta \\
y &= \rho\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta \\
z &= \rho\,\cos\phi
\end{aligned}$$

teremos a equação da esfera dada por,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
$$(\rho\, \text{sen}\phi\, \cos\theta)^2 + (\rho\, \text{sen}\phi\, \text{sen}\theta)^2 + (\rho\, \cos\phi)^2 = 9$$
$$\rho^2\, \text{sen}^2\phi + \rho^2\, \cos^2\phi = 9$$
$$\rho^2 = 9$$

Logo, $0 \leq \rho \leq 3$. Da intersecção entre a esfera e o cone tem-se

$$z^2 = 9 - z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{\sqrt{2}},\ \ z \geq 0.$$

Mas $z = \rho \cos\phi$, e logo, $3\cos\phi = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, o que implica $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e tem-se $\phi = \dfrac{\pi}{4}$. Portanto,

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi)\ ;\ 0 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{3} \rho^2 \text{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\phi\ \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^3 d\phi\, d\theta \\ &= 9\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 9\int_0^{2\pi} (-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= 9\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 9\pi(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

5.5 Calcule a integral iterada:

(a) $\displaystyle\int_1^4\int_0^2 (6x^2 - 2x)dydx.$

Solução: Temos que,

$$\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)dydx = \int_1^4 \left[\int_0^2 (6x^2 - 2x)dy\right] dx$$

Note que,

$$\int_0^2 (6x^2 - 2x)dy = (6x^2y - 2xy)\Big|_0^2 = 12x^2 - 4x$$

Logo,

$$\int_1^4 (12x^2 - 4x)dx = (4x^3 - 2x^2)\Big|_1^4 = 4.4^3 - 2.4^2 - 2 = 222$$

Portanto,

$$\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)dydx = 222$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}dydx.$

Solução: Temos que,

$$\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}dydx = \int_0^1 x\left[\int_0^1 y\sqrt{x^2 + y^2}dy\right] dx$$

Como,

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.2y = 3y\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\int_0^1 y\sqrt{x^2 + y^2}dy = \frac{1}{3}\left[(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2 + 1)^3} - x^3\right]$$

Segue que,

$$\frac{1}{3}\int_0^1 x\left(\sqrt{(x^2 + 1)^3} - x^3\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\sqrt{(x^2 + 1)^3}dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^4dx$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}.2x = 5x\sqrt{(x^2 + 1)^3}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 x\sqrt{(x^2 + 1)^3}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{15}\left[\sqrt{2^5} - 1\right] = \frac{1}{15}\left[4\sqrt{2} - 1\right]. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$-\frac{1}{3}\int_0^1 x^4 = -\frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{1}{15} \qquad (2)$$

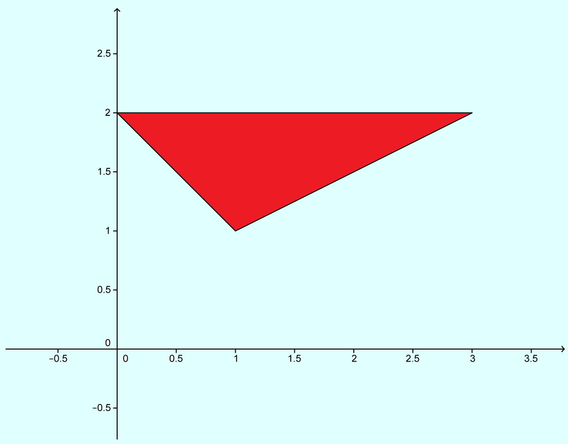
Portanto, de (1) e (2) teremos

$$\int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}dydx = \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{2}{15} = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{15}.$$

5.6 Calcule a integral dupla:

(a) $\displaystyle\int\int_D y^3 dA$ onde D é a região triangular com vértices $(0,2)$, $(1,1)$ e $(3,2)$.

Solução: A região de integração é dada pela figura abaixo:



Iremos dividir em duas regiões de integral, calcular a integral dupla das mesmas e somá-las. Assim, segue que

$$A_1 = \int_0^1\int_{2-x}^2 y^3 dydx = \int_0^1\left[\int_{2-x}^2 y^3 dy\right]dx$$

Calculando a integral interna obtemos,

$$\int_{2-x}^2 y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_{2-x}^2 = \frac{16-(2-x)^4}{4}$$

Isso implica que,

$$\int_0^1 \frac{16-(2-x)^4}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (16-(2-x)^4)dx = \frac{1}{4}\left[16x + \frac{(2-x)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{49}{20}$$

Por outro lado, temos que

$$A_2 = \int_1^3 \int_{\frac{x+1}{2}}^2 y^3 dy dx = \int_1^3 \left[\int_{\frac{x+1}{2}}^2 y^3 dy\right] dx$$

Segue que

$$\int_{\frac{x+1}{2}}^2 y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_{\frac{x+1}{2}}^2 = \frac{16-\left(\frac{x+1}{2}\right)^4}{4}$$

Teremos então, que

$$\int_1^3 \left(\frac{16-\left(\frac{x+1}{2}\right)^4}{4}\right)dx = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(16-\left(\frac{x+1}{2}\right)^4\right)dx = \frac{1}{4}\left[16x - \frac{2\left(\frac{x+1}{2}\right)^5}{5}\right]_1^3 = \frac{49}{10}$$

Portanto,

$$\int\int_D y^3 dA = A_1 + A_2 = \frac{49}{20} + \frac{49}{10} = \frac{147}{20}$$

(b) $\displaystyle\int\int_D x\cos y dA$ onde D é limitada por $y = 0, y = x^2, x = 1.$

Solução: Perceba que a região de integral que queremos é

$$D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

Assim, teremos que

$$\int\int_D x\cos y dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} x\cos y dy dx = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} x\cos y dy\right] dx$$

Resolvendo a integral interna, obteremos

$$\int_0^{x^2} x\cos y dy = x\int_0^{x^2} \cos y dy = x\Big[\mathrm{sen} y\Big]_0^{x^2} = x\mathrm{sen}x^2$$

Segue que

$$\int_0^1 x\text{sen}x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \text{sen}(u)du = \left[-\frac{\cos u}{2}\right]_0^1 = \frac{1-\cos 1}{2}$$

Portanto,

$$\int\int_D x\cos y dA = \int_0^1\int_0^{x^2} x\cos y dy dx = \frac{1-\cos 1}{2}.$$

5.7 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int\int_D x^2 y dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5.

Solução: Lembremos que, em coordenadas polares temos

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\text{sen}\theta \quad ; \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

Assim, segue que

$$\int\int_D x^2 y dA = \int\int_{D_{r\theta}} (r\cos\theta)^2 r\text{sen}\theta r dr d\theta,$$

onde

$$D_{r\theta} = \{0 \le r \le 5; 0 \le \theta \le \pi\}$$

Segue, então, que

$$\int\int_D x^2 y dA = \int_0^\pi\int_0^5 r^4\cos^2\theta\text{sen}\theta dr d\theta = \int_0^\pi\left[\int_0^5 r^4\cos^2\theta\text{sen}\theta dr\right]d\theta$$

Resolvendo a integral interna, teremos

$$\int_0^5 r^4\cos^2\theta\text{sen}\theta dr = \cos^2\theta\text{sen}\theta\int_0^5 r^4 dr = \cos^2\theta\text{sen}\theta\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^5 = 625\cos^2\theta\text{sen}\theta$$

Daí,

$$\int_0^\pi 625\cos^2\theta\text{sen}\theta d\theta = 625\int_0^\pi\cos^2\theta\text{sen}\theta d\theta = 625\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{1250}{3}$$

Portanto,

$$\int\int_D x^2 y dA = \int\int_{D_{r\theta}} r^4 \cos^2\theta \text{sen}\theta dr d\theta = \frac{1250}{3}$$

(b) $\displaystyle\int\int_R \text{sen}(x^2+y^2)dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3.

