PROJETO Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo II

3

editAedi
Assessoria de Educação a Distância • UFPA

José Miguel Martins Veloso

Caderno 3: Exercícios de Cálculo II

1ª Edição

editAedi
Assessoria de Educação a Distância - UFPA

2017

REVISÃO
Edilson dos Passos Neri Junior

CAPA
Giordanna De Gregoriis

DIAGRAMAÇÃO
Manoel Dione de Oliveira Silva
Erick Rodolfo Souza Trindade

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Veloso, José Miguel Martins
Caderno 3 de Exercícios: cálculo II / José Miguel Martins Veloso.
- Belém: AEDI/UFPA, 2017

ISBN E-book: 978-85-65054-49-2

1. Cálculo diferencial e integral
2. Exercícios de cálculo
3. Projeto Newton

Caderno de Questões - Cálculo II

Sumário

Curvas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- O espaço $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades;
- Vetores, norma, produto escalar e produto vetorial;
- Equação de retas, planos e esferas;
- Limite e continuidade de funções vetoriais;
- Derivada e integral de funções vetoriais;
- Reta tangente e comprimento de curva.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria plana e espacial;
- Geometria analítica;
- Limite e continuidade de funções de uma variável;
- Derivação e integração de funções de uma variável.

Métodos e Técnicas

Cálculo componente a componente e otimização.

- Utilizando as regras imediatas de limite, derivada e integral, efetuam-se os cálculos em cada componente nos seguintes exercícios.

Exercícios 1.13, 1.14, 1.15 e 1.16

- Utiliza-se o teste da segunda derivada para determinar o mínimo da função f, nas seguintes questões.

Exercício 1.9

●○○○

1.1 Faça o que se pede:

(a) Qual a distância do ponto $A = (-3, 2, 1)$ ao plano $x = 1$?

(b) Encontre o centro e raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 8y - 7z = \frac{63}{2}.$$

●○○○

1.2 Responda:

(a) O que é a superfície $(x-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

(b) O que é a superfície $x^2 = z^2$ o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

(c) Qual é a interseção das duas superfícies? Desenhe ambas.

●●○○

1.3 Um cupim se move sobre um cubo unitário limitado pelas paredes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ do ponto $A = (3/10, 7/10, 1)$ para o ponto $B = (1, 7/10, 4/10)$. Calcule o comprimento da trajetória mais curta que passa sobre duas faces.

1.4 Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces (com uma extremidade comum).

●●○○

1.5 Mostre que se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não nulos, então $\vec{c} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ divide o ângulo ente $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ao meio.

●●●○

1.6 Faça o que se pede:

(a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que contém os pontos $A = (-2, 3, 2)$, $B = (2, 5, 2)$, $C = (4, 2, -1)$.

●○○○

(b) Encontre a área do triângulo ABC.

●●○○

1.7 Faça o que se pede:

(a) Parametrize a reta perpendicular ao plano que contém $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,4)$ e $C = (4,5,6)$ e passando por A.

(b) Encontre a equação $ax + by + cz = d$ do plano contendo os pontos A, B e C.

●●○○

1.8 Use o volume para determinar se $A = (1,1,3)$, $B = (2,-2,5)$, $C = (4,2,1)$ e $D = (2,-2,6)$ estão no mesmo plano.

●●●○

1.9 Calcule a menor distância da reta $x = 1+t,\ y = 1-2t,\ z = 3-t$ para a origem $(0,0,0)$.

●●●○

1.10 Parametrize a reta que contém o ponto $A = (2,1,3)$ e que intercepta a reta $x = 1+t,\ y = 1-t,\ z = 2t$ perpendicularmente.

●●●○

1.11 Parametrize a curva que é interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ e o cilindro cúbico $y = 2 + x^3$.

●●●●

1.12 Duas partículas viajam ao longo das curvas no espaço $r_1(t) = (t, t^2, t^3)$ e $r_2(t) = (1+2t, 1+6t, 1+14t)$.

(a) As partículas colidem?

(b) As trajetórias das partículas tem um ponto em comum?

●●●●

1.13 Encontre o ponto de interseção das duas retas tangentes à curva

$$r(t) = (\text{sen}(\pi t), 2\text{sen}(\pi t), \cos(\pi t))$$

nos pontos em que $t = 0$ e $t = 1/2$.

●●●●

1.14 Uma partícula se movendo ao longo da curva $r(t)$ tem a propriedade que $r''(t) = (2, 0, -\cos(2t))$. Sabemos que $r(0) = (1,2,1)$ e $r'(0) = (2,0,0)$. Calcule a curva $r(t)$.

●●●●

1.15 Calcule o limite, se existir,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}, \frac{e^t - 1}{t}, \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right).$$

●●○○

1.16 Faça o que se pede:

(a) Encontre o comprimento da curva

$$r(t) = (t^3, 24t, 6t^2)$$

para $t \in [0, 5]$.

(b) A projeção da curva acima no plano xz é a curva em duas dimensões

$$p(t) = (t^3, 6t^2).$$

Encontre seu comprimento para $t \in [0, 5]$.

Sugestões

1.1 Utilize de completamento de quadrados para determinar o centro e o raio da esfera.

1.2 Resolva o sistema por casos, por exemplo, considere $x = z$.

1.3 Desenvolva as duas faces do cubo num plano e calcule o comprimento do segmento com extremidades nos pontos desenvolvidos.

1.4 Considere o cubo unitário com um vértice na origem do sistema cartesiano ortogonal tridimensional.

1.5 Para $0 \leq \theta \leq \pi$ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ use $\cos(\theta) = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

1.6 A área de um paralelogramo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dada por $\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$.

1.7 Recorde a interpretação do produto vetorial entre dois vetores.

1.8 O volume de um paralelepípedo gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é a norma do produto misto entre esses vetores.

1.9 Defina $f(t)$ como o quadrado da distância do ponto $(1 + t, 1 - 2t, 3 - t)$ ao ponto $(0, 0, 0)$.

1.10 O plano que contém A e perpendicular à r será muito útil.

1.11 Faça $x = t$.

1.12 As partículas colidem se houver um instante t tal que $r_1(t) = r_2(t)$. E, as trajetórias têm um ponto em comum se a equação $r_1(t_1) = r_2(t_2)$ possuir solução.

1.13 Uma equação da reta tangente a uma curva r em t_0 é $\alpha(t) = r(t_0) + tr'(t_0)$.

1.14 Integre diretamente a função vetorial e use as condições iniciais.

1.15 L'Hospital no primeiro limite.

1.16 Aplique a fórmula do comprimento L de uma curva r em $[a, b]$, $L = \displaystyle\int_a^b \|r'(t)\| dt$.

Respostas

1.1 Faça o que se pede:

(a) Qual a distância do ponto $A = (-3, 2, 1)$ ao plano $x = 1$?

Solução: A distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$ é dado pela fórmula

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

No nosso caso, temos $a = 1$, $b = c = 0$, $d = -1$, $x_0 = -3$, $y_0 = 2$, e $z_0 = 1$. Substituindo esses valores diretamente na fórmula, obtemos $\rho = 4$.

(b) Encontre o centro e raio da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 8y - 7z = \frac{63}{2}.$$

Solução: Faremos completamento de quadrados, assim

$$x^2 + y^2 + y^2 - 3x - 8y - 7z = \frac{63}{2}$$

e escrevemos

$$\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + (y^2 - 8y + 4^2) + \left(z^2 - 7z + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) = \frac{63}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

daí segue

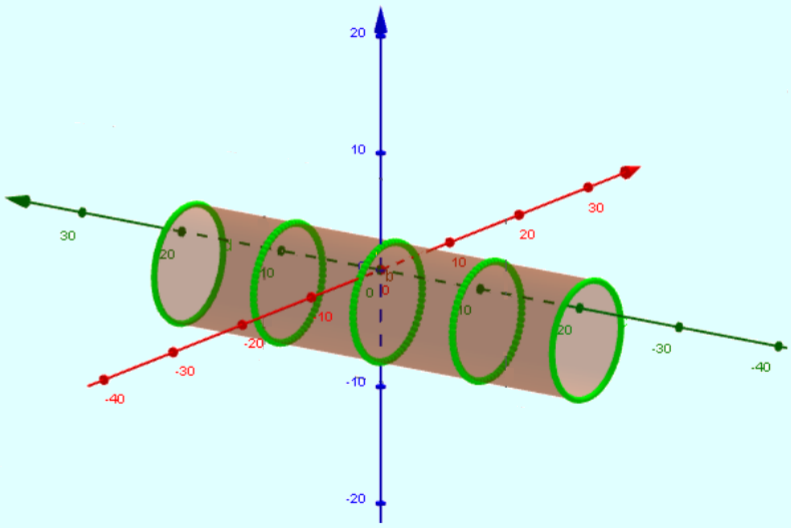
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{62}\right)^2.$$

Agora é fácil verificar que o centro da esfera é $\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$ e seu raio é $\sqrt{62}$.

1.2 Responda:

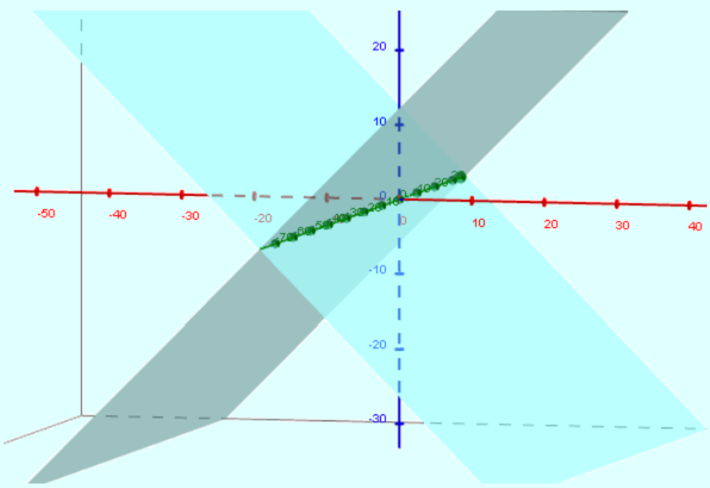
(a) O que é a superfície $(x-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

Solução: Fazendo a interseção do plano $y = t$ com a superfície $(x-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ teremos um círculo de centro $(1, t, -3)$ e raio 5 contido no plano $y = t$. Assim, a superfície em questão é uma união de círculos disjuntos, ou seja, um cilíndro reto tendo como eixo a reta $x = 1$, $y = t$, $z = -3$. Como na imagem abaixo:



(b) O que é a superfície $x^2 = z^2$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$?

Solução: A equação $x^2 = z^2$ é equivalente a equação $x^2 - z^2 = (x-z)(x+z) = 0$, cujo o gráfico é a união dos planos $x + z = 0$ e $x - z = 0$, como na imagem abaixo.



(c) Qual é a interseção das duas superfícies? Desenhe ambas.

Solução: Precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 = z^2 \\ (x-1)^2 + (z+3)^2 = 25. \end{cases}$$

Para isso, vamos dividir em casos:

Caso 1. Neste temos $x = z$. Fazendo $z = x$ na segunda igualdade do sistema, obtemos a equação do segundo grau $(x-1)^2 + (x+3)^2 = 25$, cujas soluções são

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{34}}{2}.$$

Caso 2. Neste temos $x = -z$. Fazendo $z = -x$ na segunda igualdade do sistema, obtemos a equação do segundo grau $(x-1)^2 + (-x+3)^2 = 25$, cujas soluções são

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Assim, a interseção das superfícies em (a) e (b) é a união das seguintes quatro retas, com $\lambda \in \mathbb{R}$:

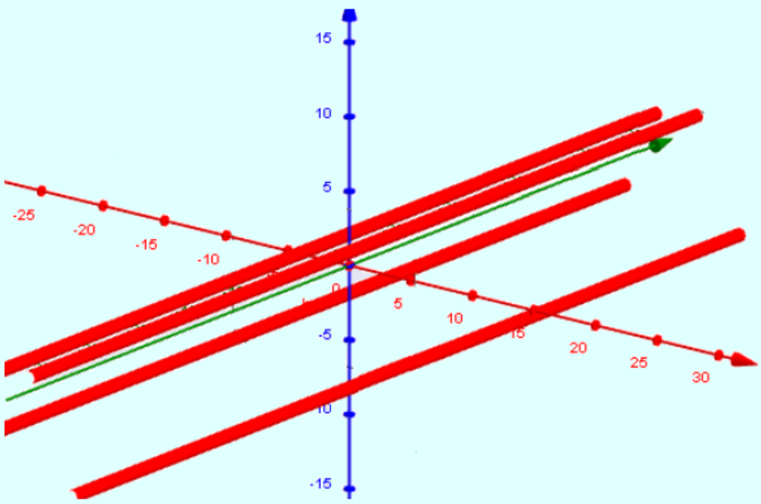
$$(x, y, z) = \left(\frac{-2+\sqrt{34}}{2}, 0, \frac{-2+\sqrt{34}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0);$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2-\sqrt{34}}{2}, 0, \frac{-2-\sqrt{34}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0);$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{4+\sqrt{41}}{2}, 0, -\frac{4+\sqrt{41}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0);$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{4-\sqrt{41}}{2}, 0, -\frac{4-\sqrt{41}}{2}\right) + \lambda(0, 1, 0).$$

O gráfico é o seguinte



1.3 Um cupim se move sobre um cubo unitário limitado pelas paredes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ do ponto $A = (3/10, 7/10, 1)$ para o ponto $B = (1, 7/10, 4/10)$. Calcule o comprimento da trajetória mais curta que passa sobre duas faces.

Solução: Primeiro observe que A pertence ao plano $z = 1$, B pertence ao plano $x = 1$ e que esses dois planos possuem a reta em comum

$$r: \ X = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0).$$

Se $P = (1, \lambda, 1) \in r$, então

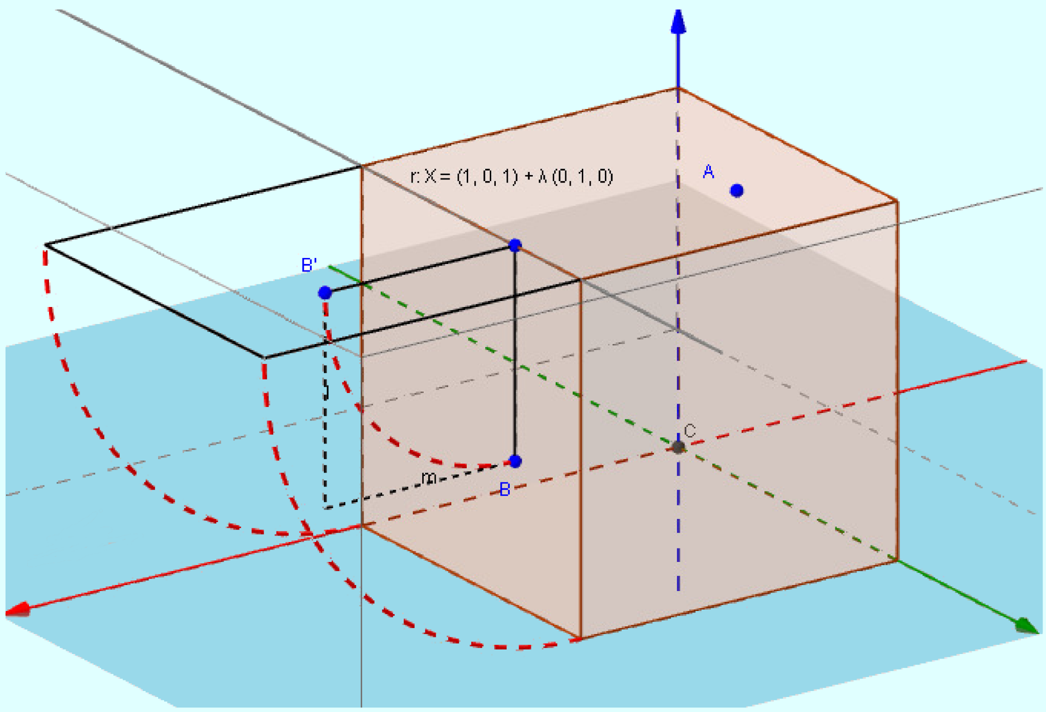
$$d(B, P) = \sqrt{\left(\lambda - \frac{7}{10}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{10}\right)^2}.$$

Olhando para esta última igualdade, pode-se ver que o mínimo ocorre quando $\lambda = 7/10$ e $B_0 = \left(1, \frac{7}{10}, 1\right)$ é o ponto da reta r mais próximo de B, e que a distância de B à reta r é igual a $d(B, r) = d(B, B_0) = \frac{6}{10}$.

