PROJETO
Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo II

2

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

José Miguel Martins Veloso

Caderno 2: Exercícios de Cálculo II

1ª Edição

editAedi
Assessoria de Educação a Distância - UFPA

2017

REVISÃO
Edilson dos Passos Neri Junior

CAPA
Giordanna De Gregoriis

DIAGRAMAÇÃO
Alan Raiol

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Veloso, José Miguel Martins
Caderno 2 de Exercícios: cálculo II / Cristina Lúcia Dias Vaz.
- Belém: AEDI/UFPA, 2017

ISBN E-book: 978-85-65054-45-4

1. Cálculo diferencial e integral
2. Exercícios de cálculo
3. Projeto Newton

Caderno de Questões - Cálculo II

Sumário

Curvas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- O espaço $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades;
- Equação da circunferência e da esfera;
- Domínio, imagem e gráfico de funções vetoriais;
- Limite e continuidade de funções vetoriais;
- Derivada de funções vetoriais;
- Comprimento de arco.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria analítica;
- Limite e continuidade de funções de uma variável;
- Derivação e integração de funções de uma variável.

Métodos e Técnicas

Conhecimentos básicos de geometria analítica e cálculo componente a componente.

- Nos seguintes exercícios utilizam-se alguns conhecimentos básicos de geometria analítica.

Exercícios 1.1, 1.2

- Efetua-se os cálculos por cada componente no seguinte exercício, utilizando as regras imediatas de limite.

Exercício 1.9

●○○○

1.1 Considere os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e $D = (0, 0, \sqrt{2})$. Mostre que A, B, C, D são vértices de um tetraedro regular.

●●○○

1.2 Encontre o ortocentro do triângulo ACD onde $A = (0, 1, 0)$, $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e $D = (0, 0, \sqrt{2})$.

●●○○

1.3 Construa um paralelepípedo que possua entre suas arestas os segmentos AB, AC e AD onde $A = (1, 0, 1)$, $B = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$, $C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$ e $D = \left(2, \frac{1}{4}, 0\right)$. Faça uma representação do paralelepípedo no GeoGebra.

●●●○

1.4 A circunferência C_1 tem equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Encontre a circunferência C_2 concêntrica a C_1 de tal modo que exista um triângulo inscrito em C_1 e que C_2 seja inscrita no triângulo.

●●○○

1.5 Encontre a equação da esfera que contém os pontos $A = (0, 1, 0)$, $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e $D = (0, 0, \sqrt{2})$ sobre um grande círculo.

●○○○

1.6 Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, 1, 1)$ e $C(0, 0, 0)$, escreva as equações paramétricas da reta que contêm a mediana, relativa ao lado AB, do triângulo ABC.

●●○○

1.7 O movimento de uma partícula é tal que no instante t sua posição é

$$P(t) = (1 + t, 1 - 2t, t).$$

(a) Em que instante a partícula está mais próxima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

(b) Qual o ponto desta esfera mais próximo da trajetória da partícula?

●●○○

1.8 Desenhe a imagem:

(a) $F(t) = \left(t, t, \frac{1}{t}\right)$;

(b) $F(t) = \left(e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t}\right)$

●●○○

1.9 Calcule:

(a) $\lim\limits_{t \to 0} \overrightarrow{F}(t)$, onde $\overrightarrow{F}(t) = \left(\frac{\tan 3t}{t}, \frac{e^{2t} - 1}{t}, t^3\right)$;

(b) $\lim\limits_{t \to 2} \overrightarrow{r}(t)$, onde $\overrightarrow{r}(t) = \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4}\overrightarrow{i} + \frac{\cos \frac{\pi}{t}}{t - 2}\overrightarrow{j} + 2t\,\overrightarrow{k}$.

●●●○

1.10 Calcule o comprimento da curva dada:

(a) $\gamma(t) = (t, \ln t), t \in [1, e]$;

(b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^{-t}), t \in [0, \pi]$.

●●●○

1.11 Um tanque de guerra está com seu canhão disparando apenas na direção frontal. Seu deslocamento ocorre segundo a trajetória $\gamma(t) = (t, t^2)$ onde t é o parâmetro tempo. Em que instante t deve atirar para alcançar um alvo na posição $P = (5, 16)$?

●●●●

1.12 Uma partícula se desloca em relação ao tempo de acordo com a equação $r(t) = (t+1, t^2+5)$. Uma outra partícula se desloca segundo a reta $y = 3x - \frac{1}{4}$. Se no instante $t = 0$ a posição da segunda partícula é $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ e está se deslocando com velocidade constante, que velocidade deve ter para estarem simultaneamente no ponto de tangência?

●●○○

1.13 Encontre o ângulo entre as curvas $a(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t - 1, \cos t + 1)$ e $b(s) = (s, s, s + 2)$ nos pontos de interseção.

Sugestões

1.1 Utilize a fórmula da distância entre dois pontos no espaço.

1.2 Lembre-se que se o triângulo é equilátero o ortocentro coincide com o baricentro. Logo, encontre o baricentro do triângulo.

1.3 Considere cada aresta do paralelepípedo como um vetor e utilize isto para determinar os demais vetores (arestas) partindo de cada um dos pontos (vértices do paralelepípedo).

1.4 Encontre o raio da circunferência C_1 e resolva o problema com a circunferência transladada para a origem. Em seguida, encontre o triângulo equilátero inscrito em na circunferência transladada e a partir dele determine através de uma de suas arestas o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo. Após determinar a equação da circunferência inscrita no triângulo, translade-a de volta o centro de C_1.

1.5 O triângulo ACD é equilátero e sabe-se que o centro da circunferência circunscrita coincide com o baricentro do triângulo. Então determina-se o raio da esfera e em seguida encontra-se a equação da esfera.

1.6 Encontre o ponto médio de AB, e encontre a equação vetorial da reta que passa por C e tem a direção do vetor que passa por estes pontos.

1.7 A partícula estará mais próxima da esfera no instante que estiver mais próxima de seu centro $(0, 0, 0)$.

1.8 Faça a representação das imagens em um software computacional para facilitar a visualização.

1.9 Calcule o limite de cada componente.

1.10 Utilize a fórmula abaixo para determinar o comprimento do arco de uma curva.

$$L = \int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||\, dt.$$

1.11 Encontre a equação para a reta tangente a curva γ no ponto $\gamma(t)$ e em seguida utilize o ponto que indica a posição alvo para determinar t.

1.12 Determine a parametrização adequada da reta de modo que para um mesmo parâmetro t as partículas se encontrem no ponto de tangência.

1.13 Encontre o ponto de interseção das curvas e em seguida utilize a fórmula abaixo para determinar o ângulo entre as curvas.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}'(s)}{||\mathbf{a}'(t)||\;||\mathbf{b}'(s)||}.$$

Respostas

1.1 Considere os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e $D = (0, 0, \sqrt{2})$. Mostre que A, B, C, D são vértices de um tetraedro regular.

Solução:

$$\begin{aligned}
d(A, B) &= d(A, C) = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1 + 1/2)^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\
d(A, D) &= \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} \\
d(B, C) &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\
d(B, D) &= d(C, D) = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Como todas as arestas tem mesmo comprimento, as faces são triângulos equiláteros, logo o tetraedro é regular.

1.2 Encontre o ortocentro do triângulo ACD onde $A = (0, 1, 0)$, $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e $D = (0, 0, \sqrt{2})$.

Solução: Como o triângulo é equilátero, o ortocentro coincide com o baricentro. Seja M o ponto médio do segmento CD.

$$M = \frac{1}{2}(C + D) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}/2, -1/2, \sqrt{2}) = (\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{2}/2).$$

Então

$$AM = M - A = (\sqrt{3}/4, -1/4, \sqrt{2}/2) - (0, 1, 0) = (\sqrt{3}/4, -5/4, \sqrt{2}/2)$$

Logo o baricentro (ortocentro) tem coordenadas

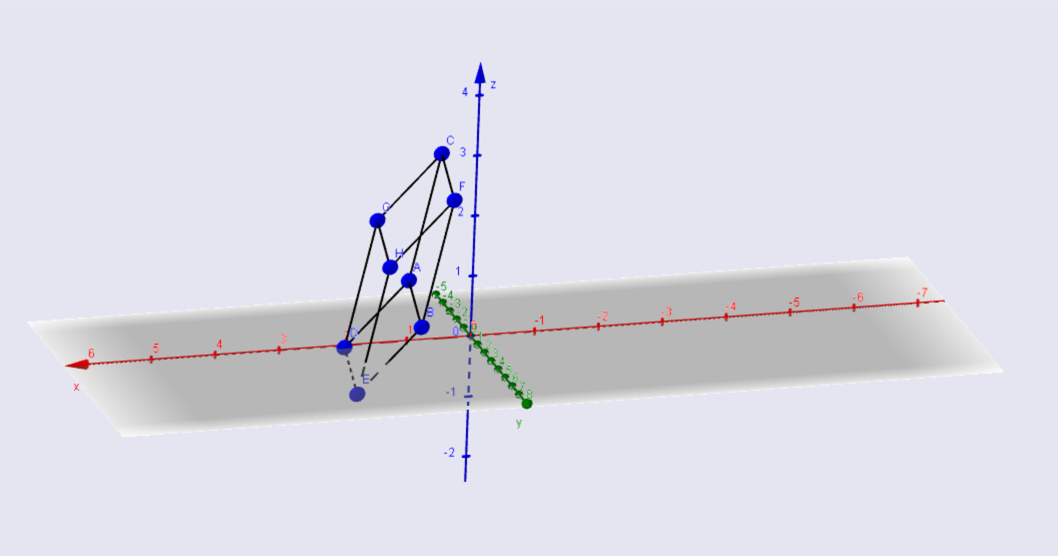
$$B = A + \frac{2}{3}AM = (0, 1, 0) + \frac{2}{3}(\sqrt{3}/4, -5/4, \sqrt{2}/2) = (\sqrt{3}/6, 1/6, \sqrt{2}/3)$$

1.3 Construa um paralelepípedo que possua entre suas arestas os segmentos AB, AC e AD onde $A = (1, 0, 1)$, $B = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$, $C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$ e $D = \left(2, \frac{1}{4}, 0\right)$. Faça uma representação do paralelepípedo no GeoGebra.

Solução: Considere os vetores $\vec{AB} = B - A = (0, 2, -1/2)$ e $\vec{AD} = D - A = (1, 1/4, -1)$. Como a figura é um paralelepípedo, temos os vértices restantes

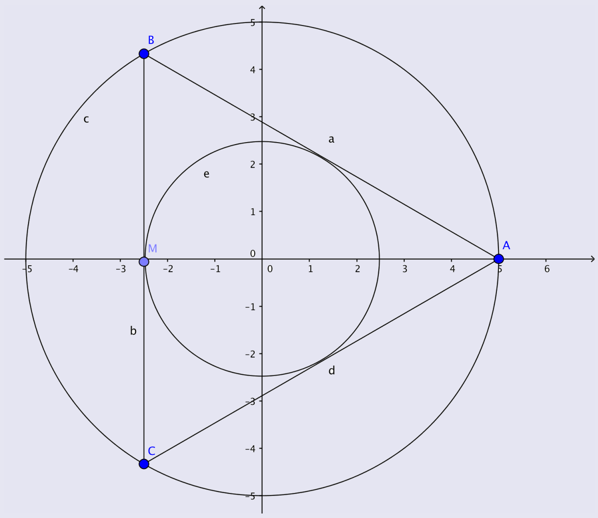
$$\begin{array}{rcl} E &=& B + \vec{AD} = (1,2,1/2) + (1,1/4,-1) = (2,9/4,-1/2) \\ G &=& C + \vec{AB} = (1/2,-1/2,3) + (0,2,-1/2) = (1/2,3/2,5/2) \\ H &=& C + \vec{AD} = (1/2,-1/2,3) + (1,1/4,-1) = (3/2,-1/4,2) \\ F &=& G + \vec{AD} = (1/2,3/2,5/2) + (1,1/4,-1) = (3/2,7/4,3/2). \end{array}$$

A figura é



1.4 A circunferência C_1 tem equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Encontre a circunferência C_2 concêntrica a C_1 de tal modo que exista um triângulo inscrito em C_1 e que C_2 seja inscrita no triângulo.

Solução: A circunferência C_1 tem centro $(3,4)$ e raio 5, isto é, sua equação é $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$. Vamos resolver o problema para a circunferência C de equação $x^2 + y^2 = 5^2$ e depois trasladar a solução de C pelo vetor $(3,4)$. Vamos buscar como solução o triângulo equilátero inscrito em C que tem como vértices $A = (1,0)$, $B = (5\cos 2\pi/3, 5\ \mathrm{sen} 2\pi/3)$ e $C = (5\cos 2\pi/3, -5\ \mathrm{sen} 2\pi/3)$.



O ponto de tangência da circunferência inscrita é $M = (-5/2, 0)$, logo seu raio é $r = 5/2$. Nossa equação para C_2 é $(x-3)^2 + (y-4)^2 = (5/2)^2$ ou $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 75/4 = 0$.

1.5 Encontre a equação da esfera que contém os pontos $A = (0, 1, 0)$, $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ e $D = (0, 0, \sqrt{2})$ sobre um grande círculo.

Solução: Sabemos do problema 1.1 que o triângulo ACD é equilátero. Logo da geometria se $M = (A + D)/2 = (0, 1/2, \sqrt{2}/2)$ então o centro da circunferência circunscrita é

$$X = C + \frac{2}{3}\vec{CM}.$$

Temos $\vec{CM} = M - C = (0, 1/2, \sqrt{2}/2) - (\sqrt{3}/2, -1/2, 0) = (-\sqrt{3}/2, 1, \sqrt{2}/2)$ e assim

$$X = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

O raio é

$$d(A, X) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$$

A equação da esfera é

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1.$$

1.6 Dados $A(2, 1, 3)$, $B(4, 1, 1)$ e $C(0, 0, 0)$, escreva as equações paramétricas da reta que contêm a mediana, relativa ao lado AB, do triângulo ABC.