Solução: Usando coordenadas polares teremos

$$\int\int_R \text{sen}(x^2+y^2)dA = \int\int_{R_{r\theta}} r\text{sen}(r^2)dr d\theta,$$

onde

$$R_{r\theta} = \left\{1 \leq r \leq 3; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Assim, teremos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^3 r\text{sen}r^2 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_1^3 r\text{sen}r^2 dr\right]d\theta$$

Calculando a integral interna, obteremos

$$\int_1^3 r\text{sen}r^2 dr = \frac{1}{2}\int_1^9 \text{sen}(u)du = \Big[-\cos u\Big]_1^9 = \frac{\cos 1 - \cos 9}{2}$$

Segue que

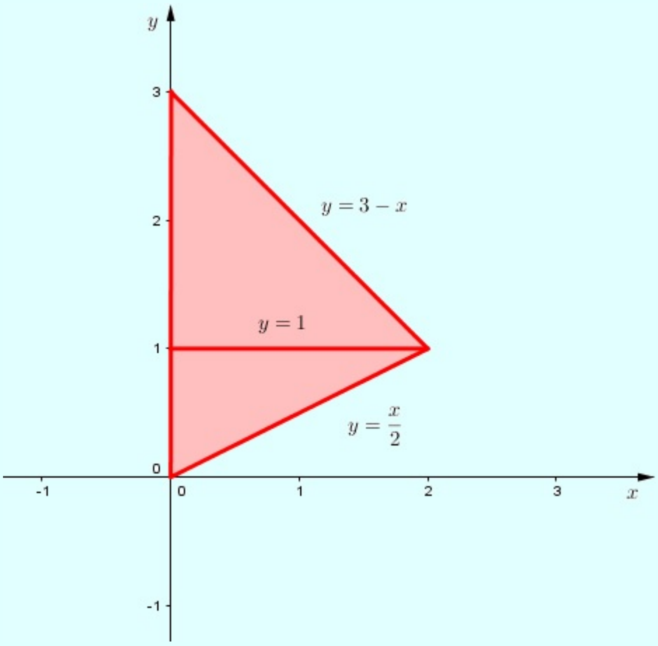
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 1 - \cos 9}{2} d\theta = \frac{\cos 1 - \cos 9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\cos 1 - \cos 9}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}[\cos 1 - \cos 9].$$

5.8 No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como o que segue

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_0^1\int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3\int_0^{3-y} f(x,y)dxdy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

Solução: A região de integração é dada por:



Portanto, invertendo a ordem de integração, obteremos

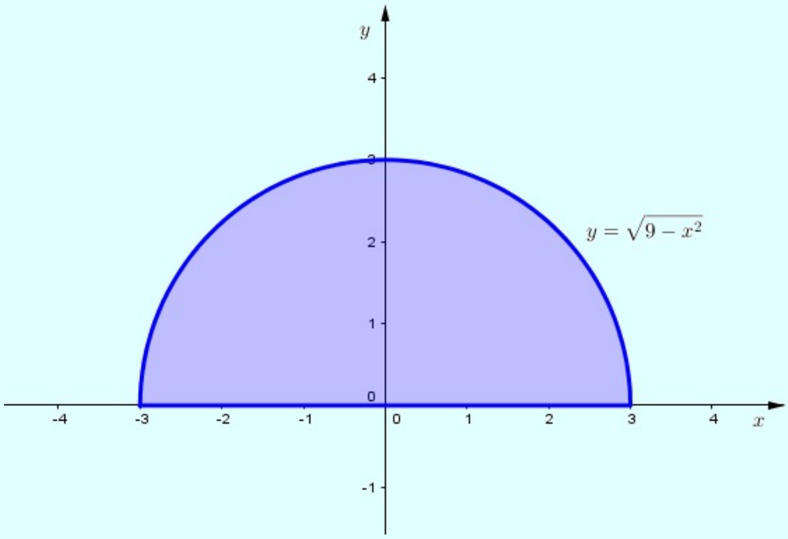
$$\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dydx$$

5.9 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)dydx.$

Solução: A região de integração é:

$$D = \{-3 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\}$$



Assim, fazendo a mudança para coordenadas polares, obteremos

$$\int_0^{\pi}\int_0^{3} r\text{sen}(r^2)drd\theta = \int_0^{\pi}\left[\int_0^{3} r\text{sen}(r^2)dr\right]d\theta$$

Resolvendo a integral interna, teremos

$$\int_0^{3} r\text{sen}(r^2)dr = \left[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\right]_0^3 = \frac{1}{2}(1-\cos 9)$$

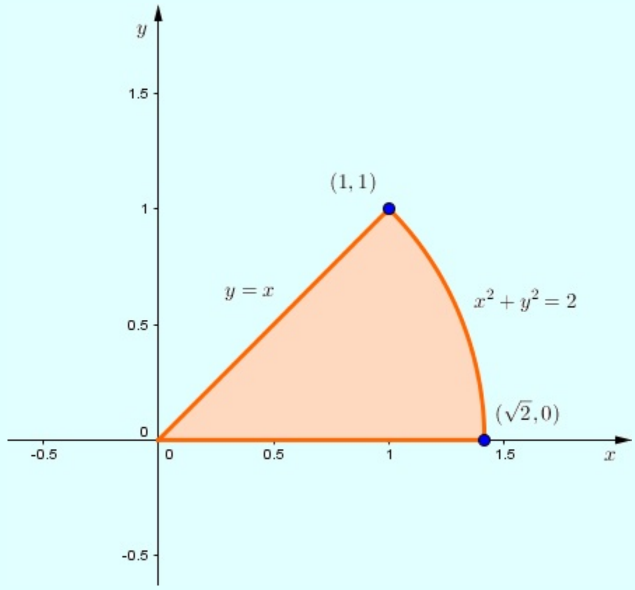
Segue que:

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 9)d\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 9)\Big[\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}(1-\cos 9)$$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}}(x+y)dxdy.$

Solução: Temos que a região de integração é dada por

$$\{y \le x \le \sqrt{2-y^2}; 0 \le y \le 1\}$$



Logo, usando coordenadas polares, teremos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} (r\cos\theta + r\text{sen}\theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\sqrt{2}} (r\cos\theta + r\text{sen}\theta) r dr \right] d\theta$$

Calculando a integral interna obteremos

$$\int_0^{\sqrt{2}} (r\cos\theta + r\text{sen}\theta) r dr = (\cos\theta + \text{sen}\theta) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos\theta + \text{sen}\theta)$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos\theta + \text{sen}\theta) d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\text{sen}\theta - \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Aplicações

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Máximos e Mínimos de uma função de duas várias variáveis;
- Teorema do Valor Extremo e o Teste da Segunda Derivada;
- Cálculo de Volume por Integração Múltipla;
- Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Derivadas Parciais;
- Cálculo de integrais duplas e triplas: Teorema de Fubinni;
- Inversão da Ordem de Integração.

Métodos e Aplicações

Regra da Cadeia	• Nos exercícios abaixo, utilizamos a regra da cadeia para calcular derivadas parciais de funções compostas. **Exercícios 6.2, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11**
Teste da Segunda Derivada	• Nas seguintes questões buscamos determinar máximos e mínimos locais através do Teste da Segunda Derivada. **Exercícios 6.14, 6.15, 6.16, 6.18**
Teorema do Valor Extremo	• Nas questões abaixo, verificamos a existência de máximos e mínimos absolutos utilizando o Teorema do Valor Extremo. **Exercício 6.19**
Teorema de Fubinni	• Utiliza-se o Teorema de Fubinni para calcular as integrais que determinam o volume de um sólido. **Exercícios 6.4, 6.20, 6.21, 6.22** • Nos exercícios que se seguem, usa-se o Teorema de Fubinni no cálculo de integrais que determinam massa, centro de massa e momento de inércia de regiões e sólidos. **Exercícios 6.23, 6.25, 6.26**
Mudança de variáveis: Coordenadas Polares	• Nas questões abaixo utilizamos a mudança de variáveis para coordenadas polares no cálculo do volume de um sólido. **Exercício 6.24**

6.1 O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$, quando o seu ponto de aplicação de move ao longo do vetor $\overrightarrow{PQ}$, é dado por

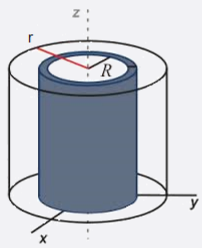
$$W = ||\text{proj}_{\overrightarrow{\text{PQ}}} \vec{F}||\ ||\ \overrightarrow{\text{PQ}}\ ||,$$

com $\text{proj}_{\overrightarrow{\text{PQ}}} \vec{F}$ a projeção de $\vec{F}$ sobre $\overrightarrow{PQ}$.

Calcule o trabalho realizado para deslocarmos um carro por 50 metros aplicando-se uma força de 25 N num cabo que faz um ângulo de 20° com a direção horizontal.

6.2 Faça o que se pede:

(a) Um cilindro anular tem um raio interno R e um raio externo r (veja figura). Seja o momento de inércia dado por $I = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$ com m a massa. Os dois raios crescem à taxa de 2 centímetros por segundo. Calcule a taxa na qual I varia no instante que os raios são 6 e 8, respectivamente.



(b) A voltagem V em um circuito elétrico decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor no resistor. Use a lei de Ohm, $V = I.R$, para calcular como a corrente I está variando no momento que $R = 400\Omega$, $I = 0,08$A, $\frac{dV}{dt} = -0,01$ V/s e $\frac{dR}{dt} = 0,03$ Ω/s.

●●○○

6.3 Uma equipe de oceonógrafos está mapeando o fundo do oceano para ajudar no resgate de um navio afundado. Usando um sonar, eles desenvolveram o modelo

$$D(x, y) = 250 + 3\,x^2 + 50\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi\,y}{2}\right).$$

com $D(x, y)$ a profundidade e x e y as distâncias em quilômetro.