Assim, fazendo uma rotação da face que está contida no plano $x = 1$ em torno da reta r, até que esta face esteja contida no plano $z = 1$ e que não coincida com outra face (como na imagem abaixo), o ponto correspondente ao ponto B será

$$B' = \left(1 + d(B, r), \frac{7}{10}, \frac{4}{10} + d(B, r)\right) = \left(\frac{16}{10}, \frac{7}{10}, 1\right).$$

Veja a imagem abaixo: Assim, o comprimento da trajetória mais curta será $d(A, B') = \frac{13}{10}$:



1.4 Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces (com uma extremidade comum).

Solução: Observe que a solução independe de qual cubo estamos tratando. Então considere o cubo cujos vértices são $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, $D = (0,0,1)$, $E = (1,1,0)$, $F = (1,0,1)$, $G = (0,1,1)$ e $H = (1,1,1)$. Considere agora a diagonal $\overline{AH}$ do cubo e $\overline{AE}$ de uma das faces. Veja que o vértice A é comum a essas duas diagonais. Precisamos determinar o ângulo entre $\vec{u} = \overrightarrow{AH} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AE} = (1,1,0)$. Se α é esse ângulo, então

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Logo, $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$. Veja que temos dois valores possíveis para $\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$, um agudo e outro obtuso. No caso consideramos o ângulo agudo.

1.5 Mostre que se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não nulos, então $\vec{c} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ divide o ângulo ente $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ao meio.

Solução: Seja $0 \le \theta_1 \le \pi$ o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{c}$, e $0 \le \theta_2 \le \pi$ o ângulo entre $\vec{c}$ e $\vec{b}$. Veja que estamos considerando θ_1 e θ_2 como sendo ângulos agudos entre os vetores. Neste caso, para provar que $\theta_1 = \theta_2$, é suficiente provar que $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$. Assim

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1) &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\langle \vec{a}, |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} \\
&= \frac{|\vec{b}|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + |\vec{a}|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} \\
&= \frac{|\vec{b}||\vec{a}| + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}|^2|\vec{a}| + |\vec{b}|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} \\
&= \frac{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle|\vec{a}| + |\vec{b}|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\langle |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} \\
&= \frac{\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \cos(\theta_2).
\end{aligned}$$

Logo, $\theta_1 = \theta_2$ e portanto, o vetor $\vec{c}$ divide o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ao meio.

1.6 Faça o que se pede:

(a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que contém os pontos $A = (-2,3,2)$, $B = (2,5,2)$, $C = (4,2,-1)$.

Solução: O plano que contém os pontos A, B e C é paralelo ao plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB} = (4, 2, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, -1, -3)$. Assim, como o vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é ortogonal aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então ele é ortogonal ao plano gerado por eles e consequentemente é também ortogonal ao plano que contém os pontos A, B e C. Portanto, o vetor

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 12, -16)$$

é uma solução para este problema.

(b) Encontre a área do triângulo ABC.

Solução: A área do triângulo ABC é igual a metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Assim, se S é a área do triângulo ABC, então

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{109}.$$

1.7 Faça o que se pede:

(a) Parametrize a reta perpendicular ao plano que contém $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$ e $C = (4, 5, 6)$ e passando por A.

Solução: De modo análogo ao item (a) da questão 1.6, o vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é ortogonal ao plano que contém os pontos A, B e C, e portanto tem a mesma direção da reta que procuramos. Além disso, tal reta passa pelo ponto A. Assim, como esta reta tem a direção de $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 4, -2)$ e passa pelo ponto $A = (1, 1, 1)$, sua equação na forma vetorial é

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 4, -2).$$

Escrevendo esta equação na sua forma paramétrica, obtemos

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

o qual é uma solução do problema.

(b) Encontre a equação $ax + by + cz = d$ do plano contendo os pontos A, B e C.

Solução: Para obter a equação de um plano, é suficiente termos um ponto e um vetor ortogonal ao plano. Já temos o ponto A (por exemplo) e também já vimos que o vetor

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 4, -2)$$

é ortogonal ao plano que passa pelos pontos A, B e C. Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano que procuramos se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0,$$

ou

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (-2, 4, -2) = 0,$$

da qual resulta

$$-2x + 4y - 2z = 0$$

que é a equação solicitada.

1.8 Use o volume para determinar se $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, -2, 5)$, $C = (4, 2, 1)$ e $D = (2, -2, 6)$ estão no mesmo plano.

Solução: Os pontos A, B, C e D não estão no mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ determinam um paralelepípedo de volume não nulo. Neste caso, o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ é dado por

$$V = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = 10.$$

Portanto, os pontos A, B, C e D não estão no mesmo plano.

1.9 Calcule a menor distância da reta $x = 1 + t,\ \ y = 1 - 2t,\ \ z = 3 - t$ para a origem $(0, 0, 0)$.

Solução: Seja $f(t)$ o quadrado da distância do ponto $(1+t, 1-2t, 3-t)$ ao ponto $(0, 0, 0)$. Então

$$f(t) = (1 + t)^2 + (1 - 2t)^2 + (3 - t)^2 = 6t^2 - 8t + 11.$$

O mínimo de f acontece para $f'(t) = 0$. Como

$$f'(t) = 12t - 8,$$

teremos que o zero acontece para $t = 2/3$. Como

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 12 > 0,$$

pelo teste da segunda derivada teremos que a menor distância da origem a reta é $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

1.10 Parametrize a reta que contém o ponto $A = (2, 1, 3)$ e que intercepta a reta $x = 1 + t,\ \ y = 1 - t,\ \ z = 2t$ perpendicularmente.

Solução: Seja r a reta dada no enunciado. Um vetor diretor da reta r é $\vec{u} = (1, -1, 2)$. Considere o plano π que contém A e é perpendicular ao vetor $\vec{u}$. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto de π, a equação de π é

$$0 = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = (x-2, y-1, z-3) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z - 7,$$

ou seja, $x - y + 2z = 7$. A interseção de π com r ocorre para

$$(1+t) - (1-t) + 2(2t) = 7,$$

ou seja $t = \frac{7}{6}$. O ponto B da interseção de π com r é

$$B = \left(1 + \frac{7}{6}, 1 - \frac{7}{6}, 2\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{13}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{14}{6}\right).$$

A reta que procuramos tem como vetor diretor um múltiplo de

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{13}{6} - 2, -\frac{1}{6} - 1, \frac{14}{6} - 3\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{4}{6}\right),$$

ou seja, $\vec{v} = (1, -7, -4)$. Então a reta pedida tem equação

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(1, -7, -4),$$

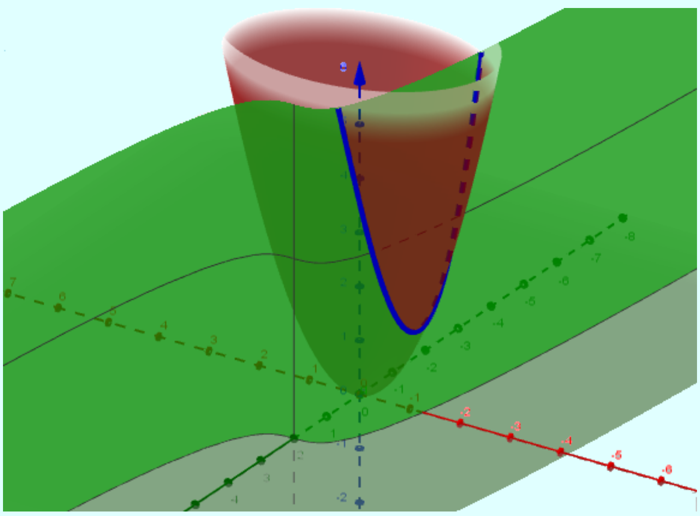
isto é, $x = 2 + t$, $y = 1 - 7t$ e $z = 3 - 4t$.

1.11 Parametrize a curva que é interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ e o cilindro cúbico $y = 2 + x^3$.

Solução: Fazendo $x = t$ temos que as equações paramétricas da interseção do paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ e o cilindro cúbico $y = 2 + x^3$ são

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t^3 \\ z = t^2 + 2(2 + t^3)^2. \end{cases}$$

Podemos ver a interseção no gráfico abaixo:



1.12 Duas partículas $r_1(t) = (t, t^2, t^3)$ e $r_2(t) = (1+2t, 1+6t, 1+14t)$ viajam ao longo das curvas no espaço.

(a) As partículas colidem?

Solução: As partículas colidem se existir solução para a equação $r_1(t) = r_2(t)$. Igualando coordenada a coordenada, temos

$$\begin{cases} t = 1+2t \\ t^2 = 1+6t \\ t^3 = 1+14t. \end{cases}$$

A única solução da primeira equação é $t = -1$, e como este valor não satisfaz as outras duas equações, o sistema não possui solução. Portanto, as partículas não colidem.

(b) As trajetórias das partículas tem um ponto em comum?

Solução: As trajetórias têm um ponto em comum se a equação $r_1(t_1) = r_2(t_2)$ tiver solução. Igualando as coordenadas, temos

$$\begin{cases} t_1 = 1+2t_2 \\ t_1^2 = 1+6t_2 \\ t_1^3 = 1+14t_2. \end{cases}$$

Da primeira coordenada da equação, segue que

$$t_2 = \frac{t_1 - 1}{2}$$

Substituindo na segunda coordenada da equação, temos

$$t_1^2 = 1 + 6\left(\frac{t_1 - 1}{2}\right),$$

do qual obtemos

$$t_1^2 - 3t_1 + 2 = 0.$$

Cujas soluções são $t_1 = 1$ ou $t_1 = 2$. Fazendo $t_1 = 1$, teremos $t_2 = \frac{t_1 - 1}{2} = 0$. Estes valores satisfazem a terceira equação do sistema. Assim, $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$ é uma solução do sistema.

Agora, analisando o outro valor obtido, $t_1 = 2$, temos $t_2 = \frac{t_1 - 1}{2} = \frac{1}{2}$. E como estes valores satisfazem a terceira equação $t_1^3 = 1 + 14t_2$, então o sistema tem outra solução $t_1 = 2$ e $t_2 = \frac{1}{2}$.

Portanto, as trajetórias tem dois pontos em comum.

1.13 Encontre o ponto de interseção das duas retas tangentes à curva

$$r(t) = (\operatorname{sen}(\pi t), 2\operatorname{sen}(\pi t), \cos(\pi t))$$

nos pontos em que $t = 0$ e $t = 1/2$.

Solução: Temos

$$r'(t) = (\pi\cos(\pi t), 2\pi\cos(\pi t), -\pi\operatorname{sen}(\pi t)).$$

A equação vetorial da reta tangente à curva $r(t)$ no ponto $t = 0$ é

$$\alpha(t) = r(0) + tr'(0)$$

segue então

$$\alpha(t) = (0, 0, -1) + t(-\pi, -2\pi, 0) = (-\pi t, -2\pi t, -1).$$

Do mesmo modo, a equação vetorial da reta tangente à curva $r(t)$ no ponto $t = \frac{1}{2}$ é

$$\beta(t) = r(1/2) + tr'(1/2)$$

daí

$$\beta(t) = (1, 2, 0) + t(0, 0, -\pi) = (1, 2, -\pi t).$$

Se P é um ponto de interseção das retas, então existem t_1 e t_2 tais que

$$P = \alpha(t_1) = \beta(t_2).$$

Igualando coordenada a coordenada da segunda igualdade, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \pi t_1 = 1 \\ 2\pi t_1 = 2 \\ 1 = -\pi t_2 \end{cases}$$

cuja solução é $t_1 = \frac{1}{\pi}$ e $t_2 = \frac{-1}{\pi}$. O ponto da interseção portanto é

$$P = (1, 2, 1).$$

1.14 Uma partícula se movendo ao longo da curva $r(t)$ tem a propriedade que $r''(t) = (2, 0, -\cos(2t))$. Sabemos que $r(0) = (1, 2, 1)$ e $r'(0) = (2, 0, 0)$. Calcule a curva $r(t)$.

Solução: Como $r''(t) = (2, 0, -\cos(2t))$, então

$$\begin{aligned} r'(t) &= \int r''(t)dt \\ &= \left(\int 2dt, \int 0dt, \int (-\cos(2t))dt\right) \\ &= \left(2t, 0, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right) + (c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

em que (c_1, c_2, c_3) é um vetor constante. Resolvendo a equação $r'(0) = (2, 0, 0)$, obtemos $(c_1, c_2, c_3) = (2, 0, 0)$. Logo

$$r'(t) = \left(2 + 2t, 0, -\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right).$$

Integrando novamente obtemos

$$\begin{aligned} r(t) &= \int r'(t)dt \\ &= \left(\int (2t+2)dt, \int 0dt, \int \left(-\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right) dt\right) \\ &= \left(t^2 + 2t, 0, \frac{1}{4}\cos(2t)\right) + (x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

sendo (x_0, y_0, z_0), também, um vetor constante. Resolvendo a equação $r(0) = (1, 2, 1)$, encontramos $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, 2, \frac{3}{4}\right)$.

Portanto as curvas de nível são parábolas cúbicas

$$r(t) = \left(t^2 + 2t + 1,\ 2,\ \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{3}{4}\right).$$

1.15 Calcule o limite, se existir,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}, \frac{e^t - 1}{t}, \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right).$$

Solução: Vamos verificar que os limites de cada coordenada existem, então o limite acima existe e é igual a

$$\left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2},\ \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t},\ \lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right).$$

No limite da primeira coordenada, usamos a regra de L'Hospital, assim

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}\, t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Na segunda coordenada, já sabemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = \left.\frac{de^t}{dt}\right|_{t=0} = e^0 = 1.$$

E na terceira coordenada, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2} = \lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{t(t-1)} = \lim_{t\to 0}\frac{t+2}{t-1} = -2.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2},\ \frac{e^t - 1}{t},\ \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2 - 3(t+1) + 2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, -2\right).$$

1.16 Faça o que se pede:

(a) Encontre o comprimento da curva

$$r(t) = (t^3, 24t, 6t^2)$$

para $t \in [0, 5]$.

Solução: Temos $r'(t) = (3t^2, 24, 12t)$. O comprimento da curva r é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \|r'(t)\| dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{(3t^2)^2 + 24^2 + (12t)^2} dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{9(t^2+8)^2} dt \\ &= \int_0^5 3(t^2+8) dt \\ &= 245. \end{aligned}$$

(b) A projeção da curva acima no plano xz é a curva em duas dimensões

$$p(t) = (t^3, 6t^2).$$

Encontre seu comprimento para $t \in [0, 5]$.

Solução: Temos $p'(t) = (3t^2, 12t)$. O comprimento da curva p é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \|p'(t)\| dt \\ &= \int_0^5 \sqrt{(3t^2)^2 + (12t)^2} dt \\ &= \int_0^5 3t\sqrt{t^2+16} \\ &= \left[(t^2+16)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 \\ &= 41\sqrt{41} - 64. \end{aligned}$$

Funções de várias variáveis

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Domínio e imagem funções de várias variáveis;
- Curvas de nível;
- Superfícies de nível;
- Gráfico de funções de várias variáveis;
- Limite e continuidade de funções de várias variáveis.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Noções sobre domínio e imagem de função de uma variável real;
- Geometria plana e espacial;
- Geometria analítica;
- Construção de gráficos de funções de uma variável real;
- Comandos básicos de algum aplicativo matemático de computação algébrica e simbólica;
- Limite e continuidade funções de uma variável real.

Métodos e Técnicas

Esboço de gráficos.

- Nos exercícios que seguem utilizam-se as interseções da função com os planos coordenados, curvas de nível e curvas de contorno para esboçar o gráfico de funções de duas variáveis. Determinar o domínio e a imagem das funções é indispensável.

Exercícios 2.2 e 2.4

Aplicação da definição e teoremas de limites para funções de várias variáveis.

- Aplicação do Teorema do Confronto para os seguintes exercícios de limite e continuidade.

Exercícios 2.5(a), 2.6(b) e 2.7(a)

- Definição de continuidade em funções de várias variáveis.

Exercícios 2.5(b), 2.6(c), 2.7(b) e 2.9

●○○○

2.1 Encontre as curvas de nível da função $f(x,y) = x^3 + y$. (As curvas de nível são as curvas dadas por $f(x,y) = c$ em que c é uma constante.)

●●○○

2.2 Encontre o domínio e a imagem da função $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x^2-1}{y^2-1}\right)$ e faça o gráfico.

●●●○

2.3 Encontre as curvas de nível da função

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

e esboce os gráficos das curvas de nível e da função.

●●●○

2.4 Seja a função

$$f(x,y,z) = 4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20.$$

Que tipo de superfície é a superfície de nível $f(x,y,z) = 0$? Esboce o gráfico da mesma.

●●○○

2.5 Responda:

(a) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{4x^2+y^2}$. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Qual seu valor?

(b) É possível dar um valor a $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

●●●●

2.6 Faça o que se pede:

(a) Estude a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4x^2-y^2}$ em relação a domínio, imagem, curvas de nível e esboce o gráfico.