Solução: Temos que o ponto médio de AB é

$$\frac{A+B}{2} = (3, 1, 2)$$

A reta que contém o ponto médio e passa pelo ponto C é

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(3, 1, 2)$$

Como queremos as equações paramétricas, segue que

$$\begin{cases} x &= 3t \\ y &= t \\ z &= 2t \end{cases}$$

1.7 O movimento de uma partícula é tal que no instante t sua posição é

$$P(t) = (1+t, 1-2t, t).$$

(a) Em que instante a partícula está mais próxima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Solução: A partícula está mais próxima da esfera no instante que estiver mais próxima de seu centro. A distância de um ponto da trajetória da partícula ao centro da esfera é dada por

$$D = \sqrt{(1+t)^2 + (1-2t)^2 + t^2}$$

O mínimo desta distância ocorre quando

$$\frac{d}{dt}[(1+t^2) + (1-2t^2) + t^2] = 0 \Rightarrow 2(1+t) - 4(1-2t) + 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

(b) Qual o ponto desta esfera mais próximo da trajetória da partícula?

Solução: O ponto da esfera mais próximo da trajetória é o ponto de interseção da esfera com a reta que passa por $(0, 0, 0)$ e $\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$. Assim, segue que

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = \frac{7}{6}t \\ \\ y = \frac{2}{3}t \\ \\ z = \frac{1}{6}t \end{cases}$$

Fazendo a interseção com a esfera obteremos

$$\frac{49}{36}t^2 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{1}{36}t^2 = 1 \Rightarrow 66t^2 = 36 \Rightarrow t = \frac{6}{\sqrt{66}}$$

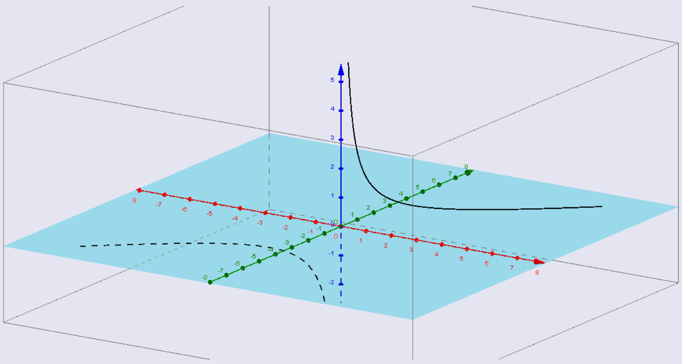
Portanto o ponto que desejamos é

$$P = \frac{1}{\sqrt{66}}(7, 4, 1)$$

1.8 Desenhe a imagem:

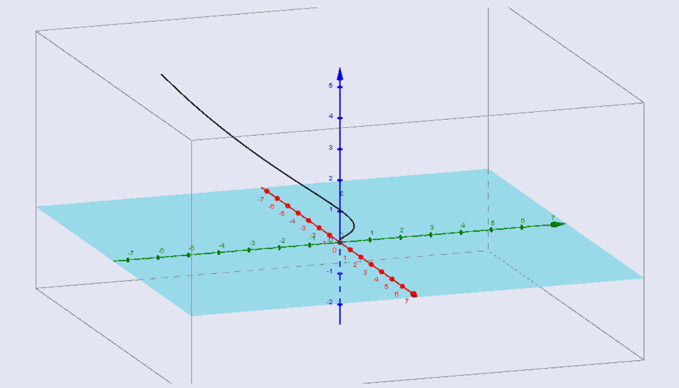
(a) $F(t) = \left(t, t, \frac{1}{t}\right)$;

Solução:



(b) $F(t) = \left(e^{-t} \cos t, e^{-t} \text{ sen } t, e^{-t}\right)$

Solução:



1.9 Calcule:

(a) $\lim_{t\to 0} \overrightarrow{F}(t)$, onde $\overrightarrow{F}(t) = \left(\frac{\tan 3t}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$;

Solução: Sabemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\tan 3t}{t} &= \lim_{t\to 0} 3\sec^2 t = 3 \\
\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{t} &= \lim_{t\to 0} 2e^{2t} = 2 \\
\lim_{t\to 0} t^3 &= 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0} \overrightarrow{F}(t) = (3, 2, 0).$$

(b) $\lim_{t\to 2} \overrightarrow{r}(t)$, onde $\overrightarrow{r}(t) = \frac{t^3-8}{t^2-4}\overrightarrow{i} + \frac{\cos\frac{\pi}{t}}{t-2}\overrightarrow{j} + 2t\overrightarrow{k}$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t^2-4} &= \lim_{t\to 2} \frac{t^2+2t+4}{t+2} = 3 \\
\lim_{t\to 2} \frac{\cos\frac{\pi}{t}}{t-2} &= \lim_{t\to 2} \left(\frac{\pi}{t^2}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{t}\right) = \frac{\pi}{4} \\
\lim_{t\to 2} 2t &= 4
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\lim_{t\to 2} \overrightarrow{r}(t) = \left(3, \frac{\pi}{4}, 4\right)$$

1.10 Calcule o comprimento da curva dada:

(a) $\gamma(t) = (t, \ln t), t \in [1, e]$;

Solução: Temos que

$$\gamma'(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right)$$

e

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$$

Logo, o comprimento de curva será

$$\int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}dt$$

Fazendo a substituição trigonométrica $\frac{1}{t} = \tan\theta$ obteremos

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e^{-1}} \sec\theta \operatorname{cossec}^2\theta d\theta = \int_{\arctan e^{-1}}^{\frac{\pi}{4}} [\sec\theta + \operatorname{cotg}\theta \operatorname{cossec}\theta]\, d\theta \\
&= \Big[\ln|\sec\theta + \tan\theta| - \operatorname{cossec}\theta\Big]_{\arctan e^{-1}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}}\right) + 1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^{-t}), t \in [0,\pi]$.

Solução: Temos que

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -e^{t})$$

e

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{1+e^{-2t}}$$

Logo, o comprimento de curva será

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+e^{-2t}}dt$$

Fazendo a substituição trigonométrica $e^{-t} = \tan\theta$ obteremos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{1+e^{-2t}}dt &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e^{-\pi}} \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}d\theta = \int_{\arctan e^{-\pi}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \tan\theta\sec\theta\right] d\theta \\
&= \Big[\ln|\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{cotg}\theta| + \sec\theta\Big]_{\arctan e^{-\pi}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+e^{-2\pi}}}{1+\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} + \pi - \sqrt{1+e^{-2\pi}}
\end{aligned}
$$

1.11 Um tanque de guerra está com seu canhão disparando apenas na direção frontal. Seu deslocamento ocorre segundo a trajetória $\gamma(t) = (t, t^2)$ onde t é o parâmetro tempo. Em que instante t deve atirar para alcançar um alvo na posição $P = (5, 16)$?

Solução: Se r_t denota a reta tangente a γ no ponto $\gamma(t)$ então

$$r_t(s) = \gamma(t) + s\gamma'(t) = (t, t^2) + s(1, 2t) = (t+s, t^2+2st).$$

Como o ponto P pertence a reta teremos $r_t(s) = P$ para algum par t e s. Resolvendo o sistema $t + s = 5$ e $t^2 + 2st = 16$ obtemos como equação para t,

$$t^2 - 10t + 16$$

que tem raízes $t_1 = 2$ e $t_2 = 8$. A segunda solução deve ser descartada porque o tanque não pode virar o canhão para sua traseira. Logo o instante de disparo é $t = 2$.

1.12 Uma partícula se desloca em relação ao tempo de acordo com a equação $r(t) = (t+1, t^2+5)$. Uma outra partícula se desloca segundo a reta $y = 3x - \frac{1}{4}$. Se no instante $t = 0$ a posição da segunda partícula é $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ e está se deslocando com velocidade constante, que velocidade deve ter para estarem simultaneamente no ponto de tangência?

Solução: Como a declividade da reta $y = 3x - \frac{1}{4}$ é 3 e $r'(t) = (1, 2t)$, teremos que a tangência ocorre quando $2t = 3$ ou $t = 3/2$. Logo o ponto de tangência é $r(3/2) = (5/2, 29/4)$. Considere $p(t) = (at, 3at - \frac{1}{4})$ a equação da reta parametrizada tal que $p(3/2) = r(3/2) = (5/2, 29/4)$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a &= \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2}a - \frac{1}{4} &= \frac{29}{4} \end{aligned}$$

de onde obtemos $a = 5/3$. Assim

$$p(t) = \left(\frac{5}{3}t, 5t - \frac{1}{4}\right)$$

e a velocidade vetorial será $\vec{v} = (5/3, 5)$ e escalar $v = \frac{5}{3}\sqrt{10}$.

1.13 Encontre o ângulo entre as curvas $a(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t - 1, \cos t + 1)$ e $b(s) = (s, s, s + 2)$ nos pontos de interseção.

Solução: Nos pontos de interseção teremos $s = \operatorname{sen} t$, $s = \cos t - 1$ e $s + 2 = \cos t + 1$. Necessariamente $\operatorname{sen} t = \cos t - 1$. Elevando ao quadrado e substituindo $\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$ teremos $2\cos t(\cos t - 1) = 0$. Também $a'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t)$ e $b'(s) = (1, 1, 1)$. As soluções possíveis são:

(i) $\cos t = 1, \operatorname{sen} t = 0$. Neste caso podemos considerar $t = 0$ e $s = 0$ no ponto de interseção que é $P_1 = (0, 0, 2)$. Então $a'(0) = (1, 0, 0)$ e $b'(0) = (1, 1, 1)$. Portanto se θ_1 é o ângulo em P_1 teremos

$$\cos\theta_1 = \frac{a'(0).b'(0)}{|a'(0)||b'(0)|} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

(ii) $\cos t = 0, \operatorname{sen} t = -1$. Neste caso podemos considerar $t = 3\pi/2$ e $s = -1$ no ponto de interseção que é $P_2 = (-1, -1, 1)$. Então $a'(3\pi/2) = (0, 1, 1)$ e $b'(-1) = (1, 1, 1)$. Portanto se θ_2 é o ângulo em P_2 teremos

$$\cos\theta_2 = \frac{a'(3\pi/2).b'(-1)}{|a'(3\pi/2)||b'(-1)|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Funções de várias variáveis

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Domínio e Imagem de uma função de várias variáveis;
- Curvas de nível;
- Superfícies de nível;
- Gráfico de uma função de várias variáveis;
- Limite e continuidade de uma função de várias variáveis.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Noções sobre domínio e imagem de função de uma variável real;
- Construção de gráficos de função de uma variável real.
- Limite e continuidade de uma função de uma variável;
- Geometria analítica;
- Geometria espacial.

Métodos e Técnicas

Esboço de gráficos.

- Nas questões a seguir utiliza-se as interseções da função com os planos coordenados e as curvas de nível para esboçar o gráfico de uma função de duas variáveis. Encontrar o domínio e imagem da função é indispensável.

Exercícios 2.1, 2.2, 2.3, 2.4

Aplicação da Definição de Limite para funções de várias variáveis.

- Aplicação da definição de continuidade para funções de várias variáveis.

Exercício 2.5

- Continuidade em funções compostas.

Exercício 2.6

●●○○

2.1 Encontre as curvas de nível das função $f(x,y) = y^2 - e^x$. Faça um gráfico com as curvas de valores constantes $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

●●●○

2.2 Encontre o domínio e a imagem da função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3xy + y^2}$. Esboce as curvas de nível de f.

●●●○

2.3 Mostre que as curvas de nível da função

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

são retas pela origem com declividade $\sqrt[3]{\dfrac{1-c}{1+c}}$. Faça um gráfico da função $g(c) = \sqrt[3]{\dfrac{1-c}{1+c}}$ e use-o para determinar o gráfico da f.

●●○○

2.4 Faça o que se pede.

(a) Determine e esboçe as curvas de nível da função

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

e, a partir desta informação, esboce o gráfico da mesma.

(b) Mostre que definindo $f(0,0) = 0$ a função obtida fica contínua em $(0,0)$.

(c) Determine a imagem de f.

●●○○

2.5 Verifique se é possível definir um valor $f(0,0)$ de modo que

$$f(x,y) = \frac{\cos(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

seja contínua em $(0,0)$.

●○○○

2.6 A função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(x^3 - y^3)}$ é contínua? Justifique.

Sugestões

2.1 Iguale a função a uma constante c e analise para $c \geq 0$ e $c < 0$.

2.2 Iguale a função a uma constante c e analise para $c \geq 0$. Verifique que as curvas de nível são hipérboles e encontre suas assíntotas a partir da análise da equação gerada.

2.3 Iguale a função a uma constante c. Verifique que $g(c)$ define a declividade das retas. Estude o sinal da $g'(c)$.

2.4 Iguale a função a uma constante c e vizualise as curvas de nível da função. Calcule o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ e tire conclusões.

2.5 Lembre-se da definição de continuidade: $f(x, y)$ é contínua em (a, b) se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} = f(a, b)$. Lembre que o limite é uma tendência e não necessariamente expressa o valor da função no ponto..

2.6 Atente para a composição de funções contínuas.

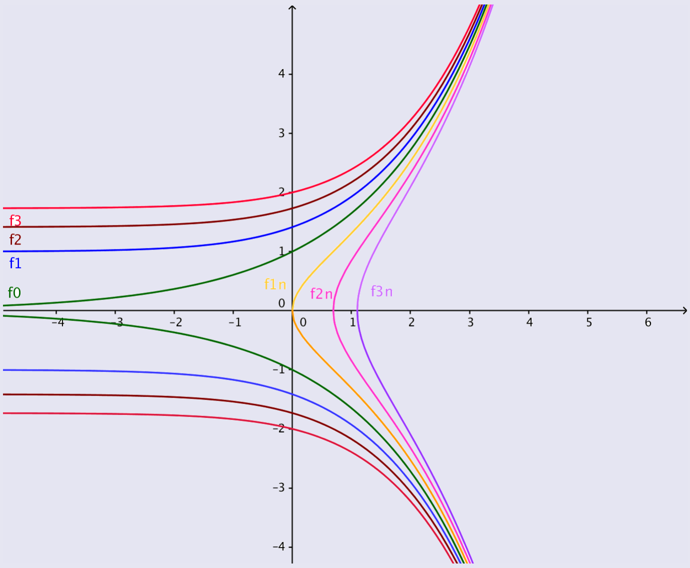
Respostas

2.1 Encontre as curvas de nível das função $f(x, y) = y^2 - e^x$. Faça um gráfico com as curvas de valores constantes $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

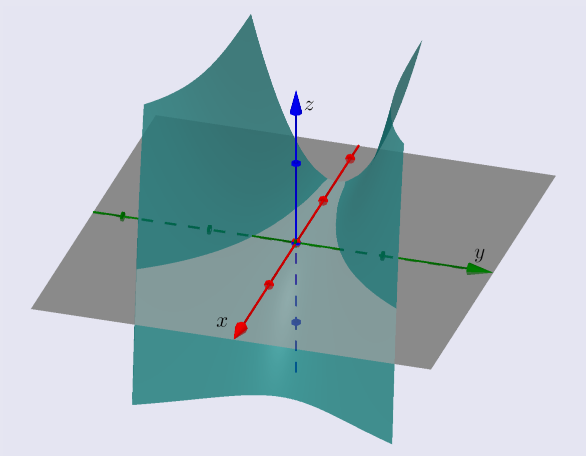
Solução: As curvas de nível são dadas por $f(x, y) = c$ onde c é constante. Logo $y^2 = e^x + c$ de onde

$$y = \pm\sqrt{e^x + c}.$$

Quando $c \geq 0$, y nunca é 0, logo a curva de nível é formado por dois trechos conexos. Quando $c < 0$, teremos uma única curva com $x \geq \ln(-c)$.