(a) Qual a profundidade do navio se ele está localizado nas coordenadas $x = 1$ e $y = \frac{1}{2}$?;

(b) Determine o declive do fundo do oceano na direção positiva de x a partir da posição do navio;

(c) Determine o declive do fundo do oceano na direção positiva de y a partir da posição do navio;

●●●○

6.4 Usando integral dupla, calcule o volume do sólido limitado pelas equações dadas:

(a) $z = x\,y$, $z = 0$, $y = x$ e $x = 1$ no 1° octante;

(b) $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ no 1° octante.

●●○○

6.5 Usando a diferencial do volume, calcule a quantidade de material necessária para construir um tambor cilíndrico fechado de 2 m de raio, 5 m de altura e 1 cm de espessura.

●●○○

6.6 A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Para um dado gás, ao serem coletados os dados de pressão e volume, admite-se uma margem de erro de 2,3% para a pressão e 4,2% para o volume. Assim, qual o percentual máximo de erro para a temperatura?

●●●○

6.7 Se rotacionarmos uma circunferência em torno de um eixo que não intersecta a mesma, obtemos uma figura espacial chamada toro. Assim, sejam R a distância do centro da circunferência ao eixo e r o raio da circunferência. O volume delimitado por tal superfície é dado por $V = 2\pi^2 R r^2$. Se uma indústria automotiva deseja fabricar uma câmara de ar que, quando inflada, possui o formato de um toro com dimensões $R = 30\ cm$ e $r = 10\ cm$, qual a quantidade aproximada de borracha necessária, se a espessura da mesma for $2\ mm$?

●○○○

6.8 Em um intante de tempo t_0 o volume de um paralelepípedo é de $V = 2880\ cm^3$ e a taxa de variação do volume é de $792\ cm^3/s$. Qual a taxa de variação da altura se neste instante o comprimento c e a largura l variam às respectivas taxas de $-1\ cm/s$ e $2\ cm/s$, $c(t_0) = 24\ cm$ e $l(t_0) = 8\ cm$?

●○○○

6.9 A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

●●○○

6.10 Em física, uma onda é uma perturbação oscilante de alguma grandeza física no espaço e periódica no tempo. A oscilação espacial é caracterizada pelo comprimento de onda e a periodicidade do tempo que é medida pela freqüência da onda, que é o inverso de seu período. Estas duas grandezas estão relacionadas pela velocidade de propagação da mesma.

Dentro do estudo da física, inúmeros problemas aparecem com duas ou mais variáveis independentes, sendo que um dos modelos matemáticos para o estudo e resolução desses problemas envolve equações diferenciais parciais. Um exemplo disso é o problema da corda vibrante com extremidades fixas que consiste na equação diferencial parcial dada por:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad a \text{ constante.} \tag{16}$$

As primeiras tentativas para o estudo do movimento real da corda foram feitas por, Brook Taylor em 1713, mas a solução geral do problema foi obtida por d'Alembert (1747), Euler (1748) e Daniel Bernoulli (1753).
Assim, verifique que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda dada pela equação 16

●●○○ **6.11** Se x cresce à razão de 2 polegadas por segundo quando passa pelo valor $x = 3$ polegadas, com que velocidade deve variar y quando $y = 1$ polegada afim de que a função $2xy^2 - 3x^2y$ permaneça constante?

●●●○ **6.12** Nas proximidades de uma bóia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$, onde x, y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à bóia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

●●○○ **6.13** Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $v = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

●●○○ **6.14** Estude com relação a máximos e mínimos locais a função: $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$.

●●●○ **6.15** Estude com relação a máximos e mínimos locais a função: $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy, x > 0$ e $y > 0$.

●●○○

6.16 Para produzir determinando produto cuja quantidade é determinada por z, uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y. Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro.

●●●●

6.17 Duas partículas P_1 e P_2 deslocam-se no espaço com velocidades constantes $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1)$, respectivamente. No instante $t = 0$ a P_1 encontra-se na posição $(1, 1, 3)$. Sabe-se que a trajetória descrita por P_2 passa pelo ponto $(1, 1, 0)$. Qual deverá ser a posição de P_2 no instante $t = 0$ para que a distância mínima entre elas seja a menor possível?

●●○○

6.18 Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

●●●○

6.19 Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.

(a) $f(x, y) = 3x - y$ no conjunto A de todos (x, y) tais que $x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

(b) $f(x, y) = 3x - y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

●○○○

6.20 Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x + 2y + z = 12$ e acima do retângulo

$$R = \{(x, y, 0) | 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}.$$

●○○○

6.21 Encontre o volume do sólido delimitado pela superfície $z = x \sec^2 y$ e pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{4}$.

●●○○

6.22 Determine o volume do sólido dado

(a) Abaixo do parabolóide $z = x^2 = y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $y = y^2$

(b) Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante.

●●●○

6.23 Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região

$$D = \{(x, y)|1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$$

e tem função densidade $\rho(x, y) = ky^2$.

●●●○

6.24 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado

(a) Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(b) Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

●●●○

6.25 Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de um triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a, se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.

●●○○

6.26 Encontre os momentos de inércia em relação aos eixos I_x, I_y e o momento de inércia em relação a origem I_0 para a lâmina do exercício.

Sugestões

6.1 Note que

$$\text{proj}_{\overrightarrow{PQ}}\overrightarrow{F} = ||\overrightarrow{F}|| \cos\theta.$$

6.2 Use a regra da cadeia para encontrar a taxa de variação.

6.3 A direção de maior taxa de variação será dada por $\nabla D(x_0, y_0)$ e o valor máximo desta taxa será é dado por $||\nabla D(x_0, y_0)||$.

6.4 Esboce as superfícies e/ou região de integração.

6.5 Utilize a fórmula do volume do cilindro e diferencie o volume em relação a altura e ao raio.

6.6 Diferencie a temperatura em relação à pressão e ao volume.

6.7 Utilize a diferencial de volume em relação ao raio maior e ao raio menor.

6.8 Utilze a regra da cadeia para encontrar a diferencial do volume.

6.9 Utilize a regra da cadeia para encontrar a taxa de variação.

6.10 Use a regra da cadeia para encontrar as derivadas de segunda ordem.

6.11 Utilize a regra da cadeia.

6.12 Use a fórmula do cálculo da derivada direcional.

6.13 Use a fórmula da derivada direcional, o vetor gradiente e sua norma.

6.14 Utilize o teste da segunda derivada.

6.15 Utilize o teste da segunda derivada.

6.16 O lucro é a receita menos o custo de produção.

6.17 Após encontrar $P(1)$ e $P(2)$, utilize o quadrado da distância entre pontos para encontrar a função que devemos derivar.

6.18 A função lucro é dada pela receita menos o custo.

6.19 Utilize o teorema do valor extremo.

6.20 As dimensões do retângulo nos fornecem os limites de integração.

6.21 Observe que devemos integrar a função $z(x, y)$ nos intervalos de integração dados.

6.22 Esboce a região limitada pelas superfícies para obter os limites de integração e o sólido a ser integrado.

6.23 Use as fórmulas do cálculo de massa e do centro de massa.

6.24 Esboce a região limitada pelas superfícies para obter os limites de integração e o sólido a ser integrado.

6.25 Utilize o teorema de Pitágoras para encontrar a função densidade.

6.26 Utilize a fórmula.

Respostas

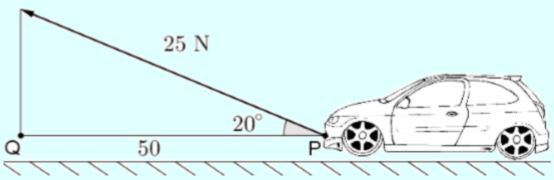
6.1 trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$, quando o seu ponto de aplicação de move ao longo do vetor $\overrightarrow{PQ}$, é dado por

$$W = ||\text{proj}_{\overrightarrow{\text{PQ}}}\overrightarrow{F}||\ ||\ \overrightarrow{\text{PQ}}\ ||,$$

com $\text{proj}_{\overrightarrow{\text{PQ}}}\ \vec{F}$ a projeção de $\vec{F}$ sobre $\overrightarrow{PQ}$.

Calcule o trabalho realizado para deslocarmos um carro por 50 metros aplicando-se uma força de 25 N num cabo que faz um ângulo de 20° com a direção horizontal.

Solução:



Note que

$$\vec{F} = 25\cos(20^\circ)\vec{i} + 25\text{sen}(20^\circ)\vec{j} \ \text{ e } \ \vec{PQ} = 50\vec{i}$$

dessa forma,

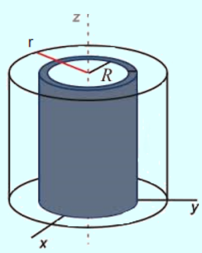
$$||\text{proj}_{\overrightarrow{\text{PQ}}}\overrightarrow{F}|| = 25\cos(20^\circ) \ \text{ e } \ ||\tilde{\text{PQ}}|| = 50,$$

portanto o trabalho foi

$$W = 1250\cos(20^\circ)\ J$$

6.2 Faça o que se pede:

(a) Um cilindro anular tem um raio interno R e um raio externo r (veja figura). Seja o momento de inércia dado por $I = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$ com m a massa. Os dois raios crescem à taxa de 2 centímetros por segundo. Calcule a taxa na qual I varia no instante que os raios são 6 e 8, respectivamente.