(b) Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Qual seu valor?

(c) É possível dar um valor a $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$?

●●●○

2.7 Responda:

(a) Considere a função $f(x, y) = \dfrac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y}$. Existe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y)$? Qual seu valor?

(b) É possível dar um valor a $f(1, 2)$ de modo que f seja contínua em $(1, 2)$? Justifique.

●●○○

2.8 Use um computador para desenhar a superfície de nível $f(x, y, z) = 4$ onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2$

●●●○

2.9 Descreva o conjunto dos pontos nos quais a função f seja contínua:

(a) $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(b) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

(c) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 1$.

Sugestões

2.1 Isole a variável y.

2.2 Analise numerador e denominador simultâneamente e estritamente positivos e em seguida negativos.

2.3 Estude a equação para $c = 0$ e para $c \neq 0$.

2.4 Complete quadrados e observe o gráfico das curvas em cada plano coordenado.

2.5 Observe que $g(x, y) = \dfrac{x^2}{4x^2 + y^2}$ é limitada.

2.6 Para $c \in Im_f$ estude

$$c = \frac{x^2}{4x^2 - y^2}$$

para os diferentes valores possíveis de c.

2.7 Use fatoração para encontrar uma função contínua.

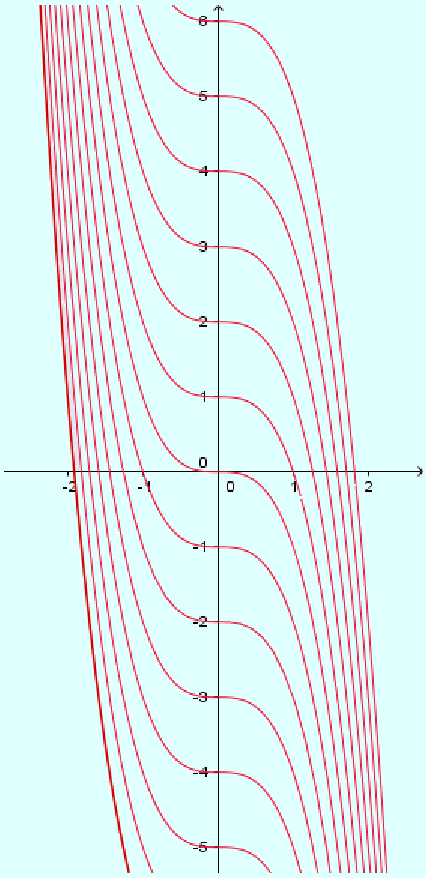
2.8 Use o software MAXIMA, Geogebra ou Maple.

2.9 Considere o número real dado por $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ e faça uma substituição de variável.

Respostas

2.1 Encontre as curvas de nível da função $f(x,y) = x^3 + y$. (As curvas de nível são as curvas dadas por $f(x,y) = c$ em que c é uma constante.)

Solução: Fazendo $f(x,y) = c$, temos $x^3 + y = c$, que implica $y = -x^3 + c$. Abaixo, o esboço de algumas curvas de nível.



2.2 Encontre o domínio e a imagem da função

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right)$$

e faça o gráfico.

Solução: Devemos ter

$$\frac{x^2-1}{y^2-1} > 0$$

e isto ocorre se o numerador e o denominador forem ambos estritamente positivos ou ambos estritamente negativos. Isto é, se

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ y^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

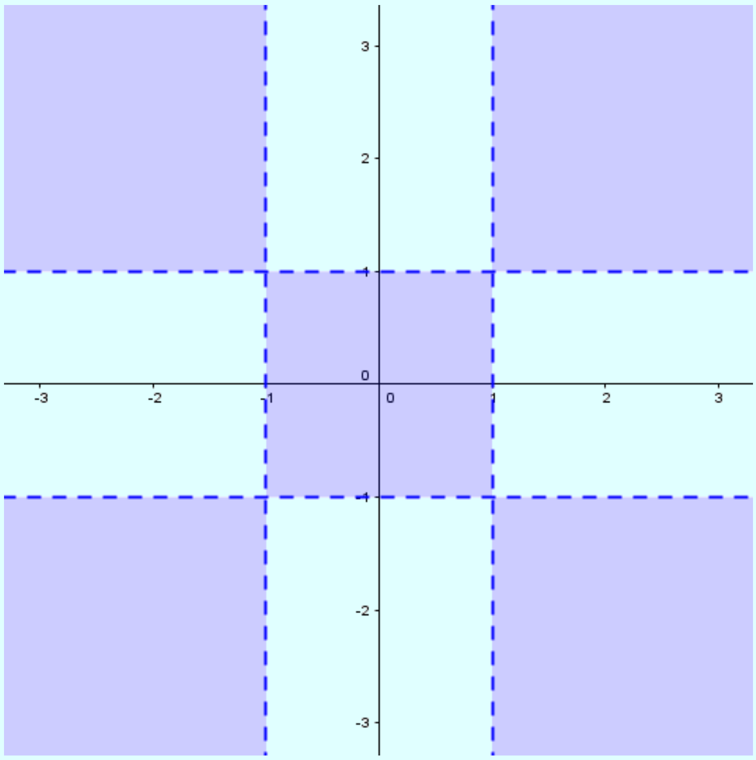
temos $\{x, y\} \subset (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Ou se

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ y^2 - 1 < 0, \end{cases}$$

temos $\{x, y\} \subset (-1, 1)$. Assim, o domínio de f é

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \{x, y\} \subset (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ ou } \{x, y\} \subset (-1, 1)\}.$$

O gráfico do domínio é o seguinte



Seja $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$k = \log \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}.$$

Se $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ é base do logaritmo, então

$$a^k = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}.$$

Então, para termos $f(x_0, y_0) = k$, basta tomarmos o ponto $(x_0, y_0) = (\sqrt{a^k + 1}, \sqrt{2})$ e é fácil verificar que $f(\sqrt{a^k + 1}, \sqrt{2}) = k$. Portanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, a imagem de f é o conjunto de todos os números reais.

2.3 Encontre as curvas de nível da função

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2},$$

e esboce os gráficos das curvas de nível e da função.

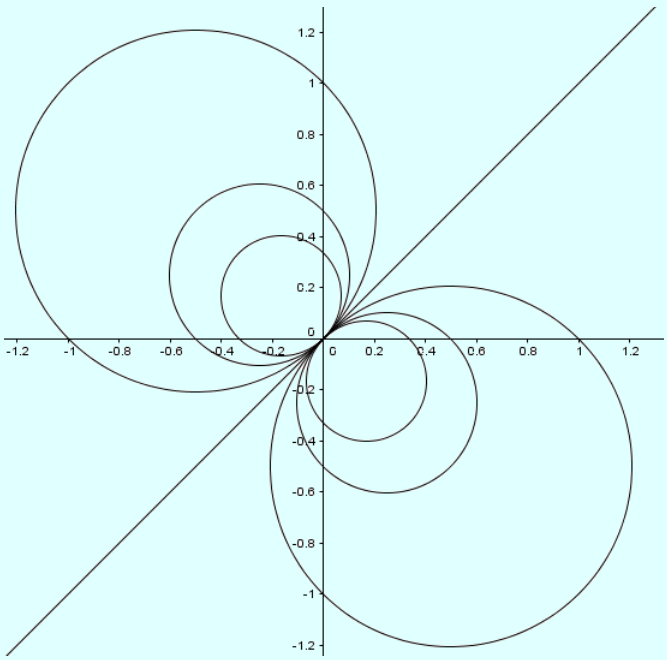
Solução: Tomando $f(x, y) = c$, temos $c = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$. Se $c = 0$, então $x = y$. Se $c \neq 0$, teremos

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{c}x + \frac{1}{c}y = 0,$$

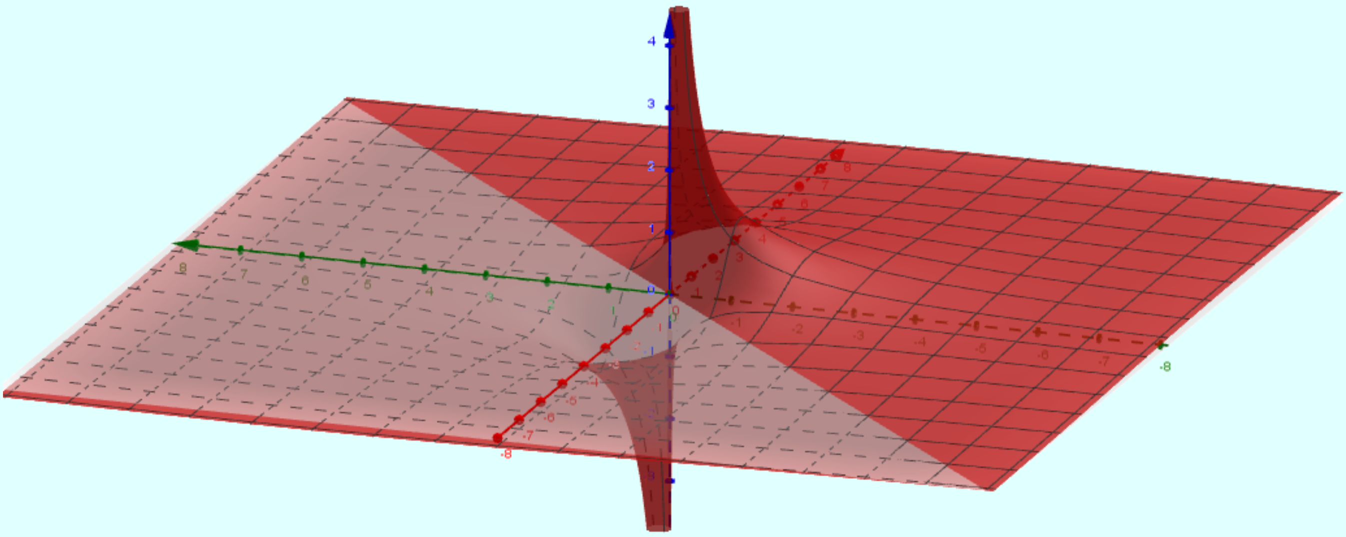
completando quadrados obtemos

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{2c^2}.$$

Que são equações de circunferências de centro $\left(\frac{1}{2c}, -\frac{1}{2c}\right)$ e raio $\frac{1}{\sqrt{2}|c|}$. O gráfico de algumas curvas de nível está na imagem abaixo:



O gráfico da função é:



2.4 Seja a função

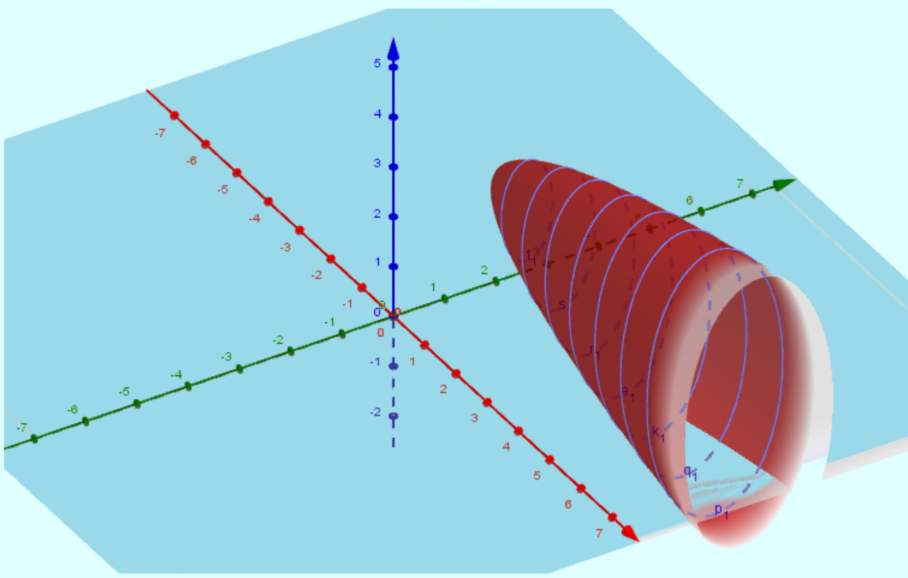
$$f(x, y, z) = 4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20.$$

Que tipo de superfície é a superfície de nível $f(x, y, z) = 0$? Esboce o gráfico da mesma.

Solução: Da igualdade $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$ e fazendo completamento de quadrados encontramos a seguinte equação

$$\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} + (z-2)^2 = x.$$

Para cada $x > 0$ temos que sua projeção no plano yz é uma elipse, e como x em cada direção no plano xz é dado por uma potência de segundo grau, isto é, uma parábola. Portanto, a função representa um paraboloide elíptico. Seu gráfico é:



2.5 Responda:

(a) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{4x^2+y^2}$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Qual seu valor?

Solução: Primeiro veja que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4x^2+y^2}$ é limitada, pois

$$0 \leq g(x,y) = \frac{x^2}{4x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

E a função $h(x,y) = y$ satisfaz $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$, nessas condições, o limite do produto $g(x,y)\cdot h(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ é igual a zero, isto é, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\cdot h(x,y) = 0$. Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{4x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\cdot h(x,y) = 0.$$

(b) É possível dar um valor a $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

Solução: Para que a função f seja contínua em $(0,0)$, devemos ter $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, então basta definir $f(0,0) = 0$, e assim f será contínua.

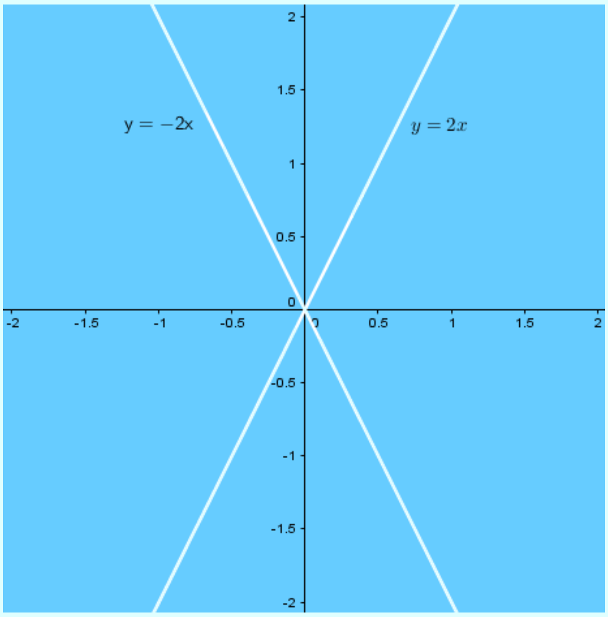
2.6 Faça o que se pede:

(a) Estude a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4x^2-y^2}$ em relação a domínio, imagem, curvas de nível e esboce o gráfico.

Solução: O domínio de f é o conjunto

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x^2 - y^2 \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 2x \text{e} y \neq -2x\}. \end{aligned}$$

O gráfico do domínio está na imagem abaixo, e as retas $y = 2x$ e $y = -2x$ estão brancas para significar que não pertencem ao domínio de f.



Para que o número real c pertença a imagem de f, é suficiente que o conjunto solução da equação

$$c = \frac{x^2}{4x^2 - y^2}$$

seja não vazio. Desta última equação, segue que

$$cy^2 = (4c - 1)x^2 \tag{1}$$

Para $c \neq 0$, da equação acima, temos

$$y^2 = \frac{4c-1}{c}x^2 \geq 0. \tag{2}$$

Da qual resulta

$$\frac{4c-1}{c} \geq 0.$$

Se $c > 0$, então da equação acima, $4c - 1 \geq 0$ e portanto $c \geq \frac{1}{4}$. Se $c < 0$, então já teremos necessariamente $4c - 1 < 0$. E como 0 pertence a imagem de f, pois $f(0, 1) = 0$, então o conjunto imagem de f é

$$\begin{aligned} Im_f &= \left\{c \in \mathbb{R};\ c < 0 \text{ ou } c \geq \frac{1}{4}\right\} \cup \{0\} \\ &= (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar as curvas de nível da função f. Lembrando que o ponto $(0, 0)$ não está no domínio de f, segue da equação (1) que a curva de nível $f(x, y) = 0$ é a reta $x = 0$

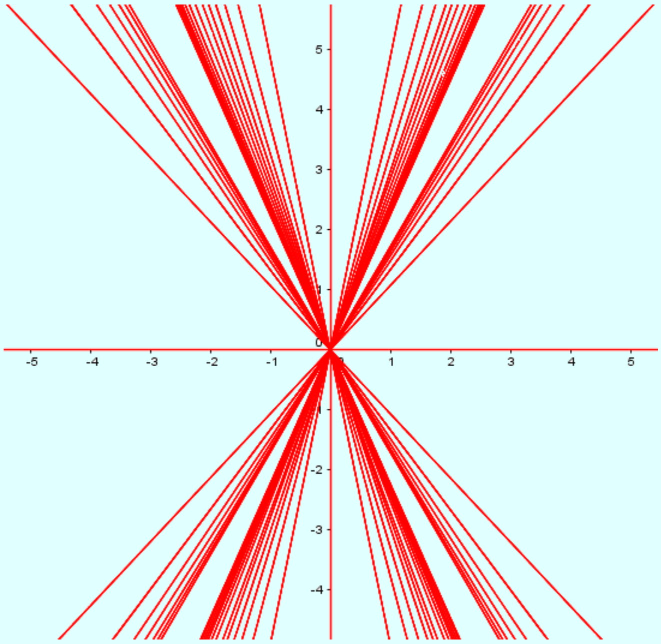
menos a origem $(0, 0)$.