O gráfico da função é



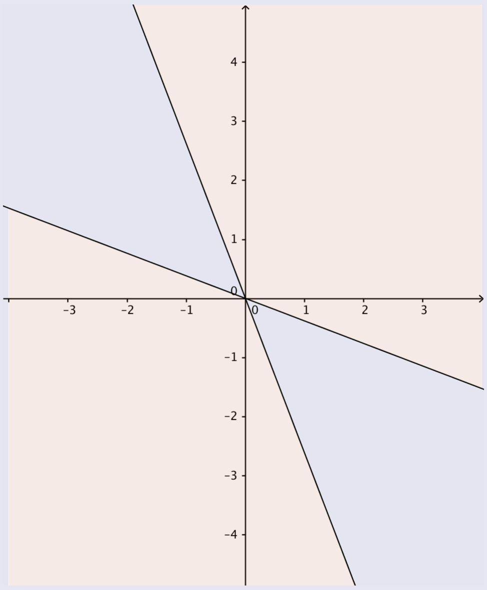
2.2 Encontre o domínio e a imagem da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3xy + y^2}$. Esboce as curvas de nível de f.

Solução: As curvas de nível são $f(x,y) = \sqrt{x^2+3xy+y^2} = c$ ou $x^2+3xy+y^2 = c^2$, com $c \geq 0$. Podemos escrever

$$x^2+3xy+y^2 = x^2\left(1+3\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = x^2\left(\frac{y}{x}-m_1\right)\left(\frac{y}{x}-m_2\right) = (y-m_1x)(y-m_2x)$$

onde $m_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $m_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. As curvas de nível são hipérboles com assíntotas $y = m_1 x$ e $y = m_2 x$. O domínio da f será dado por

$$\mathrm{Dom} f = \{(x,y)|y \geq m_1 x \text{ e } y \geq m_2 x \text{ ou } y \leq m_1 x \text{ e } y \leq m_2 x\}$$

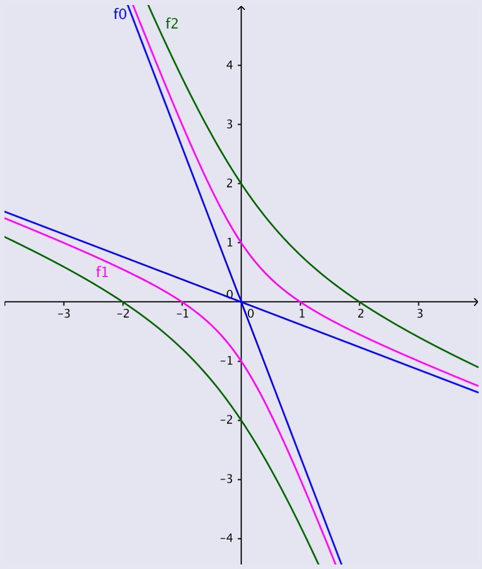


Resolvendo a equação $x^2+3xy+y^2 = c^2$ para y obtemos

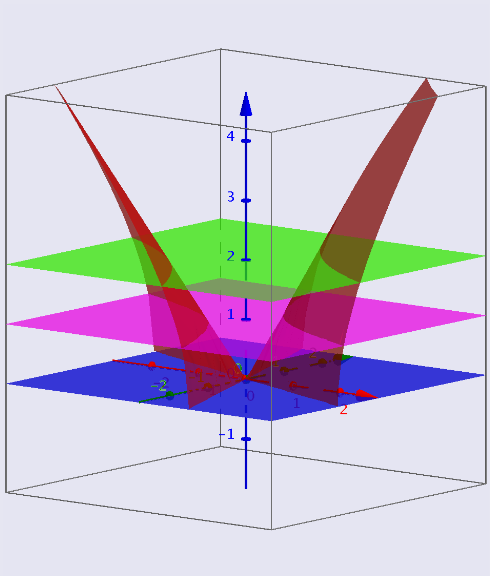
$$y = \frac{-3x \pm \sqrt{5x^2+4c^2}}{2}$$

que para os diversos valores de c fornecem o gráfico das hipérboles que são as curvas de nível.

As curvas de nível com $c = 0, 1, 2$ são



O gráfico é



2.3 Mostre que as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$$

são retas pela origem com declividade $\sqrt[3]{\dfrac{1-c}{1+c}}$. Faça um gráfico da função $g(c) = \sqrt[3]{\dfrac{1-c}{1+c}}$ e use-o para determinar o gráfico da f.

Solução: As curvas de nível $f(x, y) = c$ são dadas por $x^3 - y^3 = c(x^3 + y^3)$ ou $x^3(1-c) = y^3(1+c)$ de onde

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{1-c}{1+c}$$

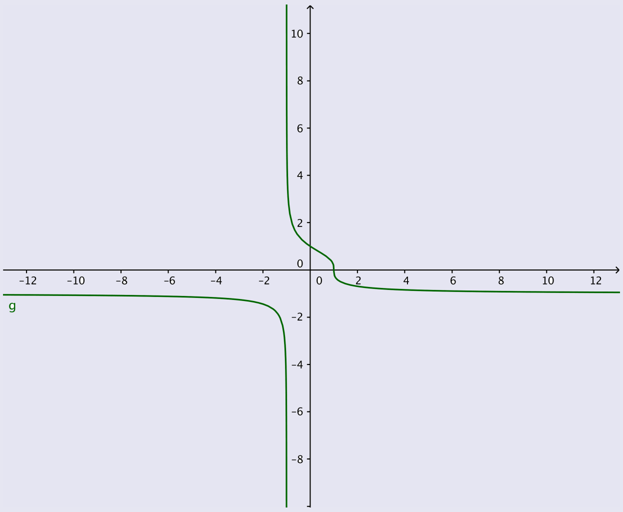
ou

$$y = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^{\frac{1}{3}} x$$

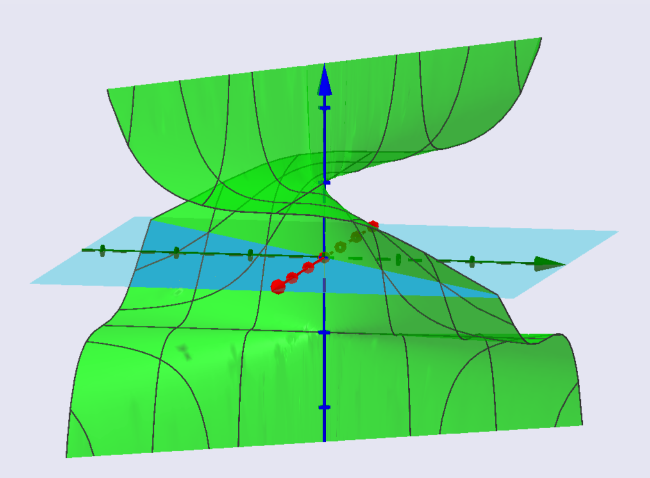
as quais são retas passando pela origem. A função $g(c) = \sqrt[3]{\frac{1-c}{1+c}}$ define a declividade das retas. Sua derivada é

$$g'(c) = \frac{-2}{3}\frac{1}{(1+c)^2}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^{-2/3}$$

logo é negativa em todos os pontos. Isto quer dizer que $g(c)$ é decrescente nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$. Quando $c \to \pm\infty$ temos que $g(c) \to -1$, ou seja as curvas de nível para valores tendendo para infinito se aproxima da reta $y = -x$. Conforme o valor de c aumenta até chegar em $c = -1$ a declividade da reta diminue até chegar na reta $x = 0$. Após este valor a declividade da reta volta a diminuir e quando $c \to \infty$ aproxima-se de -1 e da reta $y = -x$.



O gráfico tem um formato "helicoidal"com apenas um passo infinito, e deformado pela raiz cúbica:



2.4 Faça o que se pede.

(a) Determine e esboçe as curvas de nível da função

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

e, a partir desta informação, esboce o gráfico da mesma.

Solução: (i) De

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = c$$

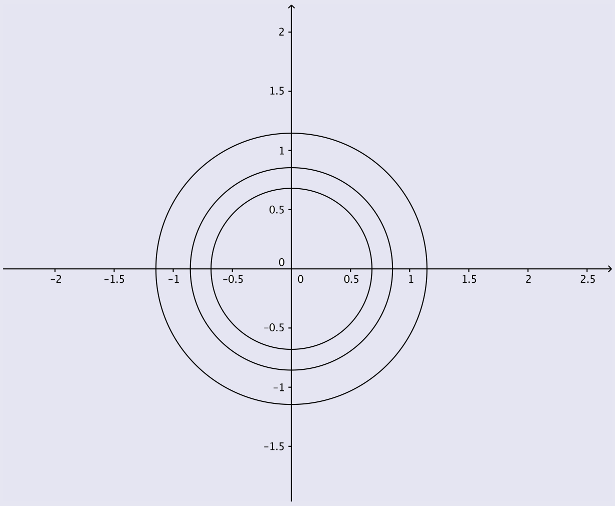
obtemos

$$\frac{1}{x^2+y^2} = -\ln c$$

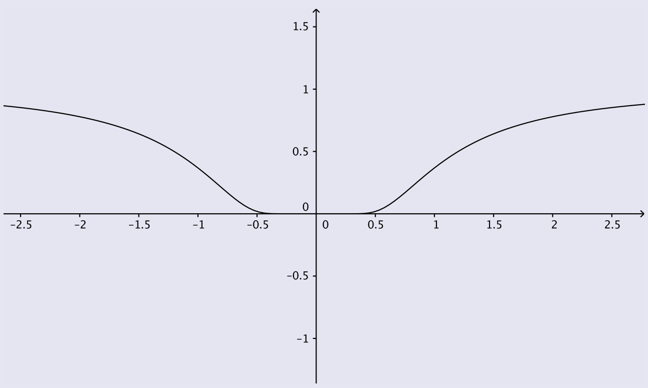
ou

$$x^2 + y^2 = -\frac{1}{\ln c}$$

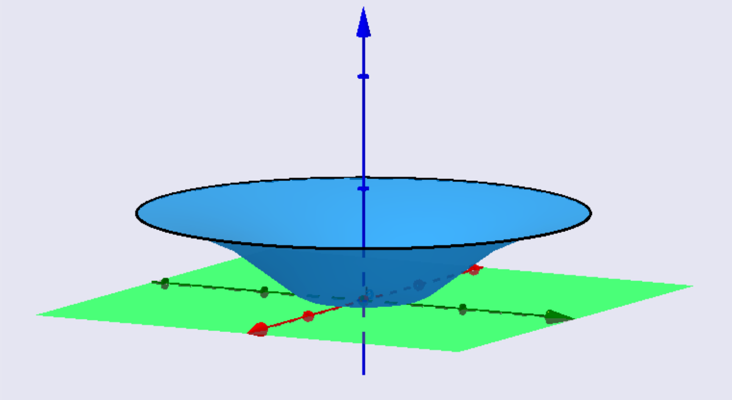
Então as curvas de nível são círculos com centro na origem e raio $\frac{1}{\sqrt{-\ln c}}$. Para que $-\ln c$ seja positivo, devemos ter $0 < c < 1$.



O gráfico de f é uma superfície de revolução da curva $g(r) = e^{-1/r^2}$.



Seu gráfico então é:



(b) Mostre que definindo $f(0,0) = 0$ a função obtida fica contínua em $(0,0)$.

Solução: Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{x^2+y^2} = -\infty$ e $e^{-\infty} = 0$ podemos definir $f(0,0) = 0$ e assim f fica contínua no ponto $(0,0)$.

(c) Determine a imagem de f.

Solução: Como as curvas de nível estão definidas para $0 < c < 1$ e podemos estender f em $(0,0)$ a imagem de f será $[0,1)$.

2.5 Verifique se é possível definir um valor $f(0,0)$ de modo que

$$f(x,y) = \frac{\cos(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

seja contínua em $(0,0)$.

Solução: Quando $(x,y) \to (0,0)$ temos que $x^2 - y^2 \to 0$ ou seja $\cos(x^2 - y^2) \to 1$. O denominador $x^2 + y^2 \to 0$ logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Assim não podemos definir $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$.

2.6 A função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(x^3 - y^3)}$ é contínua? Justifique.

Solução: Observe que as funções $a, c : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} a(x, y) &= x^2 - y^2 \\ b(x) &= e^x \\ c(x, y) &= x^3 - y^3 \end{aligned}$$

são todas contínuas, pois a e c são polinomiais e b é a função exponencial. Como $\mathbb{R} = Im_c \subset D_b = \mathbb{R}$ e a composta de funções contínuas é uma função contínua, temos $b \circ c$ contínua. Como o produto de funçoes contínuas é uma função contínua, $f = a \cdot (b \circ c)$ é contínua.