Solução: Temos que $I = I(R, r)$ com $I = \dfrac{m}{2}(R^2 + r^2)$. Vamos calcular a taxa de variação $\dfrac{dI}{dt}$ aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial R} \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{\partial I}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = mR\frac{dR}{dt} + mr\frac{dr}{dt}.$$

Como a variação dos raios é igual a 2 no instante em que os raios são 6 e 8 segue que

$$\frac{dI}{dt} = m \cdot 8 \cdot 2 + m \cdot 6 \cdot 2 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 28m\, cm^2/s.$$

(b) A voltagem V em um circuito elétrico decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor no resistor. Use a lei de Ohm, $V = I.R$, para calcular como a corrente I está variando no momento que $R = 400\Omega$, $I = 0,08$A, $\dfrac{dV}{dt} = -0,01$ V/s e $\dfrac{dR}{dt} = 0,03$ Ω/s.

Solução: Da lei de Ohm temos

$$V = I.R \Rightarrow I = \frac{V}{R}.$$

Assim, aplicando a regra da cadeia obtemos a seguinte taxa de variação de I:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R} \cdot \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right) \cdot \frac{dR}{dt}.$$

Vamos determinar $\dfrac{dI}{dt}$ no instante em que $R = 400\Omega$, $I = 0,08$A, $\dfrac{dV}{dt} = -0,01$ V/s e $\dfrac{dR}{dt} = 0,03$ Ω/s. Logo,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{400} \cdot (-0,01) - \frac{0,008}{400} \cdot 0,03 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -3,1 \times 10^{-5}\text{A/s}.$$

6.3 Uma equipe de oceonógrafos está mapeando o fundo do oceano para ajudar no resgate de um navio afundado. Usando um sonar, eles desenvolveram o modelo

$$D(x, y) = 250 + 3\,x^2 + 50\,\text{sen}\left(\frac{\pi\, y}{2}\right).$$

com $D(x, y)$ a profundidade e x e y as distâncias em quilômetro.

(a) Qual a profundidade do navio se ele está localizado nas coordenadas $x = 1$ e $y = \dfrac{1}{2}$?;

Solução: Como a profundidade é dada pela função D, logo

$$D\left(1, \frac{1}{2}\right) = 250 + 3 \cdot 1^2 + 50 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow D\left(1, \frac{1}{2}\right) = 253 + 25\sqrt{2}.$$

(b) Determine o declive do fundo do oceano na direção positiva de x a partir da posição do navio;

Solução: Queremos determinar a derivada direcional de D na direção do vetor $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, para isto, determinemos inicialmente o gradiente de D em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Como

$$\nabla D(x, y) = 6x\mathbf{i} + 25\pi \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\mathbf{j},$$

daí

$$\nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right) = 6\mathbf{i} + \frac{25\sqrt{2}\pi}{2}\mathbf{j}.$$

Portanto o declive na direção positiva de x é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial \mathbf{u}}\left(1, \frac{1}{2}\right) &= \nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(6, \frac{25\sqrt{2}\pi}{2}\right) \cdot (1, 0) = 6.\end{aligned}$$

(c) Determine o declive do fundo do oceano na direção positiva de y a partir da posição do navio;

Solução: Queremos determinar a derivada direcional de D na direção do vetor $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, para isto, determinemos inicialmente o gradiente de D em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. No item anterior já determinamos o $\nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Portanto o declive na direção positiva de y é dado por

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}D\left(1, \frac{1}{2}\right) &= \nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(6, \frac{25\sqrt{2}\pi}{2}\right) \cdot (0, 1) \\ &= \frac{25\sqrt{2}\pi}{2}\end{aligned}$$

(d) Determine a direção de maior taxa de variação de profundidade a partir da posição do navio. Encontre o valor da taxa máxima.

Solução: A direção da maior taxa de variação a partir do ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ é dada pelo vetor $\nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right)$ que é

$$\nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right) = 6\mathbf{i} + \frac{25\sqrt{2}\pi}{2}\mathbf{j},$$

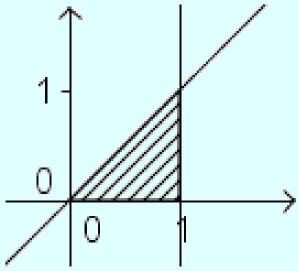
enquanto que o valor da taxa máxima é dado pela norma do gradiente, assim

$$\left\|\nabla D\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{36 + \frac{625\pi^2}{2}}$$

6.4 Usando integral dupla, calcule o volume do sólido limitado pelas equações dadas:

(a) $z = x\,y$, $z = 0$, $y = x$ e $x = 1$ no 1° octante;

Solução: Notemos inicialmente que a região de integração é a seguinte:

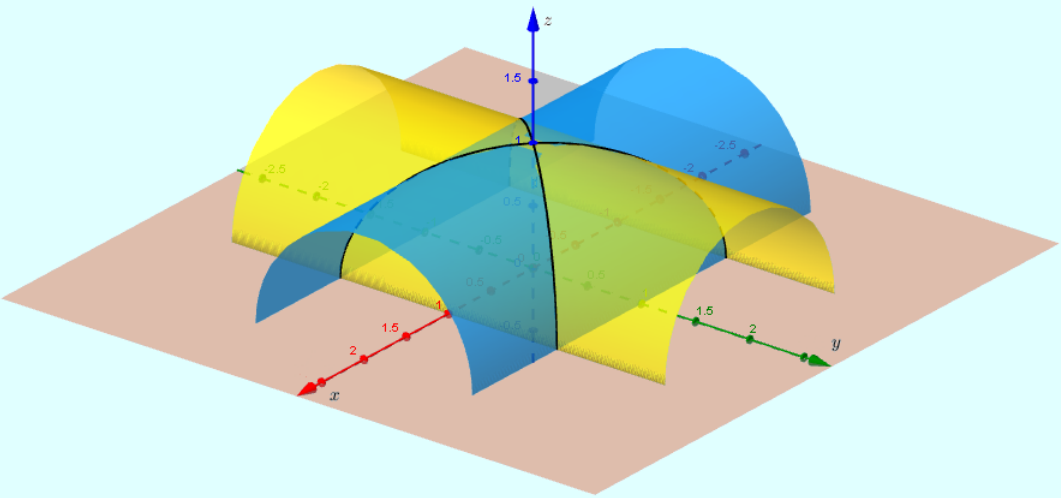


Dessa forma volume desejado será

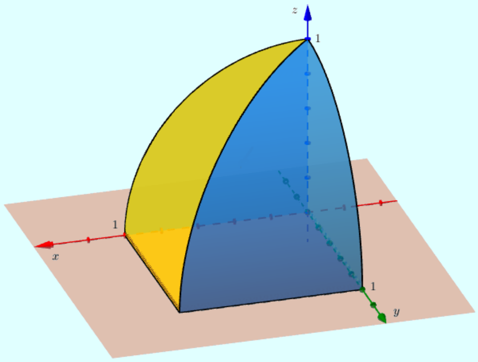
$$\begin{aligned} V = \iint_R xy\, dA &= \int_0^1\int_0^x xy\, dydx = \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

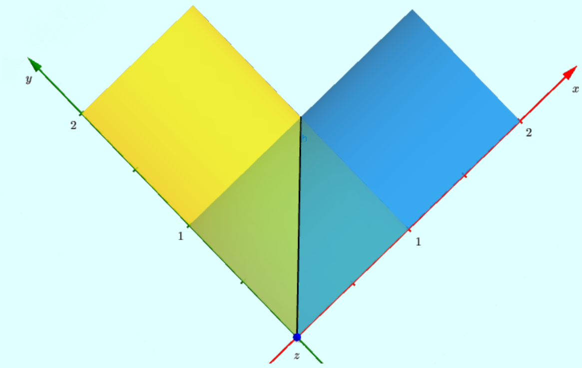
(b) $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ no 1° octante.