E da equação (2), as curvas de nível $f(x, y) = c \neq 0$, são as retas

$$y = \pm\sqrt{\frac{4c-1}{c}}x$$

menos a origem $(0, 0)$

Abaixo o gráfico de algumas curvas de nível



(b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Qual seu valor?

Solução: Considere os caminhos $\alpha_1(t) = (t, 0)$ e $\alpha_2(t) = (0, t)$. É fácil verificar que $\lim\limits_{t\to 0} \alpha_i(t) = \alpha_i(0) = (0, 0)$ e que $\alpha_i(t) \neq (0, 0)$ $\forall t \neq 0$, e $\forall\ i \in \{1, 2\}$. Temos que

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_1(t)) = \lim_{(t,0)\to(0,0)} f(t, 0) = \lim_{(t,0)\to(0,0)} \frac{t^2}{4 \cdot t^2 - 0^2} = \frac{1}{4}$$

e também

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_2(t)) = \lim_{(0,t)\to(0,0)} f(0, t) = \lim_{(0,t)\to(0,0)} = \frac{0^2}{4 \cdot 0^2 - t^2} = 0.$$

Como

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\alpha_2(t))$$

então o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe.

(c) É possível dar um valor a $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$?

Solução: Para que f seja contínua em $(0,0)$, seria necessário que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, mas pelo item (b) acima, tal limite não existe, e portanto a descontinuidade de f no ponto $(0,0)$ não é removível.

2.7 Responda:

(a) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y}$. Existe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$? Qual seu valor?

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)y}{(x-1)(x+2y)}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x+2y}\\ &= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Portanto, o limite existe e é igual a $\frac{2}{5}$.

(b) É possível dar um valor a $f(1,2)$ de modo que f seja contínua em $(1,2)$? Justifique.

Solução: Sim, é possível, pois para que f seja contínua no ponto $(1,2)$, basta definir

$$f(1,2) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \frac{2}{5}.$$

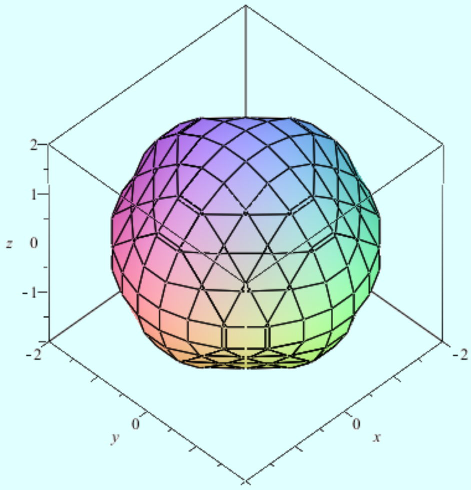
2.8 Use um computador para desenhar a superfície de nível $f(x,y,z) = 4$ sendo $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2$.

Solução: Se escolhermos o "Maple", basta digitar "with(plots)", apertar a tecla "Enter" do teclado, e em seguida digitar "implicitplot3d($4 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2$)" e apertar "Enter" novamente. A superfície será plotada como na imagem abaixo:

$with(plots)$

[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

$implicitplot3d(4 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2)$



2.9 Descreva o conjunto dos pontos nos quais a função f seja contínua:

(a) $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

Solução: Como f é composta de funções contínuas, então f é contínua em todo o seu domínio. O domínio de f é o conjunto

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x}{y} > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ \{x, y\} \subset (-\infty, 0) \text{ ou } \{x, y\} \subset (0, +\infty)\} \end{aligned}$$

(b) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

Solução: De modo análogo ao item (a), f é contínua em todo o seu domínio. O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x \neq y\}.$$

(c) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 1$.

Solução: Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f pode ser escrita como composta de funções contínuas, então f é contínua no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mas para determinar se f é contínua em $(0, 0)$, é necessário

verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Tomando $u = \sqrt{x^2+y^2}$, podemos interpretar u como sendo a distância do ponto (x,y) à origem, assim $(x,y) \to (0,0)$ é equivalente à $u \to 0$, e ainda $u \neq 0$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$.
Temos então

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \\
&= 1 \\
&= f(0,0).
\end{aligned}$$

Assim, f também é contínua em $(0,0)$ e portanto é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Diferenciabilidade

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Derivadas parciais e sua interpretação geométrica;
- Planos tangentes, retas normais e retas perpendiculares;
- Funções diferenciáveis e de classe C^1;
- Derivadas direcionais e gradiente: cálculo e interpretação geométrica;
- Regra da cadeia e o Teorema da Função Implícita;
- Derivadas de ordem superior.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria analítica;
- Gráfico de função de uma variável;
- Derivadas ordinárias e regras básicas de derivação;
- Regra da cadeia para funções de uma variável.

Métodos e Técnicas

Regra da cadeia	• Utiliza-se a regra da cadeia para funções de mais de uma variável no seguinte exercício. **Exercício 3.6**
Teorema da Função Implícita	• Nos seguintes exercícios, aplica-se o Teorema da Função Implícita para calcular as derivadas ordinárias ou parcias de funções dadas implicitamente **Exercícios 3.12 e 3.13** • Na questão a seguir, aplica-se o Teorema da Função Implícita para mostrar que a equação define uma curva. **Exercício 3.9**

●●○○

3.1 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{4 - 4x^2 + y^2}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ interprete estes números como inclinações de retas tangentes às funções $g(x) = f(x,2)$ e $h(y) = f(1,y)$. Faça um gráfico mostrando as retas.

●○○○

3.2 Encontre as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função $f(x,y) = 2x^y$ no ponto $(2,3)$.

●●○○

3.3 Verifique que a função

$$u(x,t) = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$$

é solução da *equação de condução do calor.*

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$$

sendo k e α são constantes.

●●○○

3.4 A equação diferencial

$$f_t = f - x f_x - x^2 f_{xx}$$

é um exemplo da famosa equação de Black-Scholes. Aqui $f(x,t)$ é o preço de uma opção de compra, x o preço da ação e t o tempo. Verifique que $f(x,t) = e^t \ln(x)$ resolve esta equação.

●●○○

3.5 Encontre as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função

$$f(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(t^2)\,dt.$$

●○○○

3.6 Use a regra da cadeia para encontrar a derivada dz/dt, sendo $z = \cos(2x+3y)$, $x(t) = t^3$ e $y(t) = 1/t^2$.

●●●○

3.7 Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = 2(x+1)^2 + (y-3)^2 + 1$$

no ponto $(1,-1,25)$.

●●●○

(b) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = \ln(x - 3y)$$

no ponto $(4, 1, 0)$.

●●●○

3.8 Encontre a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x - z - 4\arctan(yz) = 0$ pelo ponto $(1 + \pi, 1, 1)$.

●●●○

3.9 Faça o que se pede:

(a) Verifique que a equação

$$f(x, y) = x^4y^2 + 5x^2y^4 = 84$$

define uma curva no plano xy na vizinhança do ponto $(1, 2)$.

(b) Encontre uma reta tangente $ax + by = c$ à curva no ponto $(1, 2)$ calculando o gradiente $\nabla f(x, y) = (a, b)$ e substituindo o ponto para obter o valor c.

●●●○

3.10 Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície paramétrica $r(u, v) = (u^2, v^2, uv)$ no ponto $(u, v) = (1, 1)$.

(b) Mostre que a superfície satisfaz $xy - z^2 = 0$. Encontre a equação do plano tangente computando o gradiente no ponto $(1, 1, 1)$.

●●●○

3.11 Verifique que o elipsoide

$$6x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 18$$

e a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

têm o mesmo plano tangente no ponto $(1, 1, 2)$. Faça um gráfico que mostre o elipsoide, a esfera e o plano tangente comum.

●●○○

3.12 Calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se x e y são relacionados por $\operatorname{sen}(y) + \cos(x) = \operatorname{sen}(y)\cos(x)$.

●●●○

3.13 Considere z definida implicitamente por $yz = e^{x+z}$ e calcule as derivadas parciais z_x e z_y.

●●●●

3.14 Faça o que se pede:

(a) Faça um gráfico das curvas de nível da função

$$f(x, y) = y^2(y^2 - 3) - x^2(x^2 - 2).$$

(b) Especialmente faça ao gráfico da curva $f(x, y) = 0$.

(c) Encontre o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$ no ponto

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Esboce um gráfico com a curva de nível, o vetor gradiente e a reta tangente à curva de nível no ponto (x_0, y_0).

●●●●

3.15 Encontre o raio que é a reflexão do raio $r(t) = (t, -t, 2)$ na superfície $z = x^2 + y^2$.

●●○○

3.16 Você está em uma viagem aérea sobre Belém em uma posição $(2, 3)$ e quer evitar uma tempestade em uma região de baixa pressão. A pressão é dada pela função $p(x, y) = 3x^2 + 2y^2$. Em que direção você deve voar de modo que a variação da pressão seja máxima?

●●○○

3.17 Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Calcule para que valores de t, $D_{v(t)} f(0, 0)$ é positivo.

●●●○

3.18 Dada uma função f assuma que a derivada direcional

$$D_v f(1, 1) = 3\sqrt{5}$$

e

$$D_w f(1, 1) = 5\sqrt{5},$$

sendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ e $w = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. Encontre $\nabla f(1, 1)$.

Sugestões

3.1 Note que, a equação da reta tangente à $g(x) = f(x, 2) = \sqrt{8 - 4x^2}$ em $x = 1$ é dada por $z - g(1) = g'(1)(x - 1)$.

3.2 Observe o domínio da função f antes de derivar parcialmente.

3.3 Utilize a regra da cadeia atentando para a multiplicidade das constantes.

3.4 Desenvolva o lado direito da equação dada.

3.5 Observe a continuidade do integrando, condição mais do que suficiente para aplicar o TFC.

3.6 Aplique a regra da cadeia observando o domínio da curva.

3.7 Para $\mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$ basta aplicar a equação do plano tangente $z - f(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$. Ou lembrar que o vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x_0}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x_0}), -1\right)$ é ortogonal à superfície no ponto $\mathbf{x_0}$.

3.8 Defina a função $F(x, y, z)$ e determine ∇F.

3.9 Defina $F(x, y) = f(x, y) - 84$ e aplique o Teorema das Funções Implícitas.

3.10 As derivadas $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial r}{\partial v}$ são paralelas ao plano tangente de r.

3.11 Defina as funções F e G a partir do elipsóide e da esfera respectivamente. Em seguida relacione seus gradientes.

3.12 Defina f a partir da equação e use o Teorema das Funções Implícitas.

3.13 Para satisfazer duas das hipóteses do TFI, tente o ponto $(-2, 1/2, 2)$.

3.14 Utilize a interpretação geométrica de ∇f para determinar a equação da reta tangente. Os gráficos use o software Geogebra.

3.15 Tome o versor $\vec{n}$ do vetor normal e decomponha os vetores incidente $\vec{v}_i$ e refletido $\vec{v}_r$.

3.16 Observe qie p é de classe C^1. E, lembre que $\vec{v} \cdot \nabla f = \|\vec{v}\| \, \|\nabla f\| \cos\theta$.

3.17 Verifique se você pode utilizar $D_{v(t)} f(x, y) = v(t) \cdot \nabla f(x, y)$.

3.18 Suponha $f \in C^1$ e defina $\nabla f(1, 1) = (a, b)$.

Respostas

3.1 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{4-4x^2+y^2}$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ e interprete estes números como inclinações de retas tangentes às funções $g(x) = f(x,2)$ e $h(y) = f(1,y)$. Faça um gráfico mostrando as retas.

Solução: Observe que para pontos (x,y) que não pertencem à hipérbole $x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-4x^2+y^2}}(-8x)\\ &= \frac{-4x}{\sqrt{4-4x^2+y^2}},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-4x^2+y^2}}(2y)\\ &= \frac{y}{\sqrt{4-4x^2+y^2}},\end{aligned}$$

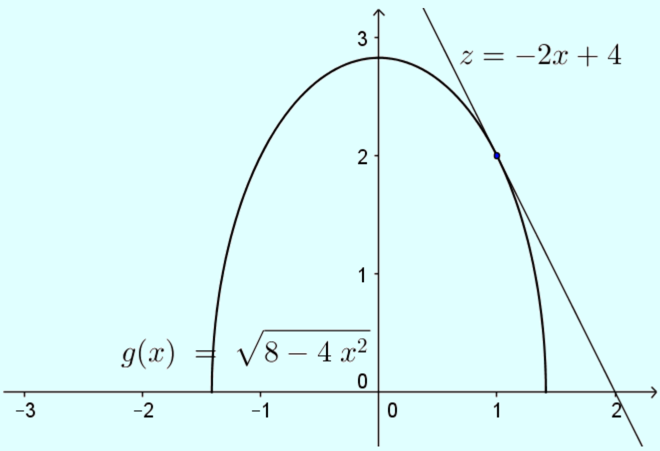
logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1.$$

A equação da reta tangente à $g(x) = f(x,2) = \sqrt{8-4x^2}$ em $x = 1$ dada por $z - g(1) = g'(1)(x-1)$ será

$$\begin{aligned}z - g(1) &= g'(1)(x-1)\\ z - f(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)\\ z - 2 &= -2(x-1)\\ z &= -2x+4.\end{aligned}$$

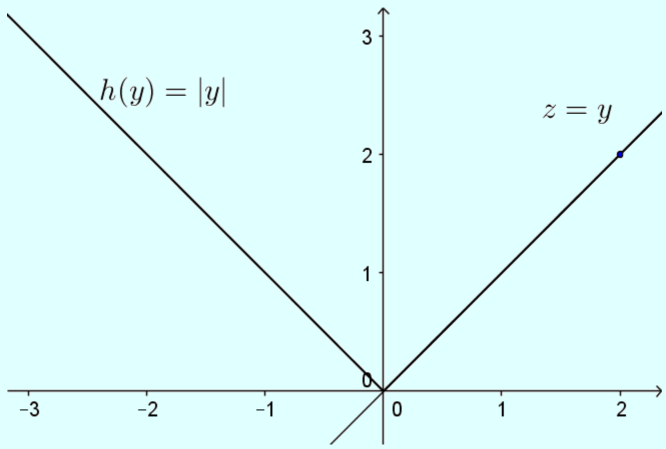
Graficamente temos



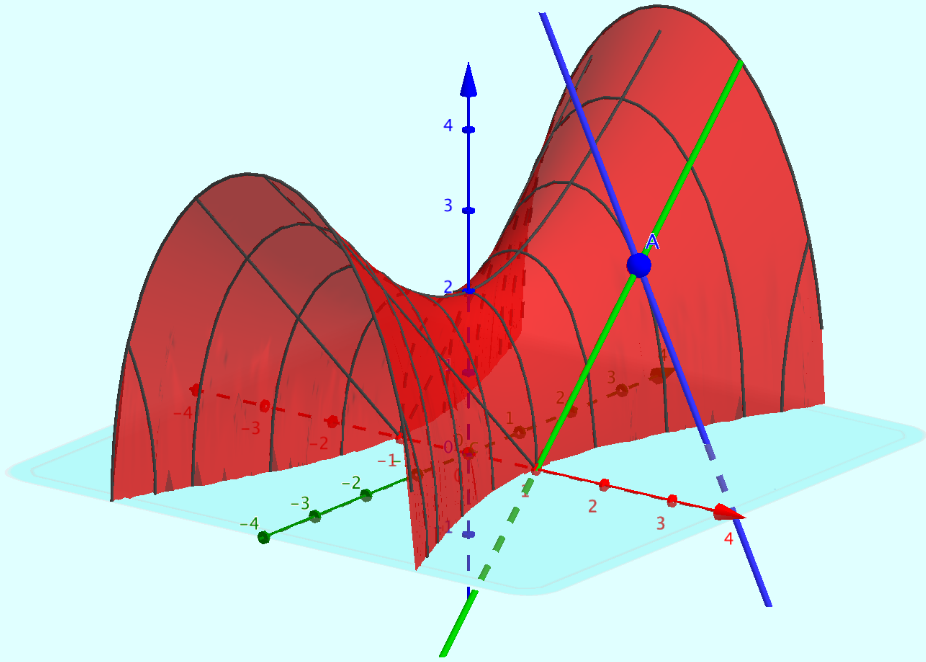
Analogamente, a equação da reta tangente à $h(y) = f(1, y) = \sqrt{y^2} = |y|$ em $y = 2$ dada por $z - h(2) = h'(2)(y - 2)$ será

$$\begin{aligned} z - h(2) &= h'(2)(y-2) \\ z - f(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \\ z - 2 &= 1(y-2) \\ z &= y. \end{aligned}$$

Graficamente temos



No espaço temos



3.2 Encontre as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ da função $f(x, y) = 2x^y$ no ponto $(2, 3)$.

Solução: Para cada y fixo temos

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2yx^{y-1}.$$

Agora, para cada x fixo positivo temos

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x^y \ln x.$$

Então,

$$f_x(2, 3) = 24 \quad \text{e} \quad f_y(2, 3) = 16 \ln(2).$$

3.3 Verifique que a função

$$u(x, t) = e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen} kx$$

é solução da *equação de condução do calor.*

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$$

sendo k e α são constantes.