Diferenciabilidade

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Derivadas parciais e sua interpretação geométrica;
- Planos tangentes e iproximações lineares;
- Funções diferenciáveis e diferencial;
- Derivadas direcionais e gradiente: cálculo e interpretação geométrica;
- Regra da cadeia e o Teorema da função implícita;
- Derivadas de ordem superior e o Teorema de Clairaut.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria analítica;
- Gráfico de função de uma e de várias variáveis;
- Derivada de uma função de uma variável e regras básicas de derivação;
- Regra da cadeia para funções de uma variável;

Métodos e Técnicas

Regra da Cadeia	• Utiliza-se a regra da cadeia para funções de mais de uma variável nos seguintes exercícios. **Exercícios 3.10, 3.11, 3.12**
Teorema da Função Implícita	• Nas questões a seguir, aplica-se o teorema da função implícita para determinar o plano tangente a uma superfície. **Exercícios 3.9, 3.15** • Nos seguintes exercícios, aplica-se o teorema da função implícita para calcular derivadas ordinárias e parcias de funções dadas implicitamente; **Exercícios 3.13, 3.14** • Nas questões a seguir, aplica-se o teorema da função implícita para determinar o coeficiente angular de uma reta ortogonal à uma curva dada implicitamente. **Exercícios 3.16, 3.18**
Teorema de Clairaut	• Utiliza-se o Teorema de Clairaut para discutir sobre a continuidade de derivadas parciais no exercício a seguir. **Exercícios 3.19**

Enunciado dos Exercícios

● ○ ○ ○

3.1 Calcule as derivadas parciais das funções:

(a) $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$;

(b) $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$

● ○ ○ ○

3.2 Determine o plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = xy$ no ponto $(2,3,6)$.

● ● ○ ○

3.3 Calcule as derivadas parciais f_{xy} e f_{yx} da função

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(x^3 - y^3)}$$

e verifique a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

● ● ○ ○

3.4 Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e que a reta tangente ao gráfico de $t = g(s)$ tem como equação $t = 2s - 8$ no ponto $(5, g(5))$. Calcule a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$ no ponto $(1, 2, f(1,2))$.

● ○ ○ ○

3.5 Calcule o valor aproximado de $(2,01^2 + 2,99^3)$ utilizando a diferencial da função $f(x,y) = x^2 + y^3$ no ponto $(2,3)$.

● ○ ○ ○

3.6 Determine uma aproximação linear para a função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

no ponto $(-2,1)$.

● ● ● ○

3.7 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 y \cos(xy\pi)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,1)$ e interprete estes números como inclinações.

● ● ● ○

3.8 Encontre uma reta normal ao gráfico da função $f(x,y) = xy$ que contenha o ponto $(-3,-3,11)$.

● ○ ○ ○

3.9 Encontre a equação do plano tangente a superfície elipsóide definida pela equação $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 21$ no ponto $(2,-2,1)$.

$\bullet\bullet\circ\circ$

3.10 Dada a função $f(x, y) = e^{xy^2}$, usando a regra da cadeia, determine $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, onde $x(s, t) = t^2 + s^2$ e $y(s, t) = \cos(st)$.

$\bullet\bullet\circ\circ$

3.11 No problema anterior, substitua as funçoes x e y em f, obtenha $h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$, e calcule $\dfrac{\partial h}{\partial s}$.

Comparando com o resultado obtido no problema 3.10, o que você pode notar?

$\bullet\bullet\bullet\circ$

3.12 Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e $x(u, v) = u^2 + v^2$ e $y(u, v) = 2uv$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

Você consegue escrever $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ sem realizar cálculos.

$\bullet\bullet\circ\circ$

3.13 Faça o que se pede.

(i) A equação $x^3 + xy + y^3 = 3$ define implicitamente uma função diferenciável $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$? Justifique sua resposta.

(ii) Caso positivo, calcule $f'(x)$.

(iii) Calcule $f'(1)$.

(iv) Faça o gráfico de $x^3 + xy + y^3 = 3$ e estime o domínio máximo possível para f.

$\bullet\bullet\circ\circ$

3.14 Dada a relação $e^{xyz} - z = 0$, determine se existe uma função $z = f(x, y)$ na vizinhança do ponto $(0, 0)$ tal que $f(0, 0) = 1$. Caso exista, calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$\bullet\bullet\bullet\circ$

3.15 Encontre o plano tangente a superfície definida por

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 3$$

no ponto $(3, 4, -5)$.

$\bullet\circ\circ\circ$

3.16 Encontre uma reta ortogonal a curva definida implicitamente pela função

$$3x^2y + \operatorname{sen}(2y) = x$$

em $(0,0)$.

●●●○

3.17 Mostre que a curva $\gamma(t) = \left(e^{-6t}, e^{-8t}\right)$ é ortogonal a todas as curvas de nível da função

$$f(x,y) = 10 - 3x^2 - 4y^2$$

Interprete este fato geometricamente.

●●○○

3.18 Determine as equações das retas que sejam ortogonais a elipse

$$x^2 + 3y^2 = 3$$

é paralela a reta $x - y = 7$.

●○○○

3.19 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Se A for um conjunto aberto, o que podemos afirmar sobre as derivadas parciais de segunda ordem de f?

●●○○

3.20 Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

Sugestões

3.1 Ao calcular a derivada parcial em relação à x, considere y constante e vice-versa.

3.2 Utilize a fórmula para o cálculo do plano tangente.

3.3 Calcule a derivada parcial de f em relação a x (considerando y constante) e em seguida derive f_x em relação a y (considerando x constante) e vice-versa.

3.4 A partir da reta tangente ao gráfico de g encontre $g(5)$ e $g'(5)$ em seguida determine a equação do plano tangente.

3.5 Utilize o diferencial de uma função $z = f(x, y)$ abaixo

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy.$$

E faça a aproximação linear

$$f(x, y) = f(a, b) + dz.$$

3.6 Use a equação do plano tangente.

3.7 Calcule cada derivada parcial de f, substitua no ponto dado e faça a interpretação da inclinação nos seus respectivos planos.

3.8 Utilize o vetor gradiente para determinar a reta normal ao gráfico de f.

3.9 Utilize o vetor gradiente para determinar o plano tangente à superfície do elipsóide no ponto dado.

3.10 Utilize a equação da Regra da Cadeia (Caso II). Desenhe o diagrama em árvore para facilitar os cálculos.

3.11 Após substituir x e y em f, derive parcialmente a função $h(s, t)$ em relação a s.

3.12 Faça diagrama em árvore para facilitar o uso da equação da regra da cadeia e tenha bastante atenção ao realizar o cálculo da derivada de cada termo.

3.13 Utilize o teorema da função implícita para mostrar que a equação define implicitamente uma função $y = f(x)$ e em seguida use a fórmula da derivação implícita para encontrar a derivada.

3.14 Verifique a continuidade das derivadas parciais e utilize o teorema da função implícita para mostrar que existe uma função $z = f(x, y)$ na vizinhança do ponto dado.

3.15 Verifique através do teorema da função implícita se $F(x, y, z)$ é diferenciável em $(3, 4, -5)$. Em seguida, caso seja diferenciável, utilize o vetor gradiente para determinar o plano tangente no ponto.

3.16 Use o vetor gradiente para determinar a equação da reta ortogonal á curva no ponto dado.

3.17 Determine o gradiente de f e em seguida faça a composta do gradiende ∇f com a curva $\gamma(t)$.

3.18 Encontre o vetor diretor da reta dada no problema e lembre-se que o vetor gradiente é ortogonal a curva em todo (x, y) tal que $F(x, y) = 0$.

3.19 Utilize a definição de função de classe C^2 e use o Teorema de Clairaut.

3.20 Encontre a função $f(x, y)$ que corresponde à distância da origem a um ponto do plano.

Respostas

3.1 Calcule as derivadas parciais das funções:

(a) $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$;

Solução: Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\frac{x+y}{x-y}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = e^{\frac{x+y}{x-y}} \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\frac{x+y}{x-y}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = e^{\frac{x+y}{x-y}} \frac{2x}{(x-y)^2}$$

(b) $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

Solução: Temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\text{sen}(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = -\text{sen}(x^2+y^2)2x$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\text{sen}(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = -\text{sen}(x^2+y^2)2y$$

3.2 Determine o plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = xy$ no ponto $(2,3,6)$.

Solução: Temos $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$. Assim $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2$. Da equação

$$z - f(2,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3)$$

obtemos

$$z - 6 = 3(x-2) + 2(y-3)$$

ou $z = 3x + 2y - 6$.

3.3 Calcule as derivadas parciais f_{xy} e f_{yx} da função

$$f(x,y) = (x^2-y^2)e^{(x^3-y^3)}$$

e verifique a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

Solução: Para avaliar a variação de f na direção x, devemos olhar para y como sendo uma constante. Assim,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{(x^3-y^3)} + (x^2-y^2)e^{(x^3-y^3)}3x^2 \\ &= (3x^4 - 3x^2y^2 + 2x)e^{(x^3-y^3)} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2ye^{(x^3-y^3)} + (x^2-y^2)e^{(x^3-y^3)}(-3y^2) \\ &= (3y^4 - 3x^2y^2 - 2y)e^{(x^3-y^3)} \end{aligned}$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left((3x^4 - 3x^2y^2 + 2x)e^{(x^3-y^3)}\right) \\ &= (-6x^2y)e^{(x^3-y^3)} + (3x^4 - 3x^2y^2 + 2x)(-3y^2)e^{(x^3-y^3)} \\ &= (-9x^4y^2 + 9x^2y^4 - 6x^2y - 6xy^2)e^{(x^3-y^3)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left((3y^4 - 3x^2y^2 - 2y)e^{(x^3-y^3)}\right) \\ &= (-6xy^2)e^{(x^3-y^3)} + (3y^4 - 3x^2y^2 - 2y)(3x^2)e^{(x^3-y^3)} \\ &= (-9x^4y^2 + 9x^2y^4 - 6x^2y - 6xy^2)e^{(x^3-y^3)} \end{aligned}$$

Portanto $f_{xy} = f_{yx}$.

3.4 Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e que a reta tangente ao gráfico de $t = g(s)$ tem como equação $t = 2s - 8$ no ponto $(5, g(5))$. Calcule a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = g(x^2 + y^2)$ no ponto $(1, 2, f(1,2))$.

Solução: Como a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(5, g(5))$ é $t = g'(5)(s-5)+g(5) = 2s-8$ obtemos $g'(5) = 2$ e $g(5) = 2.5 - 8 = 2$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x^2+y^2)2x$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(x^2+y^2)2y$$

Portanto

$$f(1,2) = g(1^2+2^2) = g(5) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = g'(1^2+2^2)2.1 = 2g'(5) = 4,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = g'(1^2+2^2)2.2 = 4g'(5) = 8$$

Como a equação do plano tangente a f em $(1, 2, f(1,2))$ é

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$$

teremos

$$z = 2 + 4(x - 1) + 8(y - 2)$$

ou

$$z = 4x + 8y - 18.$$

3.5 Calcule o valor aproximado de $(2,01^2 + 2,99^3)$ utilizando a diferencial da função $f(x, y) = x^2 + y^3$ no ponto $(2, 3)$.

Solução: Vamos aproximar

$$(2,01^2 + 2,99^3) \approx f(2,3) + df(2,3)(2.01 - 2, 2.99 - 3).$$

Como $f_x(x, y) = 2x$ e $f_y(x, y) = 3y^2$ teremos $f(2, 3) = 4 + 27 = 31$, $f_x(2, 3) = 4$ e $f_y(2, 3) = 27$, teremos

$$df(2,3)(h, k) = f_x(2,3)h + f_y(2,3)k = 4h + 27k,$$

ou

$$df(2,3)(0.01, -0.01) = 4 \times 0.01 + 27 \times (-0.01) = -0.23,$$

Portanto

$$(2,01^2 + 2,99^3) \approx 31 - 0,23 = 30,77.$$

3.6 Determine uma aproximação linear para a função

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

no ponto $(-2, 1)$.

Solução: Inicialmente, vamos determinar as derivadas parciais de f no ponto $(-2, 1)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2y}{(x - y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{(x - y)^2}.$$

Assim

$$f(-2, 1) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 1) = \frac{-2}{9}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 1) = \frac{-4}{9}.$$

Então a aproximação linear g da função f é

$$g(x,y) = f(-2,1) + f_x(-2,1)(x+2) + f_y(-2,1)(y-1) = \frac{1}{3} + \frac{-2}{9}(x+2) + \frac{-4}{9}(y-1)$$

ou

$$g(x,y) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y.$$

3.7 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 y\cos(xy\pi)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,1)$ e interprete estes números como inclinações.

Solução: Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y[2x\cdot\cos(xy\pi) - x^2\cdot y\pi\mathrm{sen}(xy\pi)].$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -4\cdot\cos(-2\pi) - 4\pi\mathrm{sen}(-2\pi) = -4.$$

Considere $g(x) = f(x,1) = x^2\cos(x\pi)$. Então $g'(x) = 2x\cos(xy) - x^2\pi\mathrm{sen}(x\pi)$, assim $g'(-2) = -4$. Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1)$ é a declividade da reta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x,1)$ no ponto $x = -2$.

Similarmente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cdot[\cos(xy\pi) - yx\pi\mathrm{sen}(xy\pi)].$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 4\cdot[\cos(-2\pi) + 2\pi\mathrm{sen}(-2\pi)] = 4.$$

Por outro lado $h(y) = f(-2,y) = 4y\cos(-2y\pi)$. Assim $h'(y) = 4[\cos(-2y\pi) + 2y\pi\mathrm{sen}(-2y\pi)]$ e $h'(1) = 4$. Logo $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)$ é a declividade da reta tangente ao gráfico de $h(y) = f(-2,y)$ no ponto $y = 1$.

3.8 Encontre uma reta normal ao gráfico da função $f(x,y) = xy$ que contenha o ponto $(-3,-3,11)$.

Solução: Seja $F(x,y,z) = z - xy$. Então $\nabla F(x,y,z) = (-y,-x,1)$. A reta $r(t)$ normal ao gráfico de f pelo ponto (x,y,xy) é

$$r(t) = (x,y,xy) + t\nabla F(x,y,xy) = (x,y,xy) + t(-y,-x,1) = (x-ty, y-tx, xy+t).$$

Se o ponto $(-3,-3,11)$ pertence a reta teremos o sistema

$$\begin{aligned} x - ty &= -3 \\ y - tx &= -3 \\ xy + t &= 11 \end{aligned}$$

Substituindo na última equação obtemos $t = 11 - x^2$. e voltando a primeira obtemos $x - (11 - x^2)x = -3$, ou $x^3 - 10x + 3 = 0$. Uma solução é $x = 3$. Então $y = 3$ e a equação da reta normal ao gráfico pelo ponto $(3, 3, 9)$ é

$$r(t) = (3 - 3t, 3 - 3t, 9 + t).$$

Então $r(2) = (-3, -3, 11)$. Observe que existem duas outras soluções.

3.9 Encontre a equação do plano tangente a superfície elipsóide definida pela equação $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 21$ no ponto $(2, -2, 1)$.

Solução: Seja $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Então $\nabla F(x, y, z) = (4x, 6y, 2z)$ e $\nabla F(2, -2, 1) = (8, -12, 2)$. A equação do plano tangente no ponto $(2, -2, 1)$ é

$$0 = (x - 2, y + 2, z - 1).\nabla F(2, -2, 1) = (x - 2, y + 2, z - 1).(8, -12, 2)$$

de onde $8(x - 2) - 12(y + 2) + 2(z - 1) = 0$ de onde

$$4x - 6y + z = 21.$$

3.10 Dada a função $f(x, y) = e^{xy^2}$, usando a regra da cadeia, determine $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, onde $x(s, t) = t^2 + s^2$ e $y(s, t) = \cos(st)$.