Solução: Nesta questão, em especial, faremos uso de algumas figuras para que a compreensão seja maior. As equações dadas descrevem dois semicilindros centrado nos eixos y e x, respectivamente, como mostra a figura a seguir, com $z \geq 0$.



como a questão exige no 1° octante, teremos a seguinte figura e sua vista superior, respectivamente

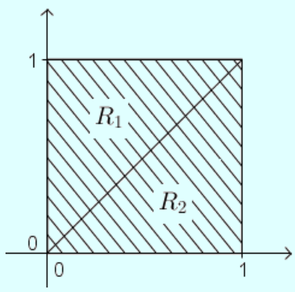




podemos observar que esses cilindros se intersectam no plano que contém o eixo z e a bissetriz do plano Oxy, pois

$$x^2 + z^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y, \text{ pois trata-se do primeiro octante}$$

dessa forma, fica fácil identificar que a região de integração será o quadrado a seguir, dividido pela bissetriz



assim, o volume será dado por

$$V = \iint_{R_1} c_1 \, dA + \iint_{R_2} c_2 \, dA$$

onde

c_1 é o semicilindro $y^2 + z^2 = 1$ (eixo central x) e R_1 é a região triangular abaixo deste.

c_2 é o semicilindro $x^2 + z^2 = 1$ (eixo central y) e R_2 é a região triangular abaixo deste.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-y^2} dx dy + \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-y^2} \right)\Big|_0^y dy + \int_0^1 \left(y\sqrt{1-x^2} \right)\Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 y\sqrt{1-y^2} dy + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $u = 1 - y^2$, $du = -2y\,dy$, $w = 1 - x^2$, $dw = -2x\,dx$ tem-se

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 w^{1/2}\,dw \\ &= \frac{1}{3}u^{3/2} + \frac{1}{3}w^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

6.5 Usando a diferencial do volume, calcule a quantidade de material necessária para construir um tambor cilíndrico fechado de 2 m de raio, 5 m de altura e 1 cm de espessura.

Solução: Escrevendo o volume V em função do raio r e da altura h do tambor, temos:

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

A quantidade de material necessária será igual à diferencial do volume dV no ponto (2,5), dada por

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}(2,5)dr + \frac{\partial V}{\partial h}(2,5)dh,$$

onde os acréscimos dr e dh são iguais a 1 cm = 0,01 m. Temos,

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r,h) = 2\pi r h$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial h}(r,h) = \pi r^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r}(2,5)dr + \frac{\partial V}{\partial h}(2,5)dh \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{100} + \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{100} \\ &= \frac{24\pi}{100} \end{aligned}$$

Logo, a quantidade de material necessária é $0,24\pi\ m^3$.

6.6 A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Para um dado gás, ao serem coletados os dados de pressão e volume, admite-se uma margem de erro de 2,3% para a pressão e 4,2% para o volume. Assim, qual o percentual máximo de erro para a temperatura?

Solução: Escrevendo a temperatura T em função de P e V, temos

$$T(P,V) = \frac{PV}{mR}.$$

O erro máximo cometido na temperatura é dado pelo diferencial total dT, quando se tem erros $dP = 0,023P$ na pressão e $dV = 0,042V$ no volume. Temos,

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{mR}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{P}{mR}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T}{\partial P}dP + \frac{\partial T}{\partial V}dV \\ &= \frac{V}{mR} \cdot 0,023P + \frac{P}{mR} \cdot 0,042V \\ &= 0,065\frac{PV}{mR} \\ &= 0,065T \end{aligned}$$

Logo, o erro percentual máximo cometido na temperatura é de 6,5%.

6.7 Se rotacionarmos uma circunferência em torno de um eixo que não intersecta a mesma, obteremos uma figura espacial chamada toro. Assim, sejam R a distância do centro da circunferência ao eixo e r o raio da circunferência. O volume de tal superfície é dado por $V = 2\pi^2 Rr^2$. Se em uma indústria automotiva deseja fabricar uma câmara de ar que, quando inflada, possui o formato de um toro com dimensões $R = 30\ cm$ e $r = 10\ cm$, qual a quantidade de borracha necessária se a espessura da mesma for $2\ mm$?

Solução: A quantidade de borracha necessária será obtida de forma aproximada fazendo o raio r sofrer um acréscimo dr de $0,2\ cm$, o que acarretará uma variação dV no volume. Observe que a distância do centro da circunferência ao eixo permanece constante. Logo, $dR = 0$. Como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}(r, R) \cdot dr + \frac{\partial V}{\partial R}(r, R) \cdot dR,$$

então

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}(10, 30) \cdot 0,2 + \frac{\partial V}{\partial R}(10, 30) \cdot 0 = \frac{\partial V}{\partial r}(10, 30) \cdot 0,2.$$

Temos

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r, R) = 4\pi^2 Rr \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r}(10, 30) = 4\pi^2 \cdot 30 \cdot 10 = 1200\pi^2.$$

Portanto, a quantidade de borracha necessária é
$dV = 1200\pi \cdot 0,2 = 240\pi^2\ cm^3$.

6.8 Em um intante de tempo t_0 o volume de um paralelepípedo é de $V = 2880\ cm^3$ e a taxa de variação do volume é de $792\ cm^3/s$. Qual a taxa de variação da altura se neste instante o comprimento c e a largura l variam às respectivas taxas de $-1\ cm/s$ e $2\ cm/s$, $c(t_0) = 24\ cm$ e $l(t_0) = 8\ cm$?

Solução: Como volume do paralelepípedo é dado por $V(t) = (c \cdot l \cdot h)(t)$, no instante t_0, temos

$$h(t_0) = \frac{V(t_0)}{c(t_0) \cdot l(t_0)} = \frac{2880}{24 \cdot 8} = 15\,cm.$$

Pela regra da cadeia, a taxa de variação do volume com relação ao tempo é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dt} + \frac{\partial V}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} \\ &= lh \cdot \frac{dc}{dt} + ch \cdot \frac{dl}{dt} + cl \cdot \frac{dh}{dt}\end{aligned}$$

Portanto, no instante $t = t_0$, temos

$$792 = 8 \cdot 15 \cdot (-1) + 24 \cdot 15 \cdot 2 + 24 \cdot 8 \cdot \frac{dh}{dt}$$

o que implica

$$\frac{dh}{dt} = \frac{792 + 120 - 720}{24 \cdot 8} = 1,0\,cm/s.$$

6.9 A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

Solução: Note que $T(x, y) = T(x(t), y(t)) = T\left(\sqrt{1+t}, 2 + \frac{1}{3}t\right)$ e o que queremos é a derivada de T em relação a t no instante $t = 3$. Para isso, usaremos a regra da cadeia que é dada por

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Temos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}.$$

Assim, para $t = 3$ obteremos:

$$\frac{dT}{dt}(3) = 4.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{3} = 2.$$

Portanto, a razão de variação da temperatura ao longo do caminho do inseto aos três segundo é $2°C/s$.

6.10 Em física, uma onda é uma pertubação oscilante de alguma grandeza física no espaço e periódica no tempo. A oscilação espacial é caracterizada pelo comprimento de onda e a periodicidade do tempo que é medida pela freqüência da onda, que é o inverso de seu período. Estas duas grandezas estão relacionadas pela velocidade de propagação da mesma.
Dentro do estudo da física, inúmeros problemas aparecem com duas ou mais variáveis independentes, sendo que um dos modelos matemáticos para o estudo e resolução desses problemas envolve equações diferenciais parciais. Um exemplo disso é o problema da corda vibrante com extremidades fixas que consiste na equação diferencial parcial dada por:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad a \text{ constante.} \tag{17}$$

As primeiras tentativas para o estudo do movimento real da corda foram feitas por, Brook Taylor em 1713, mas a solução geral do problema foi obtida por d'Alembert (1747), Euler (1748) e Daniel Bernoulli (1753).
Assim, verifique que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda dada pela equação (17).

Solução: Iremos verificar que $z = f(x + at) + g(x - at)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad a \text{ constante.}$$

Considere $u = x + at$ e $v = x - at$. Assim,

$$z(u, v) = f(u) + g(v), \quad \text{com } u = u(x, t) \text{ e } v = v(x, t).$$

Usando a regra da cadeia teremos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}.a + \frac{\partial g}{\partial v}.(-a).$$

Derivando novamente obteremos

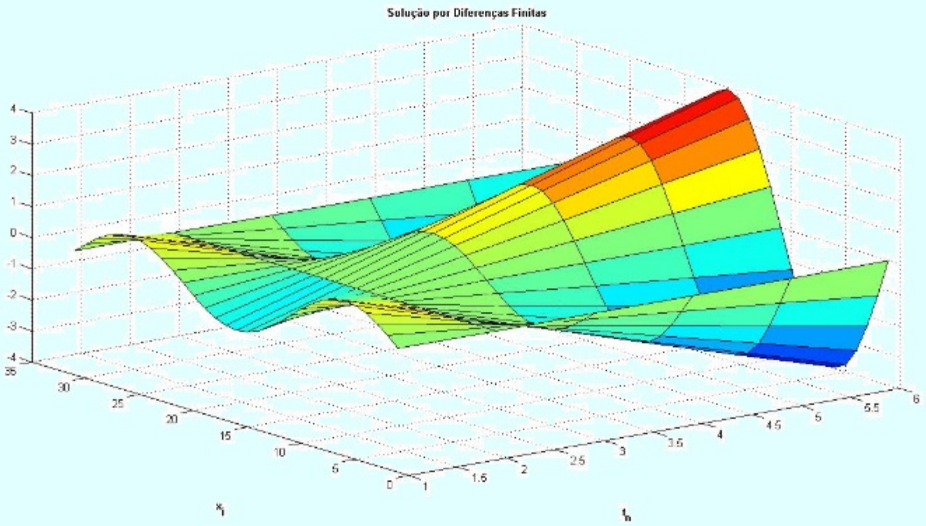
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + (-a)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) \\
&= a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + (-a)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t} \\
&= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + a^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, de forma análoga, teremos

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}. \qquad (19)
$$

Multiplicanto a equação (19) por a^2, segue a igualdade dada por (17).