Solução: Vamos calcular primeiramente a derivada parcial de primeira ordem

$$u_t(x, t) = -\alpha^2 k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen} kx, \tag{3}$$

e depois a derivada parcial de segunda ordem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(x, t) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(x, t) \left[k e^{-\alpha^2 k^2 t} \cos kx \right] \\ &= -k^2 e^{-\alpha^2 k^2 t} \text{sen} kx. \end{aligned} \tag{4}$$

De (3) e de (4) segue diretamente que

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t).$$

3.4 A equação diferencial

$$f_t = f - x f_x - x^2 f_{xx}$$

é um exemplo da famosa equação de Black-Scholes. Aqui $f(x, t)$ é o preço de uma opção de compra, x o preço da ação e t o tempo. Verifique que $f(x, t) = e^t \ln(x)$ resolve esta equação.

Solução: Calculemos

$$f_x(x,t) = \frac{e^t}{x}, \tag{5}$$

$$f_t(x,t) = e^t \ln(x), \tag{6}$$

e

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^t}{x}\right) \\ &= -\frac{e^t}{x^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Observe que da função $f(x,y)$, (5), (6) e (7) temos

$$\begin{aligned} f(x,t) - xf_x(x,t) - x^2 f_{xx}(x,t) &= e^t \ln(x) - x \cdot \frac{e^t}{x} - x^2 \cdot \left(-\frac{e^t}{x^2}\right) \\ &= e^t \ln(x) - e^t + e^t \\ &= e^t \ln(x) \\ &= f_t(x,t). \end{aligned}$$

3.5 Encontre as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ da função

$$f(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

Solução: Calculemos $f_y(x,y)$ primeiramente, ou seja, estamos interessados em encontrar a derivada da função $g(y) = f(x,y) = \int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt$ para cada x fixo. Como o integrando é uma composição de funções contínuas em todo $\mathbb{R}$, temos que $\operatorname{sen}(t^2)$ é uma função contínua em toda a reta. Além disso, pelo fato de estarmos derivando f parcialmente em relação a y, significa que $x \in \mathbb{R}$ é uma constante. Portanto, supondo $P(t)$ uma primitiva de $\operatorname{sen}(t^2)$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que

$$\int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt = P(y) - P(x).$$

Como $P(x)$ é uma constante segue que

$$f_y(x,y) = \frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}\int_x^y \operatorname{sen}(t^2)dt = \frac{d}{dy}\left(P(y) - P(x)\right) = \operatorname{sen}(y^2).$$

Analogamente, $f_x(x,y)$ é facilmente calculada observando a propriedade de integral e definindo $h(x) = f(x,y) = -\int_y^x \text{sen}(t^2)dt$, e lembrando que agora $P(y)$ é uma constante, resulta então

$$f_x(x,y) = \frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_y^x \text{sen}(t^2)dt\right) = \frac{d}{dx}(-P(x) + P(y)) = -\text{sen}(x^2).$$

3.6 Use a regra da cadeia para encontrar a derivada dz/dt, sendo $z = \cos(2x+3y)$, $x(t) = t^3$ e $y(t) = 1/t^2$.

Solução: Definamos $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t^3, 1/t^2)$ que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por outro lado, a função $z(x,y) = \cos(2x+3y)$ possui derivadas parciais

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= -2\text{sen}(2x+3y) \\
\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= -3\text{sen}(2x+3y)
\end{aligned}$$

contínuas em todo $\mathbb{R}^2$ (que é um conjunto aberto), segue então que z é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, e, portanto

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}(\alpha(t)) &= \nabla z(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}(\alpha(t)), \frac{\partial z}{\partial y}(\alpha(t))\right) \cdot (x'(t), y'(t)) \\
&= \left(-2\text{sen}(2t^3 + 3/t^2), -3\text{sen}(2t^3 + 3/t^2)\right) \cdot (3t^2, -2/t^3) \\
&= -6t^2\text{sen}((2t^5+3)/t^2) + \frac{6}{t^3}\text{sen}((2t^5+3)/t^2) \\
&= -6\text{sen}((2t^5+3)/t^2)\left(t^2 - \frac{1}{t^3}\right)
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.7 Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = 2(x+1)^2 + (y-3)^2 + 1$$

no ponto $(1, -1, 25)$.

Solução: Definamos $f(x, y) = 2(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + 1$ e seja $\mathbf{x} = (x, y)$. Sabendo que a equação do plano tangente a f no ponto $\mathbf{x_0} = (1, -1)$ satisfaz

$$\begin{aligned} z - f(\mathbf{x_0}) &= f'(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \\ z - f(\mathbf{x_0}) &= \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \\ z - f(1, -1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \right) \cdot [(x, y) - (1, -1)] \\ z - f(1, -1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \right) \cdot (x - 1, y + 1), \end{aligned}$$

calculemos então,

$$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (4(x + 1), 2(y - 3)).$$

Segue

$$\begin{aligned} z - f(1, -1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \right) \cdot (x - 1, y + 1) \\ z - 25 &= (4(1 + 1), 2(-1 - 3)) \cdot (x - 1, y + 1) \\ z - 25 &= (8, -8) \cdot (x - 1, y + 1) \\ z - 25 &= 8x - 8 - 8y - 8 \\ z &= 8x - 8y + 9. \end{aligned}$$

(b) Encontre a equação do plano tangente à superfície

$$z = \ln(x - 3y)$$

no ponto $(4, 1, 0)$.

Solução: Definamos agora, $g(x, y) = \ln(x - 3y)$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - 3y}; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{3}{x - 3y}.$$

Como cada tripla ordenada (x, y, z) do plano tangente a g ao ponto $(4, 1, 0) = (4, 1, g(4, 1))$ deve satisfazer

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(4, 1), \frac{\partial g}{\partial y}(4, 1), -1 \right) \cdot [(x, y, z) - (4, 1, g(4, 1))] = 0.$$

Segue que a equação do plano tangente será

$$\begin{aligned} (1, -3, -1) \cdot (x - 4, y - 1, z - 0) &= 0 \\ x - 4 - 3y + 3 - z + 0 &= 0 \\ x - 3y - z &= 1. \end{aligned}$$

3.8 Encontre a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x - z - 4\arctan(yz) = 0$ pelo ponto $(1+\pi, 1, 1)$.

Solução: Observe que a superfície em questão é uma superfície de nível da função

$$F(x, y, z) = x - z - 4\arctan(yz)$$

e como o vetor gradiente é ortogonal a superfície de nível no ponto $(1+\pi, 1, 1)$, segue que $\nabla F(1+\pi, 1, 1)$ é o vetor normal do plano tangente e diretor da reta normal. Calculemos

$$\nabla F(x, y, z) = \left(1, -\frac{4z}{1+y^2z^2}, -1 - \frac{4y}{1+y^2z^2}\right)$$

no ponto $(1+\pi, 1, 1)$ fica

$$\nabla F(1+\pi, 1, 1) = (1, -2, -3).$$

Daí, a equação do plano tangente será dada por

$$\begin{aligned}
\nabla F(1+\pi, 1, 1) \cdot (x - 1 - \pi, y - 1, z - 1) &= 0 \\
(1, -2, -3) \cdot (x - 1 - \pi, y - 1, z - 1) &= 0 \\
x - 1 - \pi - 2y + 2 - 3z + 3 &= 0 \\
x - 2y - 3z &= \pi - 4.
\end{aligned}$$

E, a equação da reta normal é

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= (1+\pi, 1, 1) + \lambda \nabla F(1+\pi, 1, 1) \\
&= (1+\pi, 1, 1) + \lambda(1, -2, -3).
\end{aligned}$$

3.9 Faça o que se pede:

(a) Verifique que a equação

$$f(x, y) = x^4y^2 + 5x^2y^4 = 84$$

define uma curva no plano xy na vizinhança do ponto $(1, 2)$.

Solução: Defina $F(x, y) = f(x, y) - 84$ e observe que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, pois

$$\nabla F(x, y) = \nabla f(x, y) = (4x^3y^2 + 10xy^4, 2x^4y + 20x^2y^3)$$

é contínuo em $\mathbb{R}^2$. Além disso, $F(1, 2) = 0$ e $F_y(1, 2) = 164 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema das Funções Implícitas existe uma curva $(x, y(x))$ definida na vizinhança de $(1, 2)$ diferenciável com $y(1) = 2$.

(b) Encontre uma reta tangente $ax + by = c$ à curva no ponto $(1, 2)$ calculando o gradiente $\nabla f(x, y) = (a, b)$ e substituindo o ponto para obter o valor c.

Solução: Temos que $\nabla f(1, 2) = (176, 164) = (a, b)$, logo no ponto $(1, 2)$ a equação da reta tangente satisfaz

$$\begin{aligned} 176 \cdot 1 + 164 \cdot 2 &= c \\ 504 &= c, \end{aligned}$$

que resulta em

$$176x + 164y = 504.$$

3.10 Faça o que se pede:

(a) Encontre a equação do plano tangente à superfície paramétrica $r(u, v) = (u^2, v^2, uv)$ no ponto $(u, v) = (1, 1)$.

Solução: Iremos determinar um vetor normal $\vec{n}$ ao plano tangente de r por intermédio das derivadas parciais

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = (2u, 0, v) \text{ e } \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = (0, 2v, u),$$

porque $\frac{\partial r}{\partial u}(1, 1)$ e $\frac{\partial r}{\partial v}(1, 1)$ são paralelos a esse plano tangente. Para tanto, faça

$$\vec{n} = \frac{\partial r}{\partial u}(1, 1) \times \frac{\partial r}{\partial v}(1, 1) = (2, 0, 1) \times (0, 2, 1) = (-2, -2, 4).$$

Seja (x, y, z) pertencente ao plano tangente, logo

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot [(x, y, z) - (1, 1, r(1, 1))] &= 0 \\ (-2, -2, 4) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) &= 0 \\ -2x - 2y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

(b) Mostre que a superfície satisfaz $xy - z^2 = 0$. Encontre a equação do plano tangente computando o gradiente no ponto $(1, 1, 1)$.

Solução: Seja $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = uv$. Claramente

$$u^2 \cdot v^2 - (uv)^2 = xy - z^2 = 0.$$

Definamos $F(x, y, z) = xy - z^2$ que é diferenciável, e, nos diz que r é uma parametrização da superfície de nível $F(x, y, z) = 0$. Da interpretação geométrica do

$$\nabla F(x, y, z) = (y, x, -2z)$$

resulta que o plano tangente a r no ponto $(1, 1, r(1, 1)) = (1, 1, 1)$ obedece

$$\begin{aligned} \nabla F(1,1,1) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] &= 0 \\ (1, 1, -2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) &= 0 \\ x + y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

3.11 Verifique que o elipsóide

$$6x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 18$$

e a esfera

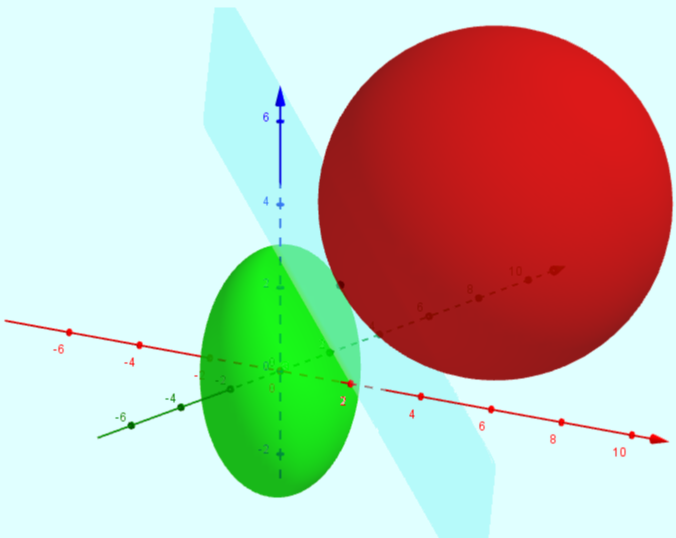
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

têm o mesmo plano tangente no ponto $(1, 1, 2)$. Faça um gráfico que mostre o elipsóide, a esfera e o plano tangente comum.

Solução: Sejam $F(x, y, z) = 6x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 18$ e $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 17$ que são diferenciáveis, pois são de classe C^1. Por outro lado, $\nabla F(x, y, z) = (12x, 8y, 4z)$ e $\nabla G(x, y, z) = (2x - 8, 2y - 6, 2z - 8)$. Como $(1, 1, 2)$ é um ponto em comum, pois $F(1, 1, 2) = 0 = G(1, 1, 2)$ e como $\nabla F(1, 1, 2) = -2\nabla G(1, 1, 2) = (12, 8, 8)$ segue que o plano tangente é o mesmo, a saber

$$3x + 2y + 2z = 9.$$

Veja o gráfico



3.12 Calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se x e y são relacionados por $\operatorname{sen}(y)+\cos(x)=\operatorname{sen}(y)\cos(x)$.

Solução: A função $f(x,y)=\operatorname{sen}(y)+\cos(x)-\operatorname{sen}(y)\cos(x)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(y)-\cos(y)\cos(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Além disso,

$$f\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\operatorname{sen}(0)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+0-0=0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\cos(0)-\cos(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-0=1\neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema das Funções Implícitas a equação $\operatorname{sen}(y)+\cos(x)=\operatorname{sen}(y)\cos(x)$ define implicitamente uma função $y=y(x)$ derivável e

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}=-\frac{\operatorname{sen}(x)(-1+\operatorname{sen}(y))}{\cos(y)(1-\cos(x))}.$$

3.13 Considere z definida implicitamente por $yz=e^{x+z}$ e calcule as derivadas parciais z_x e z_y.

Solução: Sendo $F(x,y,z)=yz-e^{x+z}$ diferenciável porque é de classe C^1. E, no ponto $(-2,1/2,2)$ temos que F é nula e F_z não, então pelo TFI existe uma única função $z=z(x,y)$ diferenciável tal que

$$z_x(x,y)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{-e^{x+z}}{y-e^{x+z}}$$

e

$$z_y(x,y)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{z}{y-e^{x+z}}.$$

3.14 Faça o que se pede:

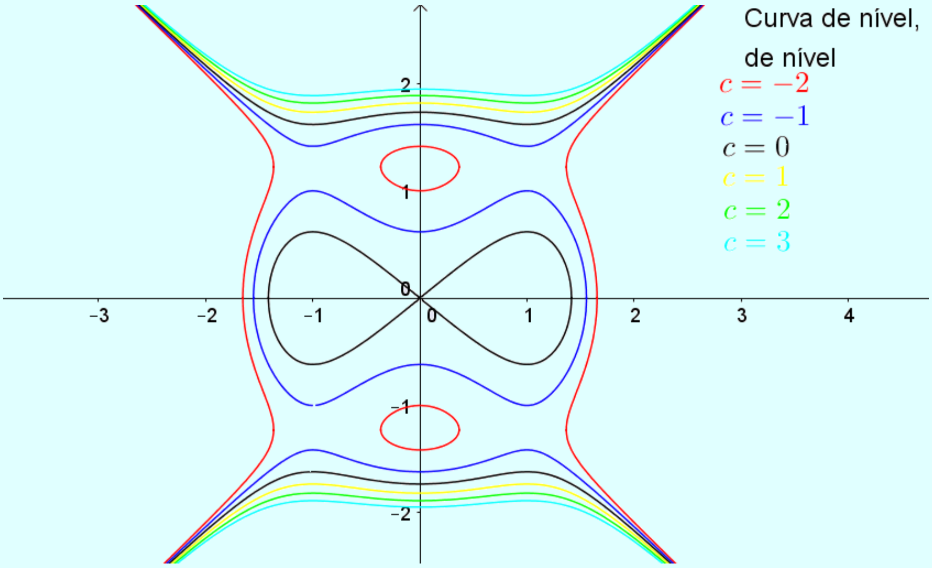
(a) Faça um gráfico das curvas de nível da função

$$f(x,y)=y^2(y^2-3)-x^2(x^2-2).$$

Solução: É fácil ver que a imagem de f é a reta toda, basta olhar cada eixo do plano cartesiano. Sendo assim, seja $c\in\mathbb{R}$, faça

$$y^2(y^2-3)-x^2(x^2-2)=c.$$

Seguem algumas curvas de nível

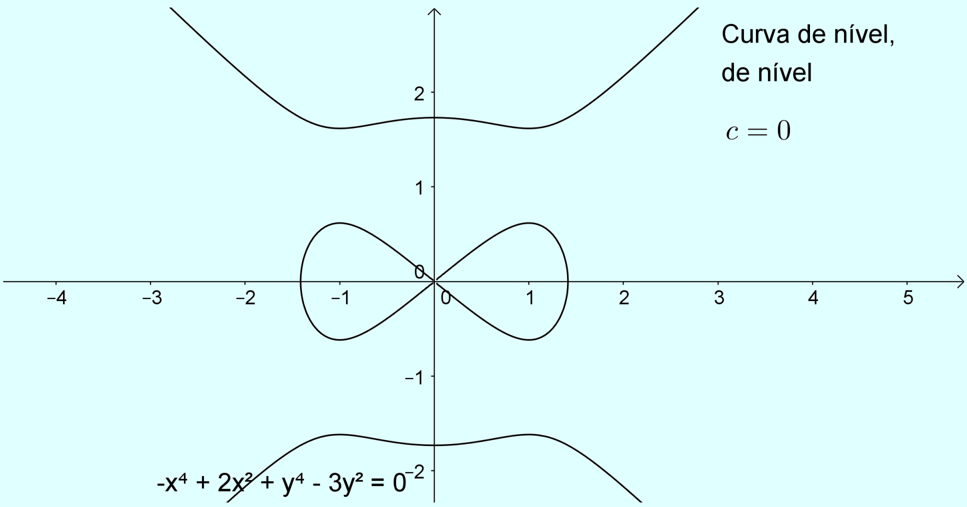


(b) Especialmente faça o gráfico da curva $f(x, y) = 0$.