Solução: Seja $h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t))\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t))\frac{\partial y}{\partial s}$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 e^{xy^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xye^{xy^2}$$

teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) = \cos^2(st)e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) = 2(t^2 + s^2)\cos(st)e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}$$

de onde

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial s}(s, t) &= \left(\cos^2(st)e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}\right) 2s + \left(2(t^2 + s^2)\cos(st)e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}\right)(-t\sin(st)) \\ &= 2\cos(st)e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}\left(s\cos(st) - t(t^2 + s^2)\sin(st)\right) \end{aligned}$$

3.11 No problema anterior, substitua as funçoes x e y em f, obtenha $h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$, e calcule $\dfrac{\partial h}{\partial s}$.

Comparando com o resultado obtido no problema 3.10, o que você pode notar?

Solução: Temos

$$h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t)) = f(t^2+s^2, \cos(st)) = e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)},$$

logo

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial h}{\partial s}(s,t) &= e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}\tfrac{\partial}{\partial s}((t^2+s^2)\cos^2(st)) \\ &= e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}\left(2s\cos^2(st) - (t^2+s^2)2\cos(st)\sin(st)t\right) \\ &= 2\cos(st)e^{(t^2+s^2)\cos^2(st)}\left(s\cos(st) - t(t^2+s^2)\sin(st)\right) \end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s}$.

3.12 Se $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e $x(u,v) = u^2+v^2$ e $y(u,v) = 2uv$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$. Você consegue escrever $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ sem realizar cálculos.

Solução: Temos

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial x}{\partial v} = 2v$, $\frac{\partial y}{\partial v} = 2u$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 2$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0$ obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4uv(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}) + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

Devido a simetria de $x(u,v) = x(v,u)$ e $y(u,v) = y(v,u)$ obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4uv(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}) + 4v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

3.13 Faça o que se pede.

(i) A equação $x^3 + xy + y^3 = 3$ define implicitamente uma função diferenciável $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$? Justifique sua resposta.

(ii) Caso positivo, calcule $f'(x)$.

(iii) Calcule $f'(1)$.

(iv) Faça o gráfico de $x^3 + xy + y^3 = 3$ e estime o domínio máximo possível para f.

Solução:

(i) Seja $F(x, y) = x^3 + xy + y^3 - 3$. Temos $F(1, 1) = 0$ e como

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x + 3y^2$$

também $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 4 \neq 0$. Logo localmente está bem definida $y = f(x)$ com $f(1) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$.

(ii) Como

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y$$

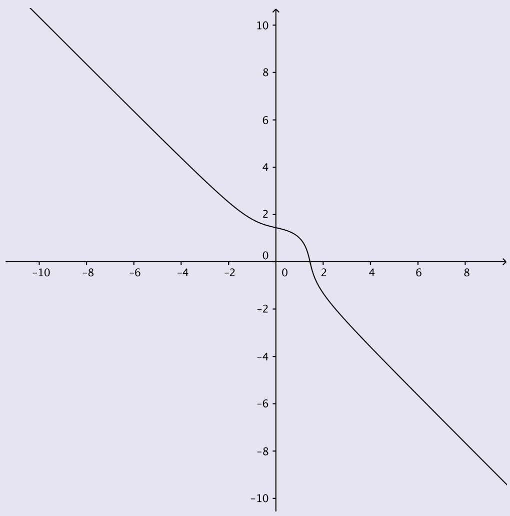
obtemos

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{3x^2 + f(x)}{x + 3f(x)^2}$$

(iii) De (ii) segue

$$f'(1) = -\frac{3 + f(1)}{1 + 3f(1)^2} = -1.$$

(iv) Do gráfico abaixo parece correto afirmar que o domínio de f é $\mathbb{R}$.



3.14 Dada a relação $e^{xyz} - z = 0$, determine se existe uma função $z = f(x, y)$ na vizinhança do ponto $(0, 0)$ tal que $f(0, 0) = 1$. Caso exista, calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solução: Seja $F(x, y, z) = e^{xyz} - z$. Então $F(0, 0, 1) = 1 - 1 = 0$ e como

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = xye^{xyz} - 1.$$

temos $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = -1 \neq 0$. Logo fica bem definida a função diferenciável $z = f(x, y)$ com $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 1}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{xze^{xyz}}{xye^{xyz} - 1}$$

3.15 Encontre o plano tangente a superfície definida por

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 3$$

no ponto $(3, 4, -5)$.

Solução: Seja

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} - 3.$$

A equação do plano tangente à superfície definida por $F(x, y, z) = 0$ em (x_0, y_0, z_0) pode ser dada por

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Para que isso ocorra $F(x, y, z)$ precisa ser diferenciável em (x_0, y_0, z_0) com $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Temos que verificar:

i) $F(3, 4, -5) = 0$

ii) As derivadas parciais $\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \dfrac{2x}{9}$, $\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \dfrac{y}{8}$ e $\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \dfrac{2z}{25}$ são continuas e

$$\nabla F(3, 4, -5) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{5}) \neq (0, 0, 0)$$

Com isso concluímos que existe uma plano tangente em $F = 0$ no ponto $(3, 4, -5)$. Portanto pela equação do plano tangente temos

$$\frac{2}{3}(x - 3) + \frac{1}{2}(y - 4) - \frac{2}{5}(z - (-5)) = 0$$

ou

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}z = 6.$$

3.16 Encontre uma reta ortogonal a curva definida implicitamente pela função

$$3x^2y + \operatorname{sen}(2y) = x$$

em $(0,0)$.

Solução: Seja $F(x,y) = 3x^2y + \operatorname{sen}(2y) - x$.

i) Temos $F(0,0) = 0$.

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 6yx - 1$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 + 2\cos(2y)$ são funções continuas.

iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2$, ou seja $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$

Então fica bem definida uma curva $\gamma(t) = (t, f(t))$ tal que $F(t, f(t)) = 0$. Desta forma temos que a reta ortogonal será dada por

$$P(\lambda) = (0,0) + \lambda \nabla F(0,0).$$

Como $\nabla F(0,0) = (-1,2)$ obtemos

$$(x,y) = (0,0) + \lambda(-1,2)$$

é a reta ortogonal a $\gamma(t)$ em $(0,0)$, ou seja $x = -\lambda$, $y = 2\lambda$. De outro modo

$$y + 2x = 0.$$

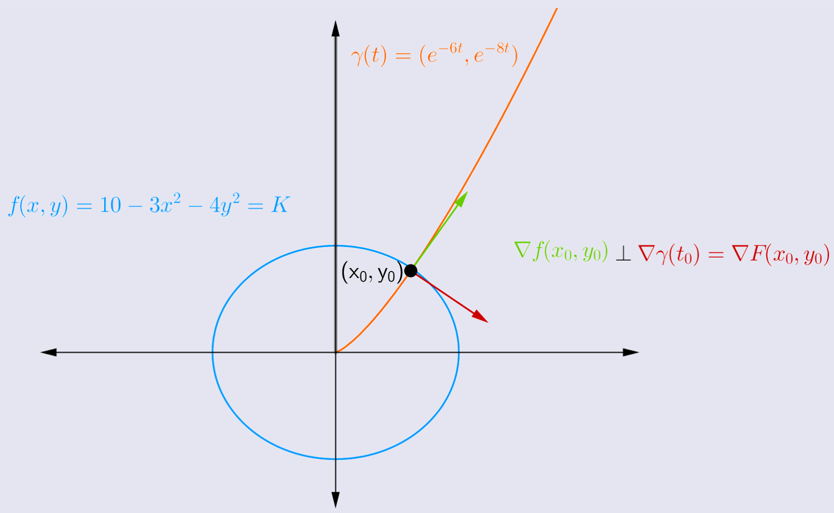
3.17 Mostre que a curva $\gamma(t) = \left(e^{-6t}, e^{-8t}\right)$ é ortogonal a todas as curvas de nível da função

$$f(x,y) = 10 - 3x^2 - 4y^2$$

Interprete este fato geometricamente.

Solução: Temos que $\gamma'(t) = \left(-6e^{-6t}, -8e^{-8t}\right)$ e $\nabla f(x,y) = (-6x, -8y)$. Logo $\nabla f(\gamma(t)) = \nabla f(e^{-6t}, e^{-8t}) = (-6e^{-6t}, -8e^{-8t}) = \gamma'(t)$. Então $\nabla f(\gamma(t))$ tem a mesma direção de $\gamma'(t)$. Como ∇f é ortogonal as curvas de nível, então γ' é ortogonal as curvas de nível de f.

Interpretação Geometrica A curva γ é tal que vai cruzando as curvas de nível de f ortogonalmente, como o gráfico mostra.



3.18 Determine as equações das retas que sejam ortogonais a elipse

$$x^2 + 3y^2 = 3$$

é paralela a reta $x - y = 7$.

Solução: Podemos escrever $x - y = 7$ como

$$(x, y) = (0, -7) + \lambda(1, 1).$$

Então o vetor diretor da reta é $(1, 1)$. Seja $F(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3$. Como $\nabla F(x, y)$ é ortogonal a elipse em todo (x, y) tal que $F(x, y) = 0$, deveremos ter

$$\nabla F(x, y) = \lambda(1, 1)$$

ou seja $(2x, 6y) = (\lambda, \lambda)$. Então $2x = \lambda = 6y$ ou seja $x = 3y$. Resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ x^2 + 3y^2 &= 3 \end{aligned}$$

encontramos os pontos $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Logo temos as retas $x - y = 1$ e $x - y = -1$.

3.19 Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Se A for um conjunto aberto, o que podemos afirmar sobre as derivadas parciais de segunda ordem de f?

Solução: Pela definição, uma função f é de classe C^2 em um conjunto aberto A se f é contínua em A, e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem existem e são contínuas em A. Logo podemos afirmar sobre as derivadas de segunda ordem de f que elas existem e são contínuas em A. Então as derivadas mistas de f coincidem. No caso

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

3.20 Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

Solução: O quadrado da distância da origem a um ponto do plano é dado por

$$D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Como o ponto está sobre o plano $z = x + 2y - 4$, logo podemos escrever

$$f(x, y) = D(x, y, x + 2y - 4) = x^2 + y^2 + (x + 2y - 4)^2.$$

No ponto de mínimo $f_x = f_y = 0$ logo

$$\begin{aligned} 2x + 2(x + 2y - 4) &= 0 \\ 2y + 4(x + 2y - 4) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 5y &= 8. \end{aligned}$$

A solução deste sistema é $x = 2/3$ e $y = 4/3$. O ponto do plano mais próximo da origem é

$$P = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} + 2\frac{4}{3} - 4) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Poderíamos verificar que o ponto P é um ponto de mínimo, mas da geometria do problema sabemos que apenas esta situação pode ocorrer.

Integrais múltiplas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Teorema de Fubinni para integrais múltiplas;
- Mudança de variável em integrais múltiplas.
- Cálculo de integrais duplas e triplas;
- Definição de integrais duplas e triplas;
- Mudança de ordem de integração em integrais múltiplas.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável;
- Integral de funções de uma variável em um intervalo fechado;
- Coordenadas polares;
- Coordenadas cilíndricas;
- Coordenadas esféricas.

Métodos e Técnicas

Teorema de Fubinni.	• Nas questões abaixo, utiliza-se o teorema de Fubinni para calcular as integrais múltiplas de forma iterada. **Exercícios 4.1, 4.2, 4.6, 4.7** • Nas questões abaixo, aplica-se a ideia de inversão de ordem de integração. **Exercícios 4.3(a,b), 4.5**
Mudança de Variáveis	• Nas questões abaixo, usa-se a mudança de variáveis para coordenadas polares para resolver as integrais múltiplas; **Exercícios 4.4, 4.8** • No exercício abaixo, faz-se uso da mudança de variáveis para coordenadas esféricas para resolver a integral múltipla; **Exercício 4.9** • No problema abaixo, utiliza-se a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas para resolver a integral múltipla. **Exercício 4.10**

●○○○

4.1 Calcule a integral dupla

$$\int_0^2 \int_0^3 y^3 dy dx$$

●○○○

4.2 Seja o retângulo $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Calcule

$$\iint_A f(x, y) dx dy,$$

sendo $f(x, y) = x \operatorname{sen}(\pi y)$.

●●○○

4.3 Inverta a ordem de integração:

(a)

$$\int_1^e \left(\int_{\ln x}^x f(x, y) dy \right) dx$$

(b)

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx$$

●●○○

4.4 Calcule $\displaystyle\iint_C y^2 dx dy$ onde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1,$ $y \geq x$ e $x \geq 0\}$.

●●○○

4.5 Troque a ordem de integração na integral iterada

$$\int_0^3 dy \int_{y-6}^{6-y} f(x, y) dx$$

Esboçe o domínio de integração.

●○○○

4.6 Calcule a integral tripla

$$\iiint_R yz \cos(x^5) dV,$$

onde $R = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 2x, 2x \leq z \leq 3x\}$.

●●●○

4.7 Calcule a integral tripla

$$\iiint_R xy\,dV,$$

onde R é limitado pelos cilindros parabólicos $y = 2x^2$ e $x = 2y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$. Faça um esboço de R.

●●○○

4.8 Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

●●●○

4.9 Calcule a integral mudando para coordenadas esféricas

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3)\,dz\,dx\,dy$$

Esboçe o domínio de integração.

●●●●

4.10 Duas esferas de mesmo raio R se interceptam de modo que o volume da interseção é metade do volume de cada esfera. Mostre que a distancia D entre os centros das duas esferas satisfaz $D/R = \lambda$ onde

$$\lambda = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right).$$

Sugestões

4.1 Use o teorema de Fubini.

4.2 Considere a região retangular e utilize o teorema de Fubini..

4.3 Para a inversão da ordem de integração sugere-se que se esboçe a região preliminar e a partir de sua análise, defina-se a nova ordem de integração.

4.4 Analise a região de integração e faça a substituição de variável $x = \operatorname{sen} u$.

4.5 Esboçe a região correspondente a integral preliminar e a partir da análise da região, troque a ordem de integração. Observe que se pode somar n áreas para se obter uma área resultante.

4.6 Utilize o teorema de Fubinni.

4.7 Esboçe a região tridimensional, analise as equações dadas para encontrar os limites de integração e em seguida use o teorema de Fubinni.