A título de curiosidade, o gráfico de uma solução da equação da onda é:



6.11 Se x cresce à razão de 2 polegadas por segundo quando passa pelo valor $x = 3$ polegadas, com que velocidade deve variar y quando $y = 1$ polegada afim de que a função $2xy^2 - 3x^2y$ permaneça constante?

Solução: Seja $f(x, y) = 2xy^2 - 3x^2y$. Queremos encontrar a variação da velocidade de y para que a função f permaneça constante, ou seja, qual o valor de $\dfrac{dy}{dt}$ tal que $\dfrac{df}{dt}$ seja zero. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 6xy \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 3x^2.$$

Da regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\frac{dx}{dt} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}.2 \\
&= -\frac{4.1^2 - 12.1.3}{4.3.1 - 3.3^2} = -\frac{32}{15}.
\end{aligned}$$

Portanto, a variação de y no ponto $(3, 1)$ para que a função permaneça constante é $-\frac{32}{15}$ polegadas por segundo.

6.12 Nas proximidades de uma bóia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$, onde x, y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à bóia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

Solução: Temos que o pescador está situado no ponto $A = (80, 60)$ e está indo em direção à bóia que está no ponto $B = (0, 0)$. Logo, teremos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é dado por

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0) - (80, 60) = (-80, -60)$$

Queremos calcular a derivada direcional no ponto $(80, 60)$ com a direção de $\overrightarrow{u}$ o qual é o versor de $\overrightarrow{AB}$ (pois o mesmo não é unitário). Desta forma, teremos

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(-80, -60)}{\sqrt{(-80)^2 + (-60)^2}} = \frac{(-80, -60)}{\sqrt{10000}} = \left(\frac{-80}{100}, \frac{-60}{100}\right) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right).$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= 0,04x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(80, 60) = 0,04.80 = 3,2 \\
\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= -0,003y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(80, 60) = -0,003.60^2 = -10,8
\end{aligned}$$

Como a função $z = 200 + 0,02x^2 - 0,001y^3$ é diferenciável, então

$$\begin{aligned} D_u z &= \nabla z(80,60) \cdot \overrightarrow{u} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}(80,60), \frac{\partial z}{\partial y}(80,60)\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right) \\ &= (3,2\,,\ -10,8) \cdot \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right) \\ &= \frac{-12,8}{5} + \frac{32,4}{5} = \frac{19,6}{5} = 3,92. \end{aligned}$$

Como a derivada direcional é positiva, então a água sob o barco está ficando mais profunda quando ele começa a se mover.

6.13 Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $v = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

Solução: Note que, queremos a derivada direcional no ponto $P(3,4,5)$ e na direção do versor de $\overrightarrow{v}$, Calculemos o versor de $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) &= 10x - 3y + yz \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(3,4,5) = 10.3 - 3.4 + 4.5 = 38 \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) &= -3x + xz \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y}(3,4,5) = -3.3 + 3.5 = 6 \\ \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) &= xy \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z}(3,4,5) = 3.4 = 12. \end{aligned}$$

Como a função $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ é diferenciável, então

$$\begin{aligned} D_u V &= \nabla V(3,4,5) \cdot \overrightarrow{u} \\ &= (38,6,12) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{38 + 6 - 12}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa de variação é $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

Solução: A direção que V varia mais rapidamente em P é a direção do vetor gradiente o qual é $(38, 6, 12)$.

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

Solução: A taxa máxima da variação em P é dada pela norma do vetor gradiente no ponto dado. Assim, teremos

$$||\nabla V(3,4,5)|| = ||(38,6,12)|| = \sqrt{38^2+6^2+12^2} = \sqrt{1624} = 2\sqrt{406}.$$

6.14 Estude com relação a máximos e mínimos locais a função:

$f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$.

Solução: Primeiramente, acharemos os pontos críticos da função para obtermos os candidatos a ponto máximo ou mínimo local. Assim teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 3y - 6 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x + 8y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 &= 0 \\ 3x + 8y + 2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 9y &= -18 \\ 6x + 16y &= -4 \end{cases} \Rightarrow 7y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{7}$$

Substituindo na primeira equação teremos

$$2x = -3.\left(\frac{-22}{7}\right) + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{54}{7}.$$

Portanto o candidato a ser ponto de máximo ou mínimo local é $\left(\dfrac{54}{7}, \dfrac{-22}{7}\right)$. Calculemos agora as segundas derivadas parciais de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Pelo teste da segunda derivada obteremos

$$D\left(\frac{54}{7}, \frac{-22}{7}\right) = 2.8 - 3^2 = 7.$$

Portanto $\left(\frac{54}{7}, \frac{-22}{7}\right)$ é um ponto de mínimo local.

6.15 Estude com relação a máximos e mínimos locais a função:

$f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy, x > 0$ e $y > 0$.

Solução: Encontremos pontos críticos da função.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2}{x^3} + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-1}{y^2} + x = 0. \end{aligned}$$

Logo, teremos que

$$\begin{cases} \frac{-2}{x^3} + y = 0 \\ \\ \frac{-1}{y^2} + x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{y^2}.$$

Substituindo na primeira equação teremos

$$\frac{-2}{\frac{1}{y^6}} + y = 0 \Rightarrow -2y^6 + y = 0 \Rightarrow y(-2y^5 + 1) = 0.$$

Como $y > 0$, então $-2y^5 - 1 = 0$. Portanto,

$$y = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{4}}} = \sqrt[5]{4}.$$

Assim, o candidato a ser ponto de máximo ou mínimo local é $\left(\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)$. Calculemos agora as segundas derivadas de f.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{6}{x^4} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt[5]{256}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{2}{y^3} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right) = 2\sqrt[5]{8} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.
\end{aligned}
$$

Pelo teste da segunda derivada obteremos

$$D\left(\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt[5]{256}}.2\sqrt[5]{8} - 1 = 12\sqrt[5]{\frac{1}{32}} - 1 = 5$$

Portanto, o ponto $\left(\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)$ é de mínimo local.

6.16 Para produzir determinando produto cuja quantidade é determinada por z, uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y. Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro.

Solução: Sabe-se que o lucro é a receita menos o custo de produção, ou seja, o lucro é dado por

$$L = 5z - (2x + y) = 4500 - 5x^2 - 5y^2 + 160x + 205y - 2x - y = 4500 - 5x^2 - 5y^2 + 158x + 204y.$$

Assim, queremos o ponto de máximo local da função L. Para isso, devemos ter os pontos críticos de f. Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= -10x + 158 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -10y + 204 = 0.
\end{aligned}
$$

O que implica em

$$\begin{cases} -10x + 158 = 0 \\ \\ -10y + 204 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 15,8; y = 20,4$$

Verifiquemos que agora o ponto (15,8; 20,4) é de máximo local. De fato, calculando as segundas derivadas de L obteremos

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^2} = -10 \quad ; \quad \frac{\partial L^2}{\partial y^2} = -10 \quad ; \quad \frac{\partial L^2}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial L^2}{\partial y \partial x}.$$

Pelo teste da segunda derivada segue que

$$D(15,8; 20,4) = (-10).(-10) - 0^2 = 100.$$

Portanto, (15,8;20,4) é o ponto que maximiza o lucro. No entanto, queremos a produção que maximiza o mesmo. Daí, substituindo o ponto em z teremos

$$z = 900 - (15,8)^2 - (20,4)^2 + 32.15,8 + 41.20,4 = 1576,2$$

6.17 Duas partículas P_1 e P_2 deslocam-se no espaço com velocidades constantes $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1)$, respectivamente. No instante $t = 0$ a P_1 encontra-se na posição $(1,1,3)$. Sabe-se que a trajetória descrita por P_2 passa pelo ponto $(1,1,0)$. Qual deverá ser a posição de P_2 no instante $t = 0$ para que a distância mínima entre elas seja a menor possível?