Solução: Para $c = 0$, temos

$$\begin{aligned} y^2(y^2 - 3) - x^2(x^2 - 2) &= 0 \\ y^4 - 3y^2 - x^4 + 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Segue figura da curva



(c) Encontre o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$ no ponto

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Esboce um gráfico com a curva de nível, o vetor gradiente e a reta tangente à curva de nível no ponto (x_0, y_0).

Solução: Temos que

$$\nabla f(x, y) = (-4x^3 + 4x, 4y^3 - 6y),$$

então

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}\sqrt{5}, -\frac{5}{2} \right).$$

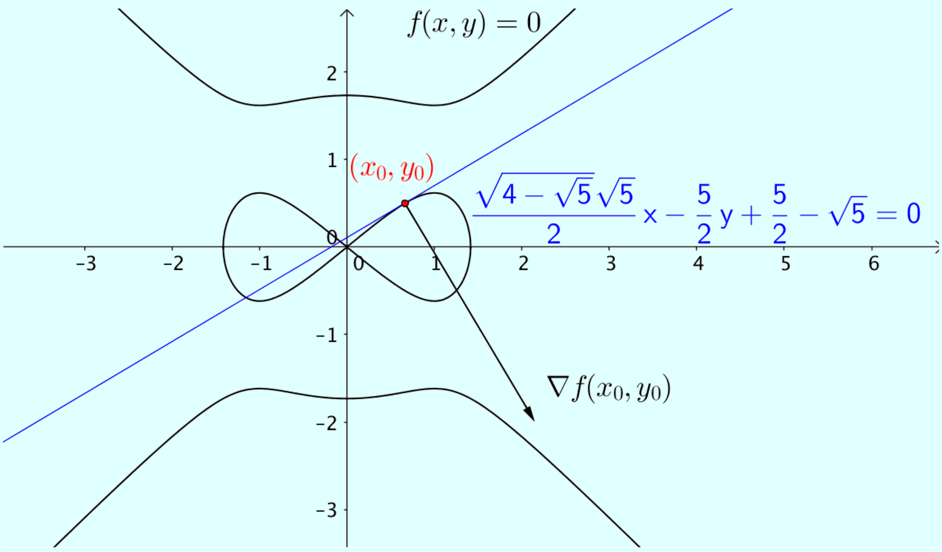
Note que (x_0, y_0) pertente à curva de nível de nível $c = 0$. E, por fim a equação da reta tangente à curva $f(x, y) = 0$ no ponto (x_0, y_0) será dada por

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}\sqrt{5}, -\frac{5}{2} \right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}, y - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{4 - \sqrt{5}}}{2}\sqrt{5}x - \frac{5}{2}y + \frac{5}{2} - \sqrt{5} = 0.$$

Veja a figura



3.15 Encontre o raio que é a reflexão do raio $r(t) = (t, -t, 2)$ na superfície $z = x^2 + y^2$.

Solução: Defina $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Queremos encontrar o raio que reflete no paraboloide formando o mesmo ângulo que $r(t)$ forma com a reta normal à superfície $f(x, y, z) = 0$ no ponto de interseção dos raios com essa superfície de nível. Então, primeiramente encontramos esse ponto onde a reta intercepta $z = x^2 + y^2$. De $r(t) = (t, -t, 2) = (x(t), y(t), z(t))$, segue que

$$2 = t^2 + (-t)^2 \Rightarrow t = \pm 1.$$

Observe na figura a orientação do raio (de fácil verificação substituindo distintos valores de t e constatando o sentido que os valores $r(t)$ indicam). Ou seja, o primeiro ponto de interseção é para $t = -1$, $P = (-1, 1, 2)$. Agora, vamos determinar a reta normal no ponto P. Para tanto, calcule

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \Rightarrow \nabla f(P) = (-2, 2, -1)\,.$$

Logo o vetor normal unitário no ponto P é

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Podemos decompor o vetor incidente $\vec{v}_i = (1, -1, 0)$ do raio $r(t)$ como $\vec{v}_i = (\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n})$ e o vetor refletido $\vec{v}_r$ será então

$$\vec{v}_r = -(\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v}_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n}) = \vec{v}_i - 2(\vec{v}_i \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

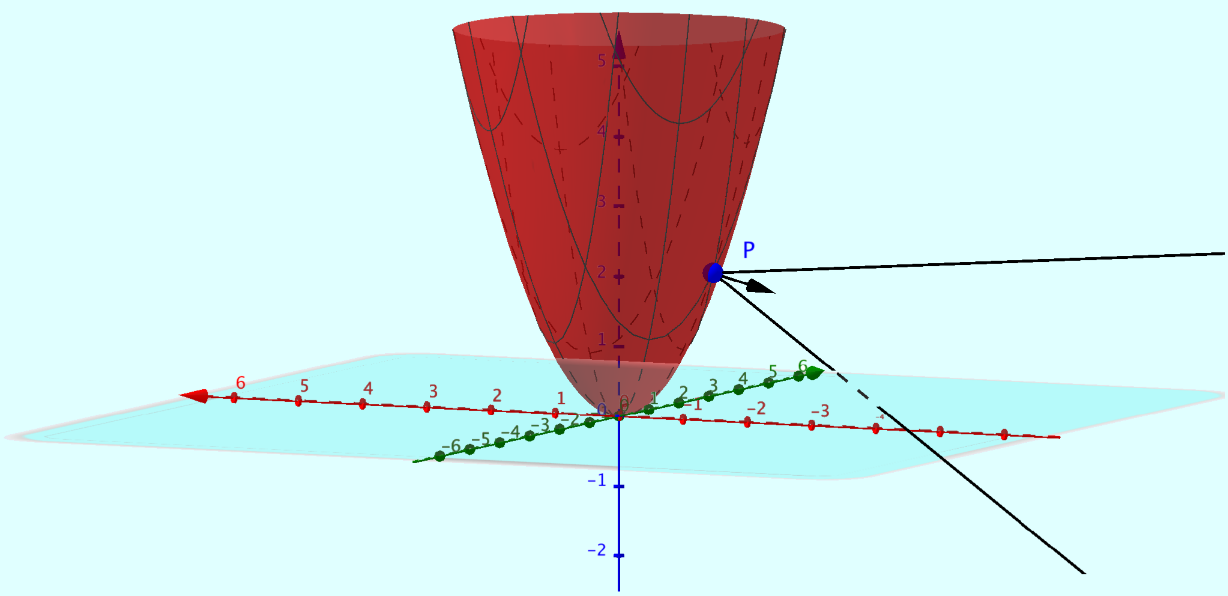
Como $\vec{v}_i \cdot \vec{n} = -\frac{4}{3}$ teremos

$$\vec{v}_r = (1, -1, 0) - 2\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right).$$

O raio refletido $s(t)$, $-1 \leq t \leq +\infty$ normalizado em $s(-1) = P$ será

$$s(t) = \left(-\frac{16}{9}, \frac{16}{9}, \frac{10}{9}\right) + t\left(-\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{8}{9}\right) = \left(-\frac{16 + 7t}{9}, \frac{16 + 7t}{9}, \frac{10 - 8t}{9}\right).$$

O gráfico da solução será



3.16 Você está em uma viagem aérea sobre Belém em uma posição $(2,3)$ e quer evitar uma tempestade em uma região de baixa pressão. A pressão é dada pela função $p(x,y) = 3x^2 + 2y^2$. Em que direção você deve voar de modo que a variação da pressão seja máxima?

Solução: Sabemos que a taxa de variação da pressão numa direção $\vec{v} = (a,b)$ é dada pela derivada direcional no ponto $(2,3)$ (supondo $\vec{v}$ unitário),

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{p(2+at, 3+bt) - p(2,3)}{t}.$$

Como p é uma função de classe C^1, é verdade que

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) &= \vec{v} \cdot \nabla f(2,3) \\ &= \|\vec{v}\| \; \|\nabla f(2,3)\| \cos\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

sendo θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\nabla f(2,3)$. As normas são não negativas, obviamente $\dfrac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3)$ atingirá seu máximo quando $\theta = 0$. Como $\|\vec{v}\| = 1$ e de (8) temos

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) = \|\nabla f(2,3)\|, \tag{9}$$

isto é, a variação máxima será na direção do gradiente. De $\nabla p(x,y) = (6x, 4y)$ e de (9) resulta

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{v}}(2,3) = \|(6\cdot 2, 4\cdot 3)\| = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2},$$

e a direção é a do vetor $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.17 Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Calcule para que valores de t, $D_{v(t)} f(0,0)$ é positivo.

Solução: Observe que f é de classe C^1. Vale então

$$D_{v(t)} f(x,y) = v(t) \cdot \nabla f(x,y).$$

Para $(x,y) = (0,0)$. Segue que

$$D_{v(t)} f(0,0) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \cdot (2\cdot 0, -2\cdot 0) = 0,$$

pois $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$. Daí, temos que $\forall t \in \mathbb{R}$, $D_{v(t)} f(0,0)$ não será positivo.

3.18 Dada uma função f assuma que a derivada direcional

$$D_v f(1,1) = 3\sqrt{5}$$

e

$$D_w f(1,1) = 5\sqrt{5},$$

sendo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $w = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Encontre $\nabla f(1,1)$.

Solução: Sejam $P = (1,1)$ e $\nabla f(P) = (a,b)$. Suponha f de classe C^1. Essa suposição é necessária para que com apenas as hipóteses fornecidas possamos de fato encontrar $\nabla f(P)$. Já que a existência da derivada de f no ponto não garante a diferenciabilidade da mesma, logo não poderiámos ter necessariamente

$$D_v f(P) = v \cdot \nabla f(P).$$

De posse dessa hipótese, podemos fazer

$$D_v f(P) = v \cdot \nabla f(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot (a,b)$$

e

$$D_w f(P) = w \cdot \nabla f(P) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot (a,b).$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{5}} + \dfrac{2b}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \\ \\ \dfrac{2a}{\sqrt{5}} + \dfrac{b}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5} \end{cases}$$

teremos

$$\nabla f(P) = (a,b) = \left(\frac{35}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Integrais múltiplas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Cálculo de integrais duplas e triplas;
- Teorema de Fubini;
- Mudança de ordem de integração;
- Mudança de variável em integrais múltiplas.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável;
- Mudança de variável em integral de funções de uma variável;
- Sólidos geométricos;
- Coordenadas polares.

Métodos e Técnicas

Teorema de Fubini.	• Nas questões abaixo, utiliza-se o Teorema de Fubini para calcular as integrais múltiplas. **Exercícios 4.3 e 4.4** • Nas questões abaixo, aplica-se a ideia de inversão de ordem de integração. **Exercícios 4.1 e 4.2**
Mudança de variáveis	• Nas questões abaixo, usa-se a mudança de variável de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para resolver as integrais iteradas. **Exercícios 4.1, 4.3, 4.4, 4.6 e 4.8** • Nas questões abaixo, usa-se a mudança de variáveis para coordenadas polares para resolver as integrais múltiplas. **Exercícios 4.5 e 4.8**

●○○○ **4.1** Considere o triângulo $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$. Calcule a integral

$$\iint_T e^{-x^2} dxdy.$$

Desenhe o domínio T.

●●○○ **4.2** Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dydx.$$

Desenhe a região de integração. Troque a ordem de integração e calcule a integral novamente.

●●○○ **4.3** Calcule $\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^2 (x + y)e^{x^2+2xy} dydx.$

●●○○ **4.4** Considere a região $R = [1, 2] \times [1, 2]$. Calcule a integral

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} dxdy.$$

●●●○ **4.5** Calcule a integral de

$$f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$$

sobre o disco unitário $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

●●○○ **4.6** Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{2y} ze^{-y^2} dxdydz.$$

●●●● **4.7** Calcule a integral de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ sobre o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 4)$.

●●●○ **4.8** Calcule

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 x^2 y dydx$$

usando coordenadas polares.

Sugestões

4.1 Integre primeiramente em relação à y.

4.2 Atente que ao mudar a ordem de integração a variável x varia de 0 à duas funções distintas, portanto utilize a propriedade $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

4.3 Reescreva o integrando como $\frac{1}{2}(2x + 2y)e^{x^2+2xy}$ e observe a $\frac{\partial\left(e^{x^2+2xy}\right)}{\partial x}$.

4.4 Em cada iterada aplique uma simples mudança de variável.

4.5 Use a mudança polar e simplifique a expressão utilizando a relação fundamental da trigonometria.

4.6 Note que $\left(e^{-y^2}\right)' = -2ye^{-y^2}$.

4.7 Desenhe o tetraedro e identifique a variação de x, y e z que descreve o sólido.

4.8 A região encontra-se no quarto quadrante, isto é, pode-se usar $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ como novos limites de integração.

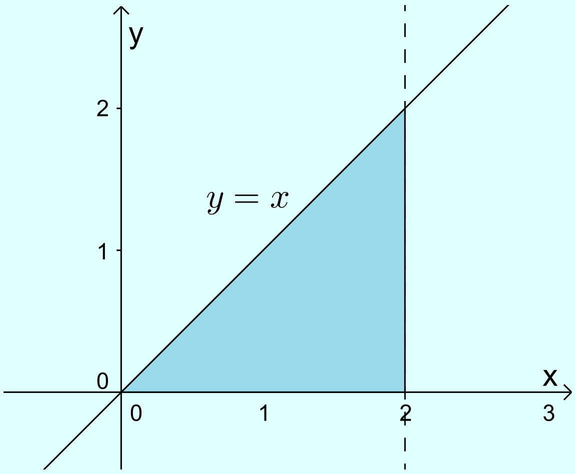
Respostas

4.1 Considere o triângulo $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$. Calcule a integral

$$\iint_T e^{-x^2} dxdy.$$

Desenhe o domínio T.

Solução: Temos que T é a região



Segue

$$\begin{aligned}
\iint_T e^{-x^2} dxdy &= \int_0^2 \int_0^x e^{-x^2} dydx = \int_0^2 \left[e^{-x^2} y\right]_0^x dx \\
&= \int_0^2 e^{-x^2} (x - 0)\, dx = \int_0^{-4} e^u \left(-\frac{du}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-4}^0 e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-4}^0 = \frac{1 - e^{-4}}{2}.
\end{aligned}$$

4.2 Calcule a integral

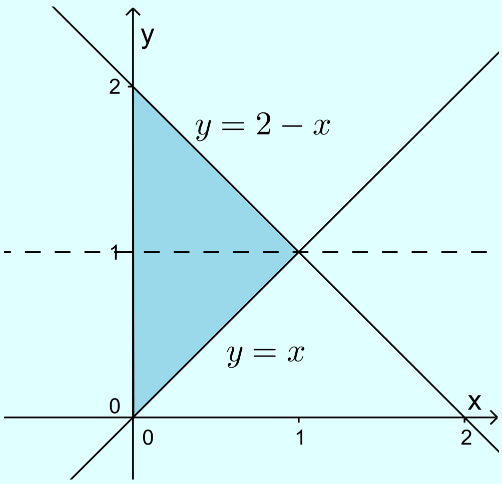
$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dydx.$$

Desenhe a região de integração. Troque a ordem de integração e calcule a integral novamente.