4.8 Esboçe a região, utilize coordenadas polares e em seguida use o teorema de Fubinni.

4.9 Utilize coordenadas esféricas para facilitar os cálculos do problema. Use o teorema de Fubinni e se possível esboçe a região em questão.

4.10 Tente realizar uma análise geométrica esboçando uma seção de uma interseção de duas esferas de mesmo raio. Faça suas considerações a partir da análise geometrica. Utilizar coordenadas cilíndricas para a resolução da integral pode ajudar.

Respostas

4.1 Calcule a integral dupla

$$\int_0^2 \int_0^3 y^3 dy dx$$

Solução: Temos

$$\int_0^2 \int_0^3 y^3 dy dx = \int_0^2 \left(\int_0^3 y^3 dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^3 dx = \frac{81}{4} [x]_0^2 = \frac{81}{2}$$

4.2 Seja o retângulo $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Calcule

$$\iint_A f(x, y) dx dy,$$

sendo $f(x, y) = x \operatorname{sen}(\pi y)$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_1^2 dx \int_0^1 x \operatorname{sen}(\pi y) dy = \int_1^2 x dx \left[-\frac{\cos(\pi y)}{\pi} \right]_0^1 \\ &= \int_1^2 x dx \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[x^2 \right]_1^2 = \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

4.3 Inverta a ordem de integração:

(a)

$$\int_1^e \left(\int_{\ln x}^x f(x, y) dy \right) dx$$

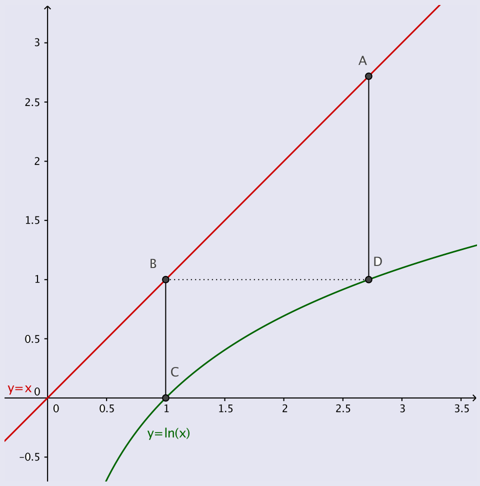
(b)

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx$$

Solução: (a) Abaixo está o esboço da região de integração R. No caso

$$R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, \ln(x) \leq y \leq x\}.$$

Como $\ln e = 1$ o segmento BD é horizontal. De $y = \ln(x)$ obtemos $x = e^y$.



Podemos descrever o domínio R (invertendo os papéis entre x e y) como uma união de dois conjuntos:

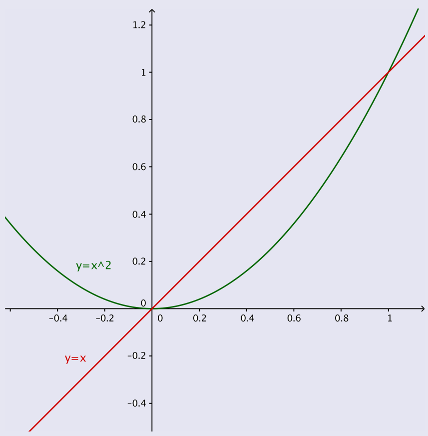
$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq e^y\} \cup \{(x, y) : 1 \leq y \leq e, y \leq x \leq e\}.$$

Assim ao trocar a ordem de integração ficamos com uma soma de integrais:

$$\int_1^e \left(\int_{\ln x}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^{e^y} f(x, y) dx \right) dy + \int_1^e \left(\int_y^e f(x, y) dx \right) dy.$$

(b) Abaixo está o esboço da região de integração R. No caso

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$



De $y = x^2$ obtemos $x = \sqrt{y}$. Podemos descrever o domínio

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1; y \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

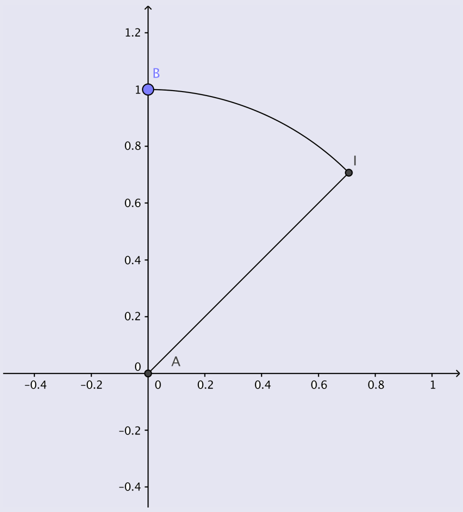
Logo

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

4.4 Calcule $\displaystyle\iint_C y^2 dxdy$ onde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq x \text{ e } x \geq 0\}$.

Solução: Abaixo está o esboço do conjunto C. Observe que o ponto $I = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Também de $x^2 + y^2 = 1$ obtemos $y = \sqrt{1 - x^2}$. Podemos descrever C como:

$$C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2}/2, x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$



Então

$$\begin{aligned}\iint_C y^2 dxdy &= \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_x^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \left[\frac{(\sqrt{1-x^2})^3 - x^3}{3}\right]\end{aligned}$$

Mas fazendo $x = \operatorname{sen} u$ na integral abaixo, $dx = \cos u du$ e $0 \leq u \leq \pi/4$:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} (\sqrt{1 - x^2})^3 dx = \int_0^{\pi/4} \cos^4 u du$$

Considerando que $\cos^4 u = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2u)}{2} + \frac{\cos(4u)}{8}$ obtemos

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^4 u du = \frac{1}{3}\left[(3/8)u + (1/4)\operatorname{sen}(2u) + (1/32)\operatorname{sen}(4u)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\frac{3\pi + 8}{32}.$$

Também

$$\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2} x^3 dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{48}$$

Finalizando teremos

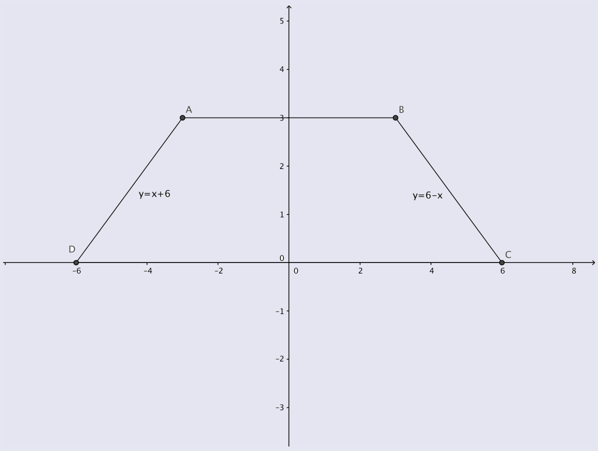
$$\iint_C y^2 dxdy = \frac{1}{3}\frac{3\pi + 8}{32} - \frac{1}{48} = \frac{\pi + 2}{32}.$$

4.5 Troque a ordem de integração na integral iterada

$$\int_0^3 dy \int_{y-6}^{6-y} f(x,y)dx$$

Esboçe o domínio de integração.

Solução: Observe que a região de integração é limitada pelas retas $y = 6 - x$, $y = x + 6$, $y = 0$, $y = 3$.



Teremos que dividir a região em três partes para trocar a ordem de integração. Logo

$$\begin{aligned}\int_0^3 dy \int_{y-6}^{6-y} f(x,y)dx &= \int_{-6}^{-3} dx \int_0^{x+6} f(x,y)dy + \int_{-3}^{3} dx \int_0^{3} f(x,y)dy \\ &+ \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x,y)dy\end{aligned}$$

4.6 Calcule a integral tripla

$$\iiint\limits_R yz\cos(x^5)dV,$$

onde $R = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 2x, 2x \leq z \leq 3x\}$.

Solução: Temos que

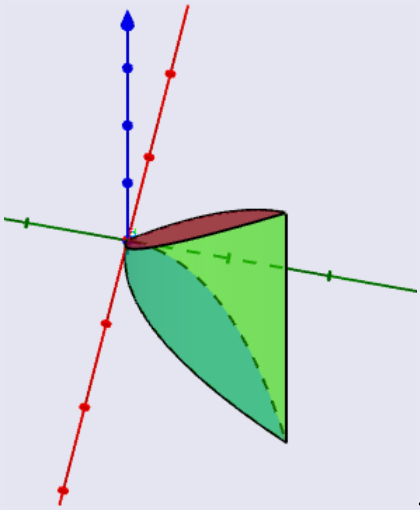
$$\begin{aligned}\iiint\limits_R yz\cos(x^5)dV &= \int_0^{\pi/2} \cos(x^5)dx \int_0^{2x} ydy \int_{2x}^{3x} zdz \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x^5) \left[\tfrac{y^2}{2}\right]_0^{2x} \left[\tfrac{z^2}{2}\right]_{2x}^{3x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x^5)\tfrac{4x^2}{2}(\tfrac{9x^2-4x^2}{2})dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x^5)5x^4dx \\ &= \left[\ \mathrm{sen}(x^5)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \mathrm{sen}(\tfrac{\pi^5}{32}).\end{aligned}$$

4.7 Calcule a integral tripla

$$\iiint_R xy\,dV,$$

onde R é limitado pelos cilindros parabólicos $y = 2x^2$ e $x = 2y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$. Faça um esboço de R.

Solução: Temos que a interseção das curvas $y = 2x^2 = 2(2y^2)^2 = 8y^4$ de onde $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$. Então $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.



.

Logo

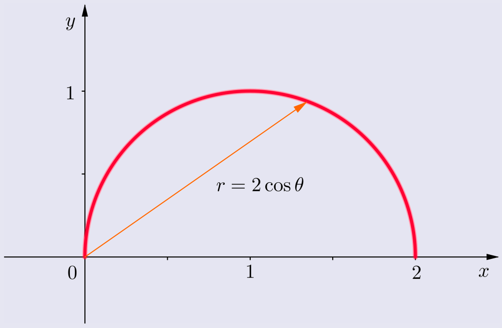
$$\begin{aligned}
\iiint_R xy\,dV &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx \int_{2x^2}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} y\,dy \int_0^{x+y} dz \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx \int_{2x^2}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} (x+y)y\,dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_{2x^2}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{12}x^{\frac{7}{2}} - 2x^6 - \frac{8}{3}x^7\right] dx \\
&= \left[\frac{x^4}{16} + \frac{\sqrt{2}}{42}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^8\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{3}{896}.
\end{aligned}$$

4.8 Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

Solução: A região de integração é o semicírculo de raio 1 e centro $(1, 0)$, de equação $(x-1)^2+y^2 = 1$, $y \geq 0$. Escrevendo a equação do círculo em coordenadas polares temos $(r\cos\theta-1)^2+(r\,\text{sen}\theta)^2 = 1$

de onde $r(r-2\cos\theta)=0$. Em coordenadas polares o semicírculo pode ser descrito por $0\le r\le 2\cos\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, veja o gráfico:



Então

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\cos\theta}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)d\theta\\
&= \frac{8}{3}\left[\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

4.9 Calcule a integral mudando para coordenadas esféricas

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)\,dz\,dx\,dy$$

Esboçe o domínio de integração.

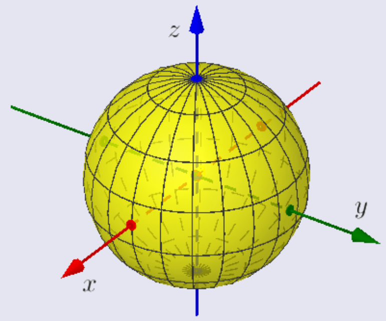
Solução: Os limites da região de integração são dados por $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, logo $x^2+y^2+z^2=1$. Como a projeção no plano xy é dado por $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ e $-1\le x\le 1$, temos o disco $x^2+y^2=1$. Portanto a região de integração e a esfera sólida de raio 1. Logo em coordenadas esféricas $x=r\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ e $z=r\cos\phi$ de onde obtemos

$$x^2z+y^2z+z^3=(x^2+y^2+z^2)z=r^2.r\cos\phi=r^3\cos\phi$$

de onde

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)dz\,dx\,dy\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^3\cos\phi . r^2\,\mathrm{sen}\phi\, d\phi\, d\theta\, dr\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^5\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\phi)\, d\phi\, d\theta\, dr\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}r^5\left[-\tfrac{1}{2}\cos(2\phi)\right]_0^{\pi} d\theta\, dr\\
&= 0.
\end{aligned}$$

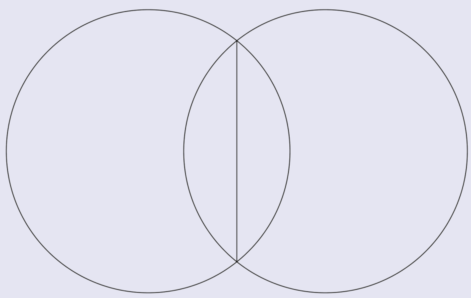
O domínio de integração tem gráfico:



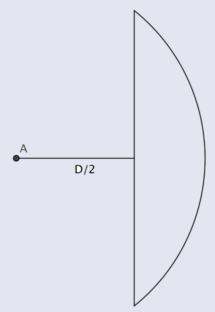
4.10 Duas esferas de mesmo raio R se interceptam de modo que o volume da interseção é metade do volume de cada esfera. Mostre que a distancia D entre os centros das duas esferas satisfaz $D/R = \lambda$ onde

$$\lambda = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right).$$

Solução: Veja abaixo uma seção de uma interseção de duas esferas de mesmo raio:



Podemos calcular o volume da lente abaixo e duplicar para encontrar o volume da interseção:



Vamos utilizar coordenadas cilindricas. O raio da base da lente é $\sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}}$. Seja R a região no plano xy tal que $x^2 + y^2 \leq R^2 - \frac{D^2}{4}$. Ou $0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então $\frac{D}{2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Em coordenadas cilindricas teremos que o volume V da interseção será

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{D^2}{4}}} r\,dr \int_{\frac{D}{2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz \\ &= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{D^2}{4}}} \left(\sqrt{R^2-r^2} - \frac{D}{2}\right) r\,dr \\ &= 2.2\pi \left[-\frac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}^3 - \frac{D}{4}r^2\right]_0^{\sqrt{R^2-\frac{D^2}{4}}} \\ &= \pi\left(\frac{D^3}{12} - DR^2 + \frac{4}{3}R^3\right). \end{aligned}$$

Como V é metade do volume da esfera de raio R teremos

$$\pi\left(\frac{D^3}{12} - DR^2 + \frac{4}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

de onde fazendo $x = D/R$ teremos

$$x^3 - 12x + 8 = 0.$$

Usando a formula de Euler temos que

$$4\cos^3\left(\frac{2}{9}\pi\right) - 3\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) + \frac{1}{2} = 0$$

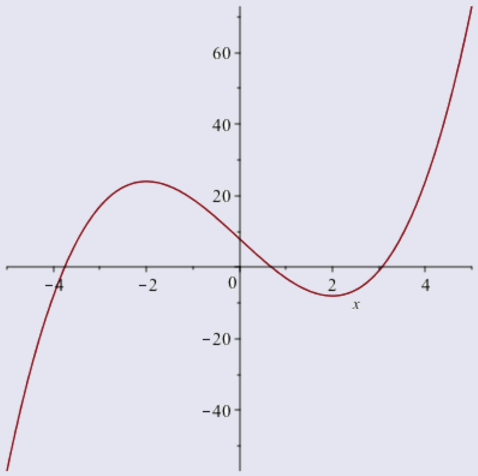
Segue de

$$\lambda = 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{9}) - 2\cos(\frac{2\pi}{9})$$

e da fórmula acima que

$$\lambda^3 = 24\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,(2/9\,\pi) - 8 - 24\,\cos\,(2/9\,\pi)$$

ou seja λ satisfaz a equação $x^3 - 12x + 8 = 0$. Esta equação tem uma única raiz entre 0 e 1 e como $0 < \lambda < 1$ segue o resultado.