Solução: Note que, como as velocidades $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são constantes então teremos que $P_1(t)$ será da forma

$$P_1(t) = (t + a, t + b, c) \quad ; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Como $P_1(0) = (1,1,3)$, logo

$$P_1(0) = (a, b, c) = (1,1,3) \Rightarrow a = 1; b = 1; c = 3.$$

Assim,

$$P_1(t) = (t + 1, t + 1, 3).$$

De forma análoga, teremos que

$$P_2(t) = (x_0, t + y_0, t + z_0) \quad ; x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}.$$

Como $P_2(t)$ passa por $(1, 1, 0)$, então

$$P_2(\bar{t}) = (x_0, \bar{t} + y_0, \bar{t} + z_0) = (1, 1, 0).$$

Segue que

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 1 - \bar{t} \\ z_0 & = & -\bar{t} \end{cases}$$

Logo obtemos $x_0 = 1$ e $y_0 = 1 + z_0$. Assim

$$P_2(t) = (1, t + 1 + z_0, t + z_0)$$

Calculando o quadrado da distância entre $P_1(t)$ e $P_2(t)$ obteremos

$$D(t) = (t + 1 - 1)^2 + (t + 1 - t - 1 - z_0)^2 + (3 - t - z_0)^2 = t^2 + z_0^2 + (t + z_0 - 3)^2$$

Derivando $D(t)$ para obter o mínimo e igualando a 0 teremos

$$0 = D'(t) = 2t + 2(t + z_0 - 3)$$

de onde

$$t = \frac{3 - z_0}{2}.$$

Logo o quadrado da distância mínima entre a curva $P_1(t)$ e $P_2(t)$ é

$$h(z_0) = D\left(\frac{3 - z_0}{2}\right) = \left(\frac{3 - z_0}{2}\right)^2 + z_0^2 + \left(\frac{3 - z_0}{2} + z_0 - 3\right)^2 = 2\left(\frac{z_0 - 3}{2}\right)^2 + z_0^2$$

Então a distância entre as retas é míma quando $h'(z_0) = 0$, ou seja

$$0 = h'(z_0) = (z_0 - 3) + 2z_0$$

de onde $z_0 = 1$. Então

$$P_2(0) = (1, 2, 1).$$

6.18 Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

Solução: A função Lucro (L) é dada pela receita menos o custo. Logo, teremos que

$$\begin{aligned} L(x,y) &= xp_1 + yp_2 - C \\ &= 120x - 2x^2 + 200y - y^2 - x^2 - y^2 - 2xy \\ &= -3x^2 - 2y^2 - 2xy + 200y + 120x. \end{aligned}$$

Encontremos o ponto de máximo da função lucro. Assim, teremos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -6x - 2y + 120 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -4y - 2x + 200$$

Segue que

$$\begin{cases} -6x - 2y + 120 = 0 \\ -4y - 2x + 200 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 60 \\ 2y + x = 100 \end{cases} \Rightarrow x = 100 - 2y$$

Substituindo na primeira equação, obteremos

$$3(100 - 2y) + y = 60 \Rightarrow 300 - 6y + y = 60 \Rightarrow y = 48 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, o candidato a ponto de máximo local é $(4, 48)$. Verifiquemos que $(4, 48)$ é o ponto de máximo local. Com efeito, calculando as segundas derivadas parciais teremos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -6 \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -4 \quad ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -2 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$$

Daí,

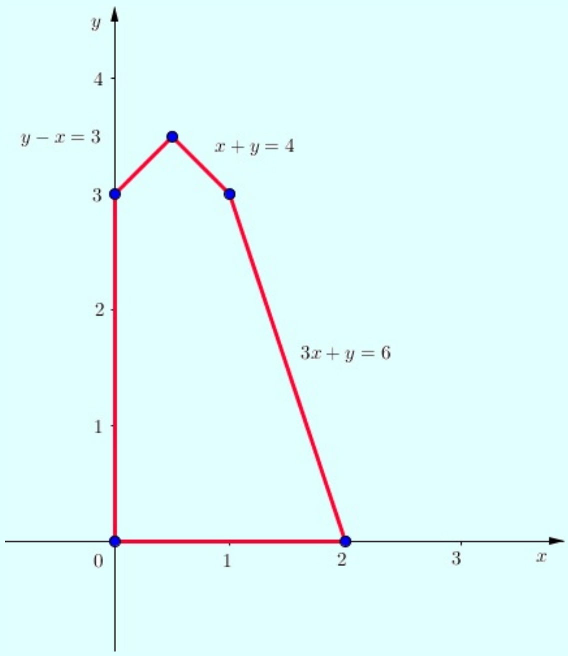
$$D(4, 48) = (-6).(-4) - (-2)^2 = 20.$$

Portanto, pelo teste da segunda derivada, $(4, 48)$ é ponto de máximo local. Logo, $x = 4$ e $y = 48$ são os valores da produção que maximiza o lucro.

6.19 Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.

(a) $f(x,y) = 3x - y$ no conjunto A de todos (x,y) tais que $x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

Solução: Note que $f(x,y) = 3x - y$ é contínua e o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4, 3x + y \leq 6\}$ é compacto, logo f assume valor máximo e mínimo. Como f não admite ponto crítico, os pontos de máximos e mínimos são atingidos na fronteira de A. Como a fronteira de A é formada por segmentos de reta, e a função f é linear, os pontos de máximo e mínimo estarão nos pontos



$$A = (0,3), B = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), C = (1,3), D = (2,0), E = (0,0).$$

Segue que,

$$\begin{array}{rcl} f(0,3) & = & -3 \\ f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) & = & -2 \\ f(1,3) & = & 0 \\ f(2,0) & = & 6 \\ f(0,0) & = & 0 \end{array}$$

Logo, o ponto de máximo de f é $(2,0)$ e o ponto de mínimo de f é $(0,3)$.

(b) $f(x,y) = 3x - y$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solução: Temos que f é contínua e A é compacto, e como f não admite ponto crítico, os pontos de máximos e mínimos são atingidos na fronteira de A. Os valores na fronteira de A são fornecidos pela função

$$F(t) = f(\cos t, \text{sen}\, t) = 3\cos t - \text{sen}\, t$$

Assim, os pontos críticos de F são

$$F'(t) = -3\text{sen}\, t - \cos t = 0 \Rightarrow \text{sen}\, t = -\frac{\cos t}{3}.$$

Daí, teremos que

$$\text{sen}^2 t = \frac{\cos^2 t}{9} \Rightarrow 1 - \cos^2 t = \frac{\cos^2 t}{9} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{9}{10} \Rightarrow \cos t = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{sen}\, t = \mp\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Como $x = \cos t$ e $y = \text{sen}\, t$, segue que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right) &= \sqrt{10} \\ f\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right) &= -\sqrt{10} \end{aligned}$$

Assim, $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ é ponto de máximo e $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ é ponto de mínimo.

6.20 Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x + 2y + z = 12$ e acima do retângulo

$$R = \{(x,y,0) | 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}.$$

Solução: Observemos primeiro que o sólido está abaixo do plano $z = 12 - 3x - 2y$ e acima do retângulo $R = [0,1,0] \times [-2,3,0]$. Portanto,

$$V = \int\int_R (12 - 3x - 2y)dA = \int_0^1 \int_{-2}^3 (12 - 3x - 2y)dydx = \int_0^1 \left[\int_{-2}^3 (12 - 3x - 2y)dy\right] dx$$

Resolvendo a integral interna teremos

$$\int_{-2}^{3}(12-3x-2y)dy = (12y-3xy-y^2)\Big|_{-2}^{3} = 12.3-3.3x-3^2-[-24+6x-4] = -15x+55$$

Segue que

$$\int_0^1(-15x+55)dy = \left(-\frac{15}{2}x^2+55x\right)\Big|_0^1 = -\frac{15}{2}+55 = \frac{95}{2}.$$

Portanto

$$V = \int\int_R (12-3x-2y)dA = \int_0^1\int_{-2}^{3}(12-3x-2y)dydx = \frac{95}{2}$$

6.21 Encontre o volume do sólido delimitado pela superfície $z = x\sec^2 y$ e pelos planos $z=0, x=0, x=2, y=0$ e $y=\dfrac{\pi}{4}$.

Solução: Temos que

$$V = \int\int_D x\sec^2 y dA.$$

Note que $D = 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$. Logo,

$$V = \int\int_D x\sec^2 y dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 x\sec^2 y dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^2 x\sec^2 y dx\right]dy.$$

Resolvendo a integral interna teremos

$$\int_0^2 x\sec^2 y dx = \sec^2 y\int_0^2 xdx = \sec^2 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\sec^2 y.$$

Assim, segue que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 y = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 y = 2\Big[\text{tg}y\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

Portanto, o volume do sólido é

$$V=\int\int_D x\sec^2 y dA=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 x\sec^2 y dx dy=2$$

6.22 Determine o volume do sólido dado:

(a) Abaixo do parabolóide $z=x^2+y^2$ e acima da região delimitada por $y=x^2$ e $x=y^2$.

Solução: Note que

$$D=\{0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq \sqrt{x}\}$$

Logo, teremos que

$$V=\int\int_D (x^2+y^2)dA=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)dydx=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)dy\right]dx$$

Calculando a integral interna teremos

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)dy=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}=x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}$$

Assim, segue que

$$\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left[\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{2}{15}\sqrt{x^5}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{6}{35}$$

Portanto, o volume do sólido é

$$V=\int\int_D (x^2+y^2)dA=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)dydx=\frac{6}{35}$$

(b) Limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $y=z, x=0, z=0$ no primeiro octante.