Solução: Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)dydx &= \int_0^1 \left[x^2y - \frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2[(2-x) - x] - \frac{[(2-x)^2 - x^2]}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 [-2x^3 + 2x^2 + 2x - 2]dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^2 - 2x\right]_0^1 = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Tendo em vista que



Vemos que podemos descrever a região como

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 - y, 1 \leq y \leq 2\}$$

Daí, mudamos a ordem de integração e integramos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)dydx &= \int_0^1 \int_0^y (x^2 - y)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 - y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy\right]_0^y dy + \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} - xy\right]_0^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{[y^3 - 0^3]}{3} - [y - 0]y\right) dy \\
&+ \int_1^2 \left(\frac{[(2-y)^3 - 0^3]}{3} - [(2-y) - 0]y\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} - y^2\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{(2-y)^3}{3} - 2y + y^2\right) dy = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

4.3 Calcule $\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^2 (x+y)e^{x^2+2xy}\,dydx.$

Solução: Podemos escrever

$$\int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^2 (x+y)e^{x^2+2xy}\,dydx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 \int_0^1 (2x+2y)e^{x^2+2xy}\,dxdy.$$

Da última integral dupla e do fato de que

$$\frac{\partial\left(e^{x^2+2xy}\right)}{\partial x} = (2x+2y)e^{x^2+2xy}$$

pela regra da cadeia. Ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 \int_0^1 (2x+2y)e^{x^2+2xy}\,dxdy &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 \left[e^{x^2+2xy}\right]_0^1 dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^2 (e^{1+2y}-1)dy\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{1+2y}-y\right]_{-\frac{1}{2}}^2\\ &= \frac{e^5}{4}-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

4.4 Considere a região $R = [1,2]\times[1,2]$. Calcule a integral

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy.$$

Solução: Temos que

$$\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy = \int_1^2\left[\int_1^2 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx\right]dy.$$

Na integral entre colchetes, faremos a mudança

$$u = x^2+y^2-1 \;\Rightarrow\; du = 2xdx \text{ e quando } x=1 \;\Rightarrow\; u=y^2 \text{ e } x=2 \;\Rightarrow\; u=y^2+3.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx &= \int_{y^2}^{y^2+3} \frac{y}{\sqrt{u}}\frac{du}{2}\frac{y}{2}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_{y^2}^{y^2+3} \\
&= \frac{y}{2}\left[2\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{y^2}\right] \\
&= y\sqrt{y^2+3}-y^2.
\end{aligned}$$

Segue então

$$\begin{aligned}
\int_1^2\left[\int_1^2 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx\right]dy &= \int_1^2\left(y\sqrt{y^2+3}-y^2\right)dy \\
&= \int_1^2 y\sqrt{y^2+3}dy - \int_1^2 y^2dy \\
&= \int_1^2 y\sqrt{y^2+3}dy - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Nessa última integral faremos a seguinte mudança

$$v = y^2+3 \;\Rightarrow\; dv = 2ydy \text{ e quando } y = 1 \;\Rightarrow\; v = 4 \text{ e } y = 2 \;\Rightarrow\; v = 7.$$

Resulta então

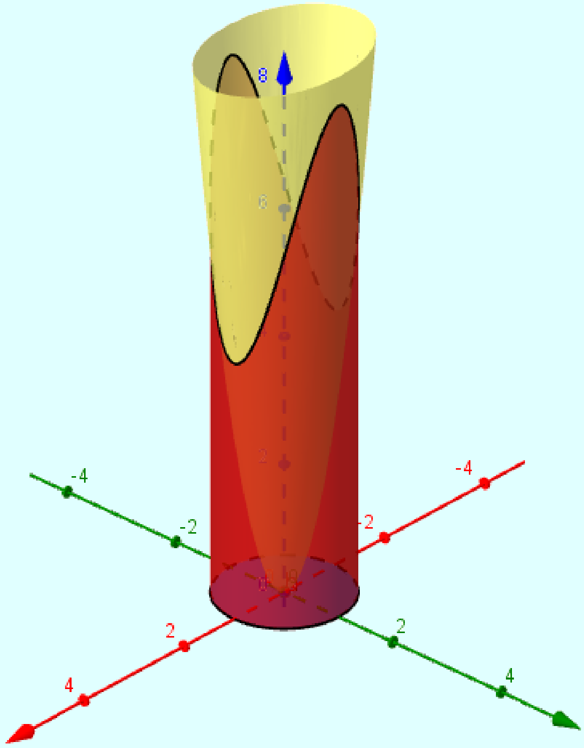
$$\begin{aligned}
\int_1^2 y\sqrt{y^2+3}dy - \frac{7}{3} &= \int_4^7 \sqrt{v}\frac{dv}{2} - \frac{7}{3} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_4^7 - \frac{7}{3} \\
&= \frac{1}{3}(7\sqrt{7}-8) - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

4.5 Calcule a integral de

$$f(x,y) = 4x^2+8y^2$$

sobre o disco unitário $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Solução: Essa integral equivale a calcular o volume do sólido delimitado pelo parabolóide hiperbólico e pelo cilindro acima do plano xy



Observe que o disco unitário D pode ser descrito em coordenadas polares da seguinte forma

$$D_{r\theta} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

sendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Sabendo que o jacobiano da mudança polar é r, temos que

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_{r\theta}} f(r, \theta)r\,dr\,d\theta.$$

Fazendo

$$f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = 4\,(r\cos\theta)^2 + 8\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 4r^2(2 - \cos^2\theta).$$

Segue então

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^3(2 - \cos^2\theta)d\theta dr \\
&= \int_0^1 4r^3 \left[\frac{4\theta - \left(\theta - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\theta\right)}{2}\right]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_0^1 4r^3[3\pi - 0]dr = 12\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 3\pi.
\end{aligned}$$

4.6 Calcule a integral

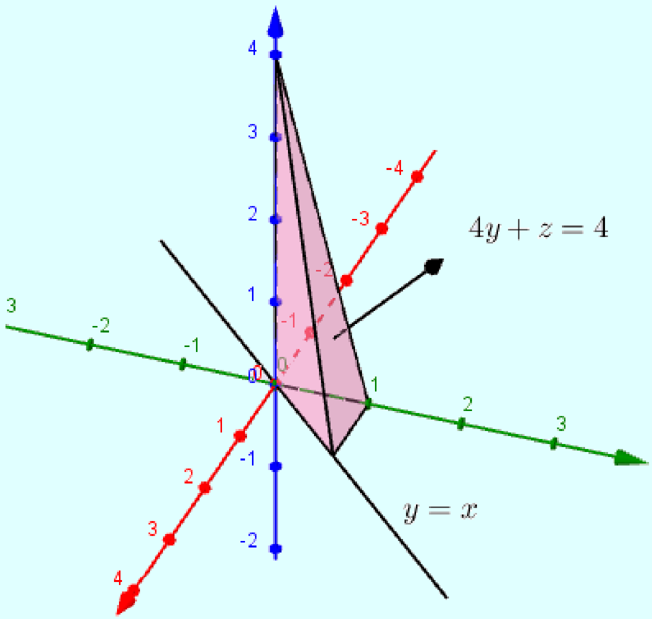
$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{2y} ze^{-y^2} dxdydz.$$

Solução: Pelo Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^z \int_0^{2y} ze^{-y^2} dxdydz &= \int_0^1 \int_0^z ze^{-y^2} \int_0^{2y} dxdydz = \int_0^1 \int_0^z ze^{-y^2}(2y-0)dydz \\
&= \int_0^1 \int_0^z ze^{-y^2} 2ydydz = \int_0^1 z\left[-e^{-y^2}\right]_0^z dz \\
&= \int_0^1 (z - ze^{-z^2})dz = \left[\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-z^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1} - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1}.
\end{aligned}$$

4.7 Calcule a integral de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ sobre o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 4)$.

Solução: O tetraedro



pode ser descrito como

$$T = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1 \text{ e } 0 \le z \le 4 - 4y\},$$

conseguimos então

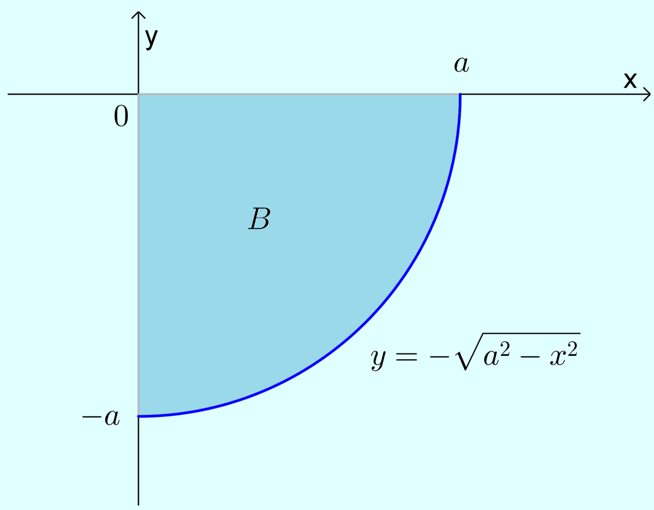
$$\begin{aligned}
\iiint_T f(x,y,z)dV &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{4-4y} (x^2 + y^2 - z)dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left[x^2 z + y^2 z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{4-4y} dydx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left[x^2(4-4y) + y^2(4-4y) - \frac{(4-4y)^2}{2}\right] dydx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 (4x^2 + (16-4x^2)y - 4y^3 - 4y^2 - 8)dydx \\
&= \int_0^1 \left[4x^2 y + (16-4x^2)\frac{y^2}{2} - y^4 - \frac{4}{3}y^3 - 8y\right]_x^1 dx \\
&= \int_0^1 (3x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 8x - \frac{7}{3})dx \\
&= \left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - \frac{7}{3}x\right]_0^1 = -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

4.8 Calcule

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 x^2 y dydx$$

usando coordenadas polares.

Solução: A região de integração, para $a > 0$, é ilustrada abaixo



Fazendo a mudança polar

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

temos que a região de integração no plano $r\theta$ fica

$$B_{r\theta} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a \text{ e } 3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 x^2 y\,dy\,dx &= \int_0^a \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r\cos\theta)^2 r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^a \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^a r^4\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} dr = \int_0^a -\frac{r^4}{3}[1-0]dr \\ &= -\frac{1}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = -\frac{a^5}{15}. \end{aligned}$$

Aplicações

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Máximos e mínimos de uma função de várias variáveis;
- Teorema do valor extremo e o teste da segunda derivada;
- Regra da cadeia;
- Cálculo de área por integração múltipla;
- Cálculo de volume por integração múltipla;
- Massa, centro de massa e momento de inércia.

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Geometria espacial;
- Trigonometria;
- Derivadas parciais;
- Cálculo de integrais duplas e triplas: Teorema de Fubinni e mudança de variáveis;
- Inversão da ordem de integração.

Métodos e Técnicas

Regra da cadeia	• Nos exercícios abaixo, utilizamos a regra da cadeia para determinar a taxa de variação de funções compostas. **Exercícios 5.1 e 5.2**
Teste da segunda derivada	• Nas questões abaixo, classificamos os pontos críticos como ponto de máximo, ponto de mínimo ou ponto de sela calculando o Hessiano e a segunda derivada parcial de f com realação à x em cada ponto. **Exercícios 5.3, 5.4 e 5.5** • Nas questões abaixo, minimizamos a função de várias variáveis sobre uma dada curva transformando o problema numa função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e estudando a mesma. **Exercícios 5.6 e 5.7**
Teorema de Fubini	• Utiliza-se o Teorema de Fubini para calcular as integrais que determinam o volume do sólido. **Exercício 5.8** • No exercício que segue, usa-se o Teorema de Fubini no cálculo de integrais que determinam a massa do sólido. **Exercício 5.14**

Mudança de variáveis: coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

- Na questão abaixo utilizamos a mudança de variáveis para coordenadas polares no cálculo de área.

Exercício 5.9

- Nas questões abaixo, utiliza-se a mudança cilíndrica para o cálculo de volume e de massa.

Exercícios 5.10, 5.12, 5.13 e 5.14

- No exercício abaixo, utiliza-se mudança esférica para o cálculo do volume do sólido dado.

Exercício 5.11

●●○○ **5.1** O raio da base de um cilindro circular reto cresce a uma taxa de variação de $1,2$ enquanto a altura decresce a uma taxa de variação de $2,2$. Qual a taxa de variação do volume do cilindro quando a altura é 90 e o raio da base é 40?

●●○○ **5.2** A voltagem V em um circuito elétrico simples está decaindo lentamente de acordo com o descarregamento da bateria. A resistência R aumenta lentamente com o aquecimento do resistor. Use a lei de Ohm, $V = IR$, para encontrar como a corrente I está variando no instante em que $R = 200$, $I = 0,08$, $dV/dt = -0,02$ e $dR/dt = 0,01$.

●●●● **5.3** Encontre e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{y^3}{3} + y$. Faça um gráfico onde todos os pontos críticos apareçam.

●●●○ **5.4** Encontre todos os pontos críticos de $f(x,y) = 1 - x^3 - 2y^2 + 3x + y^4$ e determine se são pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

●●●○ **5.5** Encontre todos os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ no plano e classifique-os. Existe um máximo global ou mínimo global entre eles?

●●●○ **5.6** Minimize a função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre o gráfico da curva $x + y^2 = 1$.

●●●○ **5.7** Encontre a distância mais curta da origem a curva $x^6 + 3y^2 = 1$.

●●○○ **5.8** Encontre o volume do sólido limitado acima pela superfície $z = x^2 + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [-2,2] \times [-2,4]$.

●●●● **5.9** Calcule a area da região limitada pelas curvas: a curva polar $r(\theta) = \theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; e pelo eixo x positivo.

●●●○ **5.10** Encontre o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^4$ e $z^2 \leq 1$. Esboce o gráfico deste sólido.

●●●●

5.11 Um sólido é descrito em coordenadas esféricas por $r \leq \operatorname{sen}\phi$. Calcule seu volume.

●●●○

5.12 Calcule o volume do sólido limitado por $z = 2r$, $r = 1 - \cos\theta$ e $z = 0$. Esboce o sólido.

●●●○

5.13 Um buraco cilíndrico de raio de 1 milímetro é perfurado através do centro de uma bola sólida (o centro sobre o eixo do cilindro) com raio de 2 milímetros. Calcule o volume do sólido que permanece após a retirada.

●●●○

5.14 A densidade ρ do corpo dado por

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1; -1 \leq z \leq 1\}$$

é dado por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2$. Encontre sua massa

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z)dxdydz$$

Sugestões

5.1 Com o volume V em função do raio r e da altura h, sendo cada um destes funções do tempo t, aplica-se a regra da cadeia.

5.2 Isole $\frac{dI}{dt}$ após aplicada a regra da cadeia.

5.3 Aplique o teste da segunda derivada. Para o esboço do sólido use o Geogebra.

5.4 Note que existem 6 pontos críticos de f.

5.5 Sendo $\alpha(t) = (t, t)$ calcule o limite de $f \circ \alpha$ quando $t \to \pm\infty$.

5.6 Defina $h(x) = f(x, y^2)$ e estude seu comportamento.

5.7 Considere $f(x, y) = x^2 + y^2$ e estude o comportamento de $h(x) = f(x, y^2)$, sendo y^2 da curva dada.

5.8 Observe que acima do plano xy $f > 0$.

5.9 Mude as variáveis para coordenadas polares.

5.10 Faça a mudança cilíndrica.

5.11 Para identificar o sólido fixe $\theta = 0$ e reescreva em coordenadas cartesianas a equação $r = \text{sen}\phi$.

5.12 Observe que a questão considera coordenadas cilídricas.

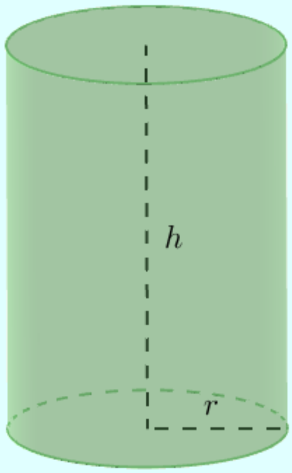
5.13 O volume procurado é $V = V_2 - V1$, em que V_1 é o volume do sólido retirado (faça por cilíndricas), e V_2 é o volume da esfera.