Aplicações

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Máximos e Mínimos de uma função de duas várias variáveis;
- Teorema do Valor Extremo e o Teste da Segunda Derivada;
- Regra da Cadeia e Diferenciais;
- Cálculo de Área por Integração Múltipla;
- Cálculo de Volume por Integração Múltipla;
- Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria Espacial;
- Trigonometria;
- Derivadas Parciais;
- Cálculo de integrais duplas e triplas: Teorema de Fubinni;
- Inversão da Ordem de Integração.

Métodos e Técnicas

Regra da Cadeia e Diferencial	• Nos exercícios abaixo, utilizamos a regra da cadeia para calcular derivadas parciais de funções compostas. **Exercícios 5.1, 5.2**
Derivada Direcional	• No problema abaixo, utiliza-se o fundamento de produto escalar para o cálculo da derivada direcional. **Exercício 5.3**
Teste da Segunda Derivada	• Nas questões abaixo, verificamos a existência de máximos e mínimos absolutos utilizando o Teorema do Valor Extremo. **Exercícios 5.4, 5.5**
Teorema de Fubinni	• Utiliza-se o Teorema de Fubinni para calcular as integrais que determinam o volume de um sólido. **Exercícios 5.6, 5.8, 5.15** • Nos exercícios que se seguem, usa-se o Teorema de Fubinni no cálculo de integrais que determinam massa, centro de massa e momento de inércia de regiões e sólidos. **Exercícios 5.14, 5.7**

Mudança de variáveis: Coordenadas Polares e Cilíndricas

- Nas questões abaixo utilizamos a mudança de variáveis para coordenadas polares no cálculo de massa, área ou de volume de sólidos.

Exercícios 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13

- Na questão abaixo, utiliza-se a mudança de variável utilizando as equações de parametrização do elipsóide para cálculo do volume.

Exercício 5.16

●●○○

5.1 Verifique que

$$u(r,t) = \frac{1}{r}F(r-ct) + \frac{1}{r}G(r+ct)$$

é solução da *equação de onda* tridimensional

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = 0$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é o raio, t o tempo e $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis pelo menos duas vezes.

●●○○

5.2 O volume V do sólido interior a uma superfície *elipsóide* do $\mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é $V = \frac{4}{3}\pi abc$. A partir da superfície de equação $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 100$ na direção normal externa construimos um sólido de espessura $0,01$. Usando o diferencial da função volume apropriada estime o volume aproximado deste sólido.

●●○○

5.3 A temperatura sobre uma chapa plana é dada pela função

$$T(x,y) = e^{x^2-y^2}.$$

No ponto $A = (1,-1)$ em que direção $\vec{v}$ a temperatura decresce de forma mais rápida? Qual a derivada direcional de T no ponto A e na direção de $\vec{v}$?

●●●○

5.4 Estude com relação a máximos e mínimos locais a função

$$f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$$

●●●○

5.5 Um fabricante produz dois tipos de liga nas quantidades x e y toneladas, respectivamente. Se o custo total da produção é expresso pela função $C(x,y) = x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a renda total é dada pela função $R(x,y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, encontre o nível da produção que maximiza o lucro.

●○○○

5.6 Faça um esboço e calcule o volume do conjunto

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq z \leq x + y + 2\}$,

●●●○

5.7 Considere a lamina definida pelo quarta parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ que pertence ao primeiro quadrante. Determine o centro de massa da lamina, se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

●●●○

5.8 Calcule a area da região entre a curva $r = \theta, 0 \leq \theta \leq \pi; r = 2\pi - \theta; \pi \leq \theta \leq 2\pi$ e a curva $r = 2\theta, 0 \leq \theta \leq \pi; r = 4\pi - 2\theta; \pi \leq \theta \leq 2\pi$. Esboçe a região.

●○○○

5.9 Uma lâmina plana é formada pela região R do primeiro quadrante entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. A densidade da lâmina em um ponto (x, y) é $x + y$. Encontre a massa da lamina. (Sugestão: Use coordenadas polares).

●●●○

5.10 Encontre a area da região R entre as curvas $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$ e $r = 4 - \cos 3\theta$. Esboce a região R.

●●○○

5.11 Encontre a area da região no interior do círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e no exterior do círculo $x^2 + y^2 = 4$.

●●○○

5.12 Determine o volume do sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e acima da superfície $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$.

●○○○

5.13 Encontre o volume do sólido limitado pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e o plano $y = 10$.

●●●○

5.14 Encontre o momento de inércia

$$\iiint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$

em relação ao eixo z do cone sólido $R = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 10\}$, com densidade constante 1.

●●●○

5.15 Calcule o volume do sólido obtido pela interseção dos cilindros sólidos $y^2 + z^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.

••••

5.16 Encontre o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Sugestão: Use coordenadas $x = ar\cos\phi\cos\theta$, $y = br\cos\phi\,\text{sen}\theta$, $z = cr\,\text{sen}\phi$.

Sugestões

5.1 Encontre $ru(r,t)$ e derive com relação as variáveis r e t. Em seguida, analise, organize, e compare com a equação diferencial dada.

5.2 Com o auxílio dos dados da questão, diferencie a equação do volume, analise e encontre o volume do sólido.

5.3 Use a fórmula da derivada direcional, do vetor gradiente e de sua norma.

5.4 Utilize o teste da segunda derivada. Lembre-se da função Hessiano.

5.5 Utilize o teste da segunda derivada.

5.6 A partir da região dada em questão, encontre os limites de integração e, para determinar seu volume, utlize o teorema de fubinni para resolver a integral tripla.

5.7 Suponha a densidade $d(x,y) = y$ tomando o coeficiente de proporcionalidade igual a 1. Em seguida, a partir da análise da região proposta pela equação dada, utilize o teorema de Fubinni no cálculo das integrais duplas que surgem quando calcula-se M, M_x e M_y.

5.8 Tente visualizar a região de integração a partir dos intervalos dados na questão. Utilize o teorema de Fubinni.

5.9 Utilize coordenadas polares.

5.10 Tente visualizar a região de integração a partir dos intervalos dados na questão. Utilize o teorema de Fubinni..

5.11 Visualize geometricamente a região. Utilize coordenadas polares.

5.12 Utilize coordenadas polares.

5.13 A visualização da região pode ajudar na escolha dos limites de intregação. Utilize coordenadas polares.

5.14 Considere a densidade constante e igual a 1. Utilize coordenadas cilíndricas.

5.15 Observe a intersecção dos cilíndros e faça análise em $z = 0$ e $z \leq 0$.

5.16 Pesquise sobre a parametrização do elipsóide.

Respostas

5.1 Verifique que

$$u(r,t) = \frac{1}{r}F(r-ct) + \frac{1}{r}G(r+ct)$$

é solução da *equação de onda* tridimensional

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = 0$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é o raio, t o tempo e $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis pelo menos duas vezes.

Solução: Como $ru(r,t) = F(r-ct) + G(r+ct)$ temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = -c(F'(r-ct) + G'(r+ct))$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) = c^2(F''(r-ct) + G''(r+ct)).$$

Também

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = F'(r-ct) + G'(r+ct)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = F''(r-ct) + G''(r+ct).$$

Logo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru).$$

5.2 O volume V do sólido interior a uma superfície *elipsóide* do $\mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é $V = \frac{4}{3}\pi abc$. A partir da superfície de equação $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 100$ na direção normal externa construímos um sólido de espessura $0,01$. Usando o diferencial da função volume apropriada estime o volume aproximado deste sólido.

Solução: Dividindo a equação por 100 obtemos

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(10/3)^2} + \frac{z^2}{10^2} = 1.$$

Logo $a = 5$, $b = \frac{10}{3}$ e $c = 10$ e $da = db = dc = 0,01$.

Por outro lado
$$dV = \frac{4}{3}\pi(bc.da + ac.db + ab.dc)$$
de onde
$$dV = \frac{4}{3}\pi(\frac{10}{3}.10 + 5.10 + 5.\frac{10}{3}).0,01 = \frac{4}{3}\pi(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{4}{3}\pi.$$
O volume aproximado do sólido é $\frac{4}{3}\pi$.

5.3 A temperatura sobre uma chapa plana é dada pela função

$$T(x, y) = e^{x^2-y^2}.$$

No ponto $A = (1, -1)$ em que direção $\vec{v}$ a temperatura decresce de forma mais rápida? Qual a derivada direcional de T no ponto A e na direção de $\vec{v}$?

Solução: Pela definição de derivada direcional, sabe-se que a taxa de variação de uma função $T(x, y)$ em um ponto (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário $\vec{u}$, é dado pelo produto escalar

$$D_uT = \nabla T(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Pela definição de produto escalar temos

$$\nabla T(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \cos(\theta).||\nabla T(x_0, y_0)||.||\vec{u}||.$$

Seja $||\nabla T(x_0, y_0)||$ o modulo do gradiente, por definição $||\vec{u}|| = 1$ e $||\cos(\theta)|| \leq 1$. Então, $D_uT = \nabla T(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$, atingirá o seu valor mínimo quando $\cos(\theta) = -1$, ou seja, $\theta = \pi$. Com isso podemos concluir que $T(x, y)$ decresce de forma mais rápida em $(1, -1)$ quando a direção de $\vec{u}$ for a mesma de $\nabla T(1, -1)$ e sentido contrário.

Calculando temos
$$\nabla T(x, y) = (2e^{x^2-y^2}, -2ye^{x^2-y^2})$$
logo
$$\nabla T(1, -1) = (2, -2)$$
e
$$||\nabla T(1, -1)|| = 2\sqrt{2}.$$
Assim temos que a derivada direcional mínima é

$$D_uT = \cos(\theta).||\nabla T(x_0, y_0)||.||\vec{u}|| = (-1).(2\sqrt{2}).1 = -2\sqrt{2}$$

e a direção é a de $\vec{v} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

5.4 Estude com relação a máximos e mínimos locais a função

$$f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$$

Solução: Os máximos e mínimos locais, se existem, estão entre os pontos onde as derivadas parciais se anulam. Como $f_x(x, y) = 3x^2 + 2y - 5$ e $f_y(x, y) = 2x + 2y$ obtemos o sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y - 5 &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Da segunda equação temos $y = -x$ e substituindo na primeira temos $3x^2 - 2x - 5 = 0$. As soluções desta equação são $x = -1$ e $x = 5/3$. Temos portanto dois pontos como possibilidade: $A = (-1, 1)$ e $B = (5/3, -5/3)$. Para determinar se é máximo ou mínimo local devemos estudar o sinal da função $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ nos pontos. Como $f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{xy}(x, y) = 2$ e $f_{yy}(x, y) = 2$ obtemos $H(x, y) = 12x - 4$. Então $H(-1, 1) = -16$ e $H(5/3, -5/3) = 16$. Logo:

(i) $A = (-1, 1)$ é um ponto de sela.

(ii) $B = (5/3, -5/3)$ é um ponto de mínimo pois $f_{yy}(5/3, -5/3) = 2$.

A função tem apenas o ponto B como ponto de mínimo local.

5.5 Um fabricante produz dois tipos de liga nas quantidades x e y toneladas, respectivamente. Se o custo total da produção é expresso pela função $C(x, y) = x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a renda total é dada pela função $R(x, y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, encontre o nível da produção que maximiza o lucro.

Solução: Do enunciado teremos que o lucro $L(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$, ou seja $L(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 2000y$. No ponto de máximo $L_x = L_y = 0$ ou seja

$$\begin{aligned} -4x + 2y &= 0 \\ 2x - 2y + 2000 &= 0. \end{aligned}$$

Temos como solução $x = 1000$ e $y = 2000$. Como $L_{xx}(x, y) = -4$, $L_{xy}(x, y) = 2$ e $L_{yy}(x, y) = -2$ obtemos $(L_{xx}.L_{yy} - L_{xy}^2)(x, y) = 4$. Logo o lucro máximo ocorre para $x = 1000$ toneladas e $y = 2000$ toneladas.