Solução: Temos que

$$D=\{0\leq x\leq 1; 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Segue, então, que

$$V = \int\int_D ydA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydydx = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\right] dx$$

Calculando a integral interna teremos

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{2}$$

Daí,

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Portanto, o volume do sólido é dado por

$$V = \int\int_D ydA = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} ydydx = \frac{1}{3}.$$

6.23 Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região

$$D = \{(x, y)|1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$$

e tem função densidade $\rho(x, y) = ky^2$.

Solução: Lembremos que

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x, y)dA \quad ; \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x, y)dA \quad ; \quad m = \int\int_D \rho(x, y)dA,$$

onde m é a massa da lâmina e $(\overline{x}, \overline{y})$ o centro de massa da lâmina. Primeiramente, calculemos a massa da lâmina, logo

$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA = m = \int_1^3 \int_1^4 ky^2dydx = \int_1^3 \left[\int_1^4 ky^2dy\right] dx$$

Resolvendo a integral interna teremos

$$\int_1^4 ky^2dy = k\int_1^4 y^2dy = k\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^4 = 21k$$

Daí,

$$\int_1^3 21k\,dx = k\int_1^3 21\,dx = k\Big[21x\Big]_1^3 = 42k$$

Calculemos agora o centro de massa da lâmina

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)dA = \frac{1}{42k}\int_1^3\int_1^4 xky^2dydx = \frac{1}{42}\int_1^3\left[\int_1^4 xy^2dy\right]dx$$

Resolvendo a integral interna obteremos

$$\int_1^4 xy^2dy = x\int_1^4 y^2dy = x\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^4 = 21x$$

Assim, segue que

$$\frac{1}{42}\int_1^3 21x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 2$$

Por outro lado,

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)dA = \frac{1}{42k}\int_1^3\int_1^4 yky^2dydx = \frac{1}{42}\int_1^3\left[\int_1^4 y^3dy\right]dx$$

Temos que

$$\int_1^4 y^3dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_1^4 = \frac{255}{4}$$

Daí,

$$\frac{1}{42}\int_1^3 \frac{255}{4}dx = \frac{255}{168}\int_1^3 dx = \frac{255}{168}\Big[x\Big]_1^3 = \frac{85}{28}$$

Logo, o centro de massa da lâmina é $\left(2, \frac{85}{28}\right)$ e a massa é $42k$.

6.24 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado:

(a) Acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Solução: Note que o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Assim,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\int\int_D \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right); \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Usando as coordenadas polares obteremos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - \sqrt{r^2}\right) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) r dr\right] d\theta.$$

Resolvendo a integral interna teremos

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) r dr = \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Assim, segue que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

(b) Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Solução: Perceba que o sólido é dado da região do interior do cilindro e entre as superfícies $z = \sqrt{64 - 4(x^2 + y^2)}$ e $-z = \sqrt{64 - 4(x^2 + y^2)}$. Portanto, obteremos

$$\int\int_D \left(\sqrt{64 - 4(x^2 + y^2)} - \left(-\sqrt{64 - 4(x^2 + y^2)}\right)\right) dA = \int\int_D 2\sqrt{64 - 4(x^2 + y^2)} dA,$$

onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Usando coordenadas polares teremos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 2\sqrt{64 - 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 4\sqrt{16 - r^2} r dr\right] d\theta$$

Fazendo o cálculo da integral interna têm-se que

$$\int_0^2 4\sqrt{16-r^2}r dr = 4\left[-\frac{1}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 4\left(-8\sqrt{3}+\frac{64}{3}\right)$$

Assim, segue que

$$\int_0^{2\pi} 4\left(-8\sqrt{3}+\frac{64}{3}\right)d\theta = 4\left(-8\sqrt{3}+\frac{64}{3}\right)\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{64\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$

6.25 Encontre o centro de massa de uma lâmina em forma de um triângulo retângulo isósceles, com os lados iguais tendo comprimento a, se a densidade em qualquer ponto for proporcional ao quadrado da distância do vértice oposto à hipotenusa.

Solução: Lembremos que

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)dA \quad ; \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)dA \quad ; \quad m = \int\int_D \rho(x,y)dA,$$

onde m é a massa da lâmina e $(\overline{x},\overline{y})$ o centro de massa da lâmina. Considerando o triângulo isósceles de vértices $(0,0)$, $(0,a)$, $(a,0)$ com $(0,0)$ sendo o vértice oposto a hipotenusa, teremos que

$$\rho(x,y) = k(x^2+y^2)$$

Assim, calculando a massa da lâmina obteremos

$$m = \int\int_D \rho(x,y)dA = \int_0^a\int_0^{a-x} k(x^2+y^2)dydx = \int_0^a\left[\int_0^{a-x} k(x^2+y^2)dy\right]dx$$

Resolvendo a integral interna teremos

$$\int_0^{a-x} k(x^2+y^2)dy = k\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dy = k\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} = k\left[(a-x)x^2+\frac{(a-x)^3}{3}\right]$$

Daí,

$$\int_0^a k\left[(a-x)x^2+\frac{(a-x)^3}{3}\right]dx = k\left[a\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(a-x)^4}{12}\right]_0^a = \frac{k}{6}a^4$$

Calculemos agora o centro de massa da lâmina

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)dA = \frac{6}{a^4}\int_0^a\int_0^{a-x} x(x^2+y^2)dydx = \frac{6}{a^4}\int_0^a\left[\int_0^{a-x} x(x^2+y^2)dy\right]dx$$

Resolvendo a integral interna obteremos

$$\int_0^{a-x} x(x^2+y^2)dy = \left[x^3y + x\frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} = (a-x)x^3 + \frac{x(a-x)^3}{3}$$

Assim, segue que

$$\frac{6}{a^4}\int_0^a\left((a-x)x^3 + \frac{x(a-x)^3}{3}\right)dx = \frac{6}{a^4}\left[a\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{a^3x^2}{6} - \frac{a^2x^3}{3} + \frac{ax^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{2a}{5}$$

Por outro lado,

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)dA = \frac{6}{a^4}\int_0^a\int_0^{a-x} y(x^2+y^2)dydx = \frac{6}{a^4}\int_0^a\left[\int_0^{a-x} y(x^2+y^2)dy\right]dx$$

Calculando a integral interna obteremos

$$\int_0^{a-x} y(x^2+y^2)dy = \left[\frac{y^2x^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_0^{a-x} = \frac{(a-x)^2x^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{4}$$

Assim, segue que

$$\frac{6}{a^4}\int_0^a\left(\frac{(a-x)^2x^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{4}\right)dx = \frac{6}{a^4}\left[\frac{a^2x^3}{6} - \frac{ax^4}{4} + \frac{x^5}{10} - \frac{(a-x)^5}{20}\right]_0^a = \frac{2a}{5}$$

Portanto, o centro de massa da lâmina é $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$

6.26 Encontre os momentos de inércia I_x, I_y, I_0 para a lâmina do exercício anterior.

Solução: Lembremos que

$$I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dA \quad ; \quad ; I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dA \quad ; \quad I_0 = I_x + I_y$$

Assim, calculemos I_x

$$I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dA = \int_0^a\int_0^{a-x} y^2k(x^2+y^2)dydx = k\int_0^a\left[\int_0^{a-x} y^2(x^2+y^2)dy\right]dx$$

Calculando a integral interna obteremos

$$\int_0^{a-x} y^2(x^2+y^2)dy = \left[\frac{y^3x^2}{3}+\frac{y^5}{5}\right]_0^{a-x} = \frac{(a-x^3)x^2}{3}+\frac{(a-x)^5}{5}$$

Logo,

$$k\int_0^a\left(\frac{(a-x^3)x^2}{3}+\frac{(a-x)^5}{5}\right)dx = k\left[\frac{a^3x^3}{9}-\frac{a^2x^4}{4}+\frac{ax^5}{5}-\frac{x^6}{18}-\frac{(a-x)^6}{30}\right]_0^a = \frac{7ka^6}{180}$$

Calculemos I_y

$$I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dA = \int_0^a\int_0^{a-x} kx^2(x^2+y^2)dydx = k\int_0^a\left[\int_0^{a-x} x^2(x^2+y^2)dy\right]dx$$

Resolvendo a integral interna teremos

$$\int_0^{a-x} x^2(x^2+y^2)dy = \left[x^4y+\frac{x^2y^3}{3}\right]_0^{a-x} = (a-x)x^4+\frac{(a-x)^3x^2}{3}$$

Daí, segue que

$$k\int_0^a\left((a-x)x^4+\frac{(a-x)^3x^2}{3}\right)dx = k\left[\frac{ax^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{a^3x^3}{9}-\frac{a^2x^4}{4}+\frac{ax^5}{5}-\frac{x^6}{18}\right]_0^a = \frac{7ka^6}{180}$$

Como $I_0 = I_x + I_y$, teremos que

$$I_0 = \frac{7ka^6}{90}.$$