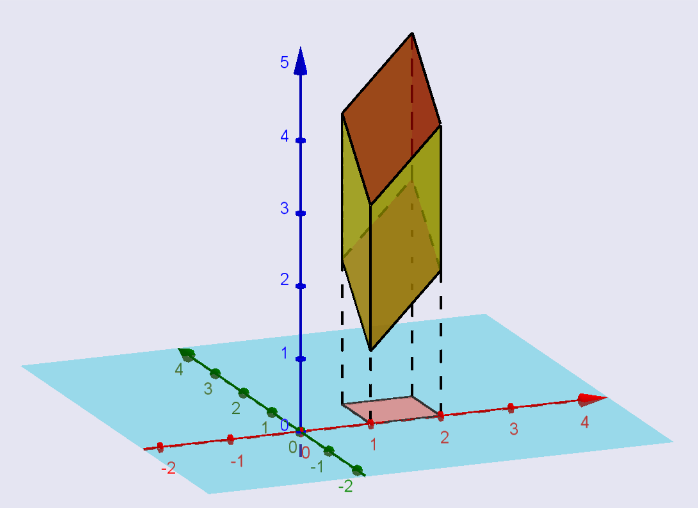
5.6 Faça um esboço e calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq z \leq x + y + 2\},$$

Solução: Temos

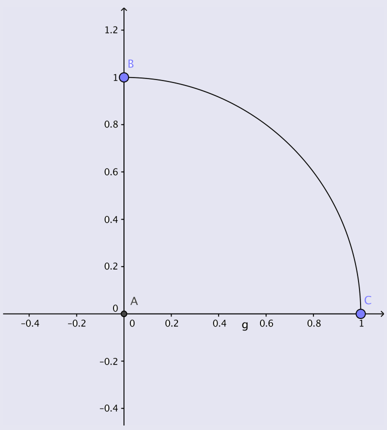
$$
\begin{aligned}
V(B) &= \iiint\limits_B dxdydz = \int_1^2 dx \int_0^1 dy \int_{x+y}^{x+y+2} dz \\
&= \int_1^2 dx \int_0^1 dy\, [z]_{x+y}^{x+y+2} = 2\int_1^2 dx \int_0^1 dy \\
&= 2\int_1^2 dx\, [y]_0^1 = 2\int_1^2 dx = 2\,[x]_1^2 \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Abaixo temos o esboço do conjunto.



5.7 Considere a lamina definida pelo quarta parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ que pertence ao primeiro quadrante. Determine o centro de massa da lamina, se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo x.

Solução: A figura correspondente a lamina está abaixo:



Então temos que calcular a massa M e os momentos M_x e M_y. Podemos supor a densidade $d(x, y) = y$ tomando o coeficiente de proporcionalidade igual a 1. Podemos descrever a lamina como

$$L = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Então

$$\begin{aligned} M &= \iint_L d(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_L xd(x, y)dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \int_0^1 x\frac{1}{2}(1 - x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

e

$$M_y = \iint_L yd(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (\sqrt{1 - x^2})^3dx.$$

Fazendo a substituição $x = \operatorname{sen} u$ obtemos $dx = \cos u du$ e

$$\begin{aligned} M_y &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 u du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u(1 - \operatorname{sen}^2 u)du = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 u - \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u)du \\ &= \int_0^{\pi/2} (\frac{\cos(2u) + 1}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2(2u)}{4})du = \int_0^{\pi/2} (\frac{\cos(2u) + 1}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2(2u)}{4})du \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos(2u)}{2} + \frac{3}{8} + \frac{\cos(4u)}{8}\right) du \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}(2u)}{4} + \frac{3}{8}u + \frac{\operatorname{sen}(4u)}{32}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Segue que as coordenadas do centro de massa são

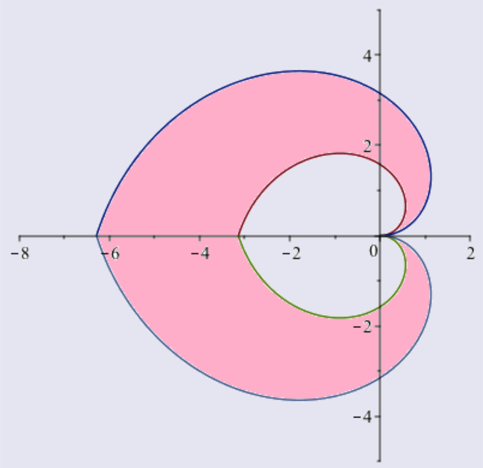
$$P = \left(\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}\right) = \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{8}\left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

5.8 Calcule a area da região entre a curva $r = \theta, 0 \le \theta \le \pi; r = 2\pi - \theta; \pi \le \theta \le 2\pi$ e a curva $r = 2\theta, 0 \le \theta \le \pi; r = 4\pi - 2\theta; \pi \le \theta \le 2\pi$. Esboçe a região.

Solução: Teremos que

$$\begin{aligned}
A &= \iint_R dxdy = \iint_R r dr d\theta \\
&= \int_0^\pi d\theta \int_\theta^{2\theta} r dr + \int_\pi^{2\pi} d\theta \int_{2\pi-\theta}^{4\pi-2\theta} r dr \\
&= \int_0^\pi d\theta \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_\theta^{2\theta} + \int_\pi^{2\pi} d\theta \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{2\pi-\theta}^{4\pi-2\theta} \\
&= \int_0^\pi \tfrac{3}{2}\theta^2 d\theta + \int_\pi^{2\pi} \tfrac{3}{2}(2\pi - \theta)^2 d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\theta^3\right]_0^\pi + \tfrac{1}{2}\left[(2\pi - \theta)^3\right]_\pi^{2\pi} \\
&= \pi^3
\end{aligned}$$

A região de integração é simétrica em relação ao eixo x e é limitada por espirais:



5.9 Uma lâmina plana é formada pela região R do primeiro quadrante entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. A densidade da lâmina em um ponto (x, y) é $x + y$. Encontre a massa da lamina. (Sugestão: Use coordenadas polares).

Solução: A massa m da lamina é dada por

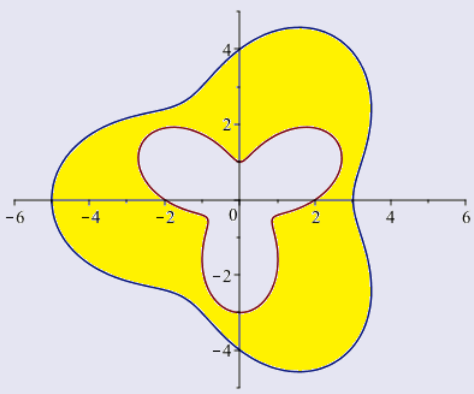
$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_R (x+y)dxdy \\ &= \iint\limits_R (r\cos\theta + r\,\text{sen}\theta)rdrd\theta \\ &= \int_1^3 r^2dr \int_0^{\pi/2}(\cos\theta + \text{sen}\theta)d\theta \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 [\text{sen}\theta - \cos\theta]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{52}{3} \end{aligned}$$

5.10 Encontre a area da região R entre as curvas $r = 2 + \text{sen}3\theta$ e $r = 4 - \cos 3\theta$. Esboce a região R.

Solução: Observe que as curvas $r = 2 + \text{sen}3\theta$ e $r = 4 - \cos 3\theta$ não se interceptam, pois para $2 + \text{sen}3\theta = 4 - \cos 3\theta$ teríamos $\text{sen}3\theta + \cos 3\theta = 2$ o que é impossível. Logo a area A de R será

$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_R rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{2+\text{sen}(3\theta)}^{4-\cos(3\theta)} rdr \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[r^2\right]_{2+\text{sen}(3\theta)}^{4-\cos(3\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[12 - 8\cos(3\theta) - 4\,\text{sen}(3\theta) + \cos(6\theta)]\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[12\theta - \frac{8}{3}\,\text{sen}(3\theta) + \frac{4}{3}\cos(3\theta) + \frac{1}{6}\,\text{sen}(6\theta)\right]_0^{2\pi} \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

O gráfico está abaixo:

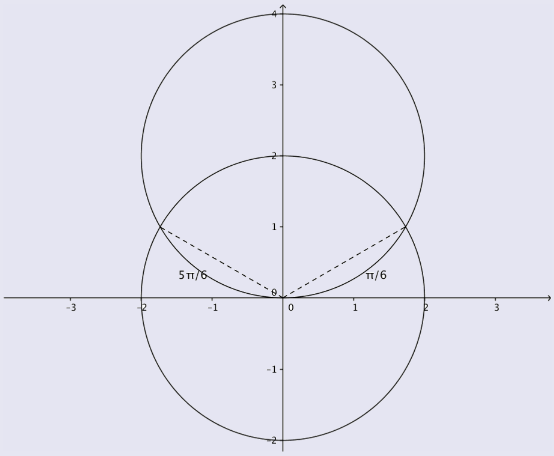


5.11 Encontre a area da região no interior do círculo $x^2 + (y-2)^2 = 4$ e no exterior do círculo $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: Colocando em coordenadas polares o primeiro círculo tem equação

$$4 = (r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\theta - 2)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta - 4r\,\text{sen}\theta + 4 = r^2 - 4r\,\text{sen}\theta + 4$$

de onde obtemos $r = 4\,\text{sen}\theta$. O segundo círculo tem equaçao $r = 2$, ou seja $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$. A interseção dos dois círculos ocorre para $2 = r = 4\,\text{sen}\theta$. Assim temos $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$.



Então a area A da região R é

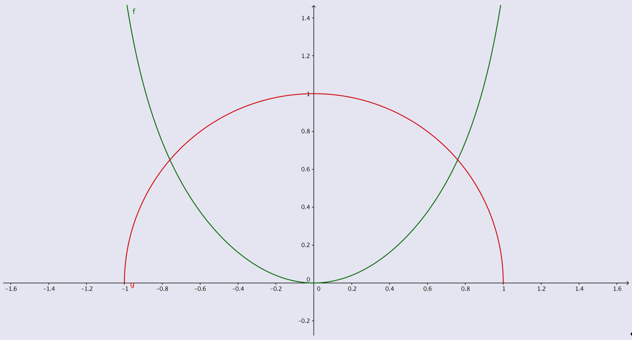
$$\begin{aligned}
A &= \iint_R r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_2^{4\,\text{sen}\theta} r\,dr \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_2^{4\,\text{sen}\theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8\,\text{sen}^2\theta - 2)d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4\cos(2\theta))d\theta \\
&= [2\theta - 2\,\text{sen}(2\theta)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \tfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

5.12 Determine o volume do sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e acima da superfície $z = \text{tg}\,(x^2 + y^2)$.

Solução: Podemos escrever o volume como

$$V = \iint_D (\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \text{tg}(x^2 + y^2))dA$$

onde D é o disco de raio r_0 tal que $\text{tg}\, r_0^2 = \sqrt{1 - r_0^2}$. O gráfico abaixo mostra um corte das superfícies:



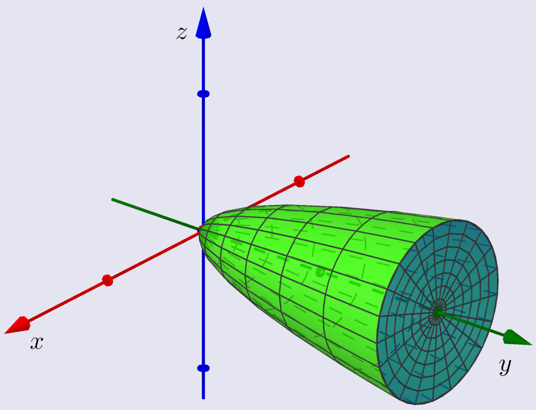
.

Logo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} (\sqrt{1-r^2} - \tan(r^2)) r dr \\ &= 2\pi \left[-\tfrac{1}{3}\sqrt{1-r^2}^3 + \tfrac{1}{2}\ln(\cos(r^2)) \right]_0^{r_0} \\ &= 2\pi \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{1-r_0^2}^3 + \tfrac{1}{2}\ln(\cos(r_0^2)) \right). \end{aligned}$$

5.13 Encontre o volume do sólido limitado pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e o plano $y = 10$.

Solução: A interseção de $y = 10$ com o paraboloide $y = x^2 + z^2$ é um círculo que se projeta no plano xz no círculo $x^2 + z^2 = 10$.



.

Seja

$$D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \le 10\}.$$

Podemos escrever

$$V = \iint_D (10 - x^2 - z^2) dx dz.$$

Introduzindo a mudança de coordenadas $x = r\cos t$, $z = r \operatorname{sen} t$ obtemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{10}} (10 - r^2) r dr \\ &= 2\pi \left[5r^2 - \tfrac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{10}} \\ &= 50\pi. \end{aligned}$$

5.14 Encontre o momento de inércia

$$\iiint\limits_R (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

em relação ao eixo z do cone sólido $R = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 10\}$, com densidade constante 1.

Solução: Em coordenadas cilíndricas a equação $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 10$ se transforma em $r \le z \le 10$. O cone fica então descrito por $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le 10$. Logo

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_R (x^2+y^2)dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10} dr \int_r^{10} r^2.r\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10} r^3\,[z]_r^{10}\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10} (10-r)r^3\,dr \\
&= 2\pi\left[10\tfrac{r^4}{4} - \tfrac{r^5}{5}\right]_0^{10} \\
&= 10^4\pi.
\end{aligned}$$

5.15 Calcule o volume do sólido obtido pela interseção dos cilindros sólidos $y^2+z^2 \le 1$ e $x^2+z^2 \le 1$.

Solução: Para $z = 0$ obtemos $y^2 \le 1$ e $x^2 \le 1$ ou seja a região intercepta o plano xy no quadrado

$$D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1; -1 \le y \le 1\}.$$

Para $z \le 0$ temos que $z = \sqrt{1-x^2}$ e $z = \sqrt{1-y^2}$, ou seja, as duas superfícies se interceptam nas retas $y = \pm x$. Podemos dividir o sólido em quatro partes de mesmo volume:

$$D_1 = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1; -x \le y \le x; -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}\};$$

$$D_2 = \{(x,y,z) : 0 \le y \le 1; -y \le x \le y; -\sqrt{1-y^2} \le z \le \sqrt{1-y^2}\};$$

$$D_3 = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 0; x \le y \le -x; -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}\};$$

$$D_4 = \{(x,y,z) : -1 \le y \le 0; y \le x \le -y; -\sqrt{1-y^2} \le z \le \sqrt{1-y^2}\}.$$

Vamos calcular o volume de D_1:

$$\begin{aligned}
V(D_1) &= \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} 2\sqrt{1-x^2}dy \\
&= 2\int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2})dx \\
&= 2\left[-2/3\left(1-x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Logo o volume de D é

$$V(D) = \frac{16}{3}.$$

5.16 Encontre o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Sugestão: Use coordenadas $x = ar\cos\phi\cos\theta$, $y = br\cos\phi\ \mathrm{sen}\theta$, $z = cr\ \mathrm{sen}\phi$.

Solução: Um rápido calculo mostra que

$$dV = dx\,dy\,dz = abcr^2\ \mathrm{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta.$$

O elipsóide será descrito por $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim seu volume V será

$$\begin{aligned} V &= abc\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} r^2\ \mathrm{sen}\phi d\phi \\ &= abc\left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^1 [\theta]_0^{2\pi}\,[-\cos\phi]_0^{\pi} \\ &= abc\tfrac{1}{3}.2\pi.2 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$