5.14 Tente reescrever o sólido utilizando coordenadas cilíndricas.

Respostas

5.1 O raio da base de um cilindro circular reto cresce a uma taxa de variação de 1, 2 enquanto a altura decresce a uma taxa de variação de 2, 2. Qual a taxa de variação do volume do cilindro quando a altura é 90 e o raio da base é 40?

Solução: O volume do cilindro



é dado por $V = \pi r^2 h$. Queremos obter a taxa de variação do volume, $\dfrac{dV}{dt}$, para tanto, aplicamos a regra da cadeia como segue

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}\\ &= 2\pi r h\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}\end{aligned}$$

quando $h = 90$, $r = 40$, $\dfrac{dr}{dt} = 1,2$ e $\dfrac{dh}{dt} = -2,2$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2\pi 40 \cdot 90 \cdot 1,2 + \pi 40^2(-2,2)\\ &= 8640\pi - 3520\pi\\ &= 5120\pi.\end{aligned}$$

5.2 A voltagem V em um circuito elétrico simples está decaindo lentamente de acordo com o descarregamento da bateria. A resistência R aumenta lentamente com o aquecimento do resistor. Use a lei de Ohm, $V = IR$, para encontrar como a corrente I está variando no instante em que $R = 200$, $I = 0,08$, $dV/dt = -0,02$ e $dR/dt = 0,01$.

Solução: Aplicando a regra da cadeia em $V = IR$

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt}\\ &= R\frac{dI}{dt} + I\frac{dR}{dt},\end{aligned}$$

isolando $\frac{dI}{dt}$ e substituindo os valores, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{1}{R}\left(\frac{dV}{dt} - I\frac{dR}{dt}\right)\\ &= \frac{1}{200}\left(-0,02 - 0,08 \cdot 0,01\right)\\ &= -1,04 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

5.3 Encontre e classifique os pontos críticos de $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{y^3}{3} + y$. Faça um gráfico onde todos os pontos críticos apareçam.

Solução: Os pontos críticos de f são os pontos $(x, y) \in D_f$ tais que

$$\nabla f(x, y) = (x^2 - 1, -y^2 + 1) = (0, 0).$$

Assim,

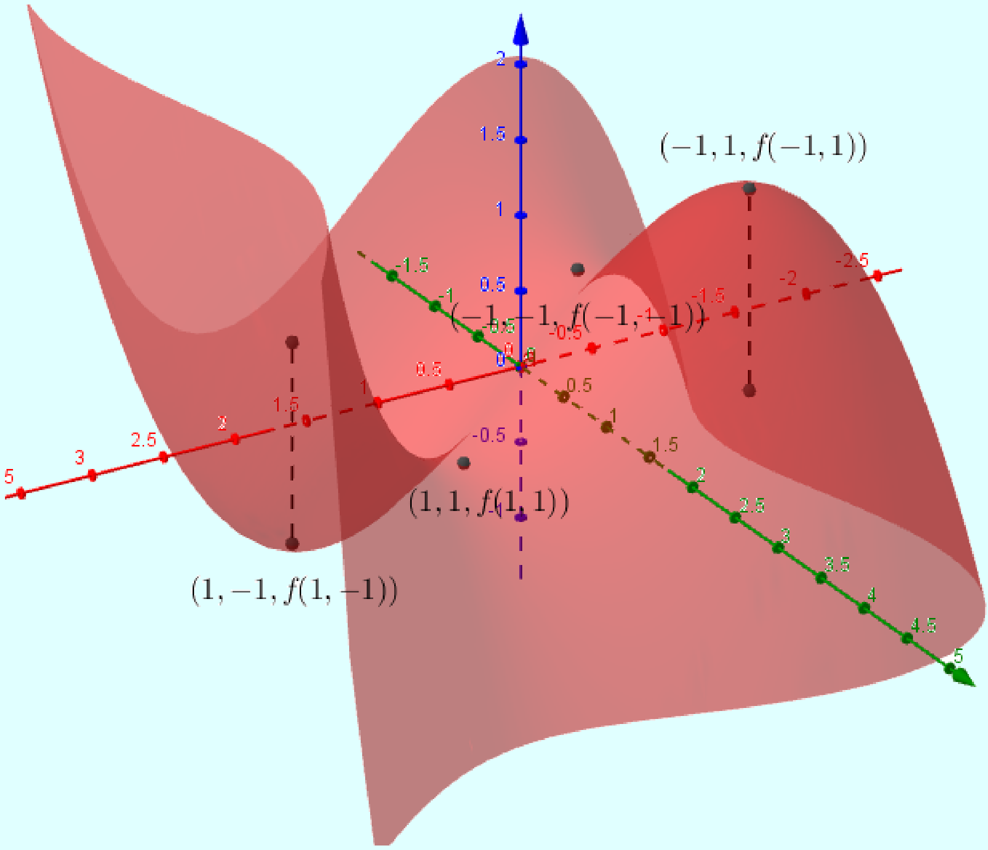
$$(-1, -1),\ (-1, 1),\ (1, -1),\ \text{e } (1, 1)$$

são os pontos críticos de f. A função f é de classe C^2, podemos classificar então, os pontos críticos através do teste da segunda derivada, isto é, calculando o Hessiano de f e a segunda derivada parcial com relação a x em cada ponto. Segue

$$\begin{aligned}H_f(x, y) &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)f_{yx}(x, y)\\ &= 2x \cdot (-2y) - 0 \cdot 0 = -4xy.\end{aligned}$$

Calculando em cada ponto crítico, temos

$H_f(-1, -1) = -4;$		$(-1, -1)$ é ponto de sela;
$H_f(-1, 1) = 4;$	$f_{xx}(-1, 1) = -2;$	$(-1, 1)$ é ponto de máximo;
$H_f(1, -1) = 4;$	$f_{xx}(1, -1) = 2;$	$(1, -1)$ é ponto de mínimo;
$H_f(1, 1) = -4;$		$(1, 1)$ é ponto de sela.



5.4 Encontre todos os pontos críticos de $f(x,y) = 1 - x^3 - 2y^2 + 3x + y^4$ e determine se são pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

Solução: Encontrando

$$\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 3, -4y + 4y^3).$$

E, agora determinando os pontos (x, y) tais que

$$\begin{cases} -3x^2 + 3 = 0 & \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ -4y + 4y^3 = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \text{ ou } y = \pm 1. \end{cases}$$

Portanto, os pontos críticos são

$$(-1,-1),\ (-1,0),\ (-1,1),\ (1,-1),\ (1,0) \text{ e } (1,1).$$

Calculando o Hessiano

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y) f_{yx}(x,y) \\ &= -6x \cdot (-4 + 12y^2) - 0 \cdot 0 \\ &= 24x(1 - 3y^2). \end{aligned}$$

Aplicando H_f em cada ponto e verificando f_{xx}, tem-se

$$
\begin{array}{lll}
H_f(-1,-1) = 48; & f_{xx}(-1,-1) = 6; & (-1,-1) \text{ é ponto de mínimo;} \\[2ex]
H_f(-1,0) = -24; & & (-1,0) \text{ é ponto de sela;} \\[2ex]
H_f(-1,1) = 48; & f_{xx}(-1,1) = 6; & (1,-1) \text{ é ponto de mínimo;} \\[2ex]
H_f(1,-1) = -48; & & (1,-1) \text{ é ponto de sela;} \\[2ex]
H_f(1,0) = 24; & f_{xx}(1,0) = -6; & (1,-1) \text{ é ponto de máximo;} \\[2ex]
H_f(1,1) = -48; & & (1,1) \text{ é ponto de sela.}
\end{array}
$$

5.5 Encontre todos os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ no plano e classifique-os. Existe um máximo global ou mínimo global entre eles?

Solução: Determinando os pontos críticos tais que

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 12) = (0,0).$$

Isto é,

$$(-1,-2), \ (-1,2), \ (1,-2) \text{ e } (1,2).$$

O Hessiano de f é

$$
\begin{aligned}
H_f(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{yx}(x,y) \\
&= 6x \cdot 6y - 0 \cdot 0 \\
&= 36xy.
\end{aligned}
$$

Calculando H_f e f_{xx} em cada ponto, temos

$$
\begin{array}{lll}
H_f(-1,-2) = 72; & f_{xx}(-1,-2) = -6; & (-1,-2) \text{ é ponto de máximo;} \\[2ex]
H_f(-1,2) = -72; & & (-1,2) \text{ é ponto de sela;} \\[2ex]
H_f(1,-2) = -72; & & (1,-2) \text{ é ponto de sela;} \\[2ex]
H_f(1,2) = 72; & f_{xx}(1,2) = 6 & (1,2) \text{ é ponto de mínimo.}
\end{array}
$$

Seja $\alpha(t) = (t, t)$, fazendo

$$\lim_{t\to\infty} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to\infty} 2t^3 - 15t + 20 = \infty$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to-\infty} 2t^3 - 15t + 20 = -\infty.$$

Mostra-se que f não tem máximo nem mínimo global.

5.6 Minimize a função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre o gráfico da curva $x + y^2 = 1$.

Solução: Considere a função f restrita a curva $y^2 = 1 - x$. Então se $h(x) = x^2 + 2(1 - x)$ temos $h'(x) = 2x - 2$. Então $h'(1) = 0$ e $h''(1) = 2$ logo 1 é ponto de mínimo para h. O ponto de mínimo acontece em $(1, 0)$.

Uma outra solução:

Queremos determinar o ponto de mínimo de f sobre o gráfico da parábola $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y^2 = 1\}$. Defina $g(x, y) = x + y^2 = 1$. Então

$$\nabla g(x, y) = (1, 2y).$$

Logo, $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$, $\forall (x, y) \in A$. Usando os multiplicadores de Lagrange as soluções do seguinte sistema são candidatos a extremantes locais em A,

$$\begin{cases} \lambda \nabla g(x, y) = \nabla f(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(1, 2y) = (2x, 4y) \\ x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} \lambda = 2x \\ \lambda 2y = 4y \\ x + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2x = 0 \\ 2y(\lambda - 2) = 0 \\ x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Da segunda equação temos que $y = 0$ ou $\lambda = 2$. Se $y = 0$ segue da terceira equação que $x = 1$ e obtemos o ponto $(1, 0)$. Conseguimos o mesmo ponto se fizermos $\lambda = 2$ na primeira equação. É fácil ver que $(1, 0)$ é de fato o ponto mínimo nesse conjunto, fazendo

$$f(1 - y^2, y) = 1 + y^4.$$

Portanto, $(1, 0)$ é o ponto que minimiza f sobre a curva $x + y^2 = 1$.

5.7 Encontre a distância mais curta da origem à curva $x^6 + 3y^2 = 1$.

Solução: A distância de um ponto (x, y) à origem é dado por

$$D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

O minimizante de D é o mesmo minimizante da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^6 + 3y^2 = 1\}$. Sobre a curva temos $y^2 = \frac{1}{3}(1 - x^6)$. Seja h a função f restrita ao conjunto B. Então $h(x) = x^2 + \frac{1}{3}(1 - x^6)$. Assim $h'(x) = 2x - 2x^5$ e $h'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. Agora $h''(x) = 2 - 10x^4$ e assim temos $h''(0) = 2$ e $h'(1) = h'(-1) = -8$. Portanto, o ponto de mínimo ocorre para $x = 0$ e sobre a curva temos $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Então $D\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ que é o resultado pedido.

Outra solução:

Defina $g(x, y) = x^6 + 3y^2 = 1$. Utilizando os multiplicadores de Lagrange, os pontos que satisfazem o sistema abaixo serão os candidatos a mínimo

$$\begin{cases} \nabla g(x, y) = \lambda \nabla f(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6x^5, 6y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^6 + 3y^2 = 1. \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} 6x^5 = \lambda 2x \\ 6y = \lambda 2y \\ x^6 + 3y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^5 - \lambda x = 0 \\ 3y - \lambda y = 0 \\ x^6 + 3y^2 = 1. \end{cases}$$

No último sistema observe que da segunda equação, $y = 0$ ou $\lambda = 3$. Se $y = 0$, da terceira equação segue que $x = \pm 1$ e temos os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são candidatos a mínimo. Se $\lambda = 3$, da primeira equação tiramos $x = 0$ e $x = \pm 1$ novamente. Fazendo $x = 0$, da terceira equação tiramos $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ da qual vêm os próximos candidatos $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Os candidatos a mínimo são

$$(-1, 0),\ (1, 0),\ \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ e } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

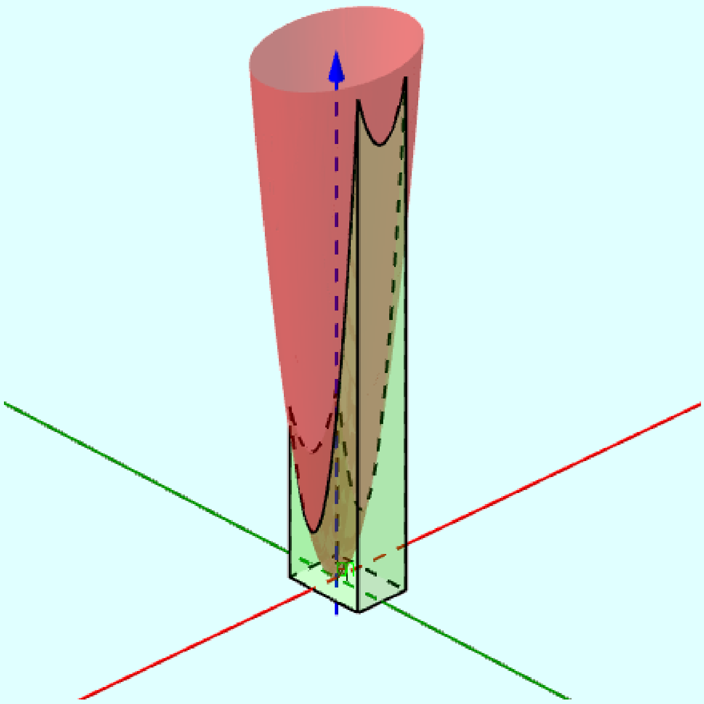
Calculando f nesses pontos, temos

$$f(-1, 0) = 1,\ f(1, 0) = 1,\ f\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ e } f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a distância mínima da curva à origem é $D\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.8 Encontre o volume do sólido limitado por cima pela superfície $z = x^2 + 2y^2$ e acima do retângulo $R = [-2,2] \times [-2,4]$.

Solução: O sólido em questão é

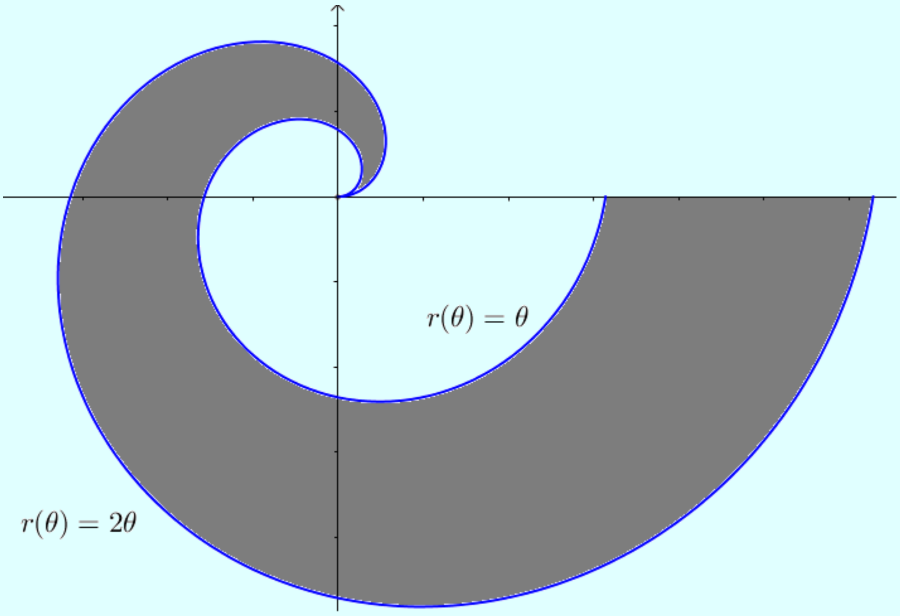


O volume V será dado por

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{4}(x^2+2y^2)dydx = \int_{-2}^{2}\left[x^2y+\frac{2y^3}{3}\right]_{-2}^{4}dx \\
&= \int_{-2}^{2}(6x^2+48)dx = \left[2x^3+48x\right]_{-2}^{2} = 224 \text{ u.v.}
\end{aligned}
$$

5.9 Calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas: a curva polar $r(\theta) = \theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$; e pelo eixo x positivo.

Solução: Temos que a região no plano xy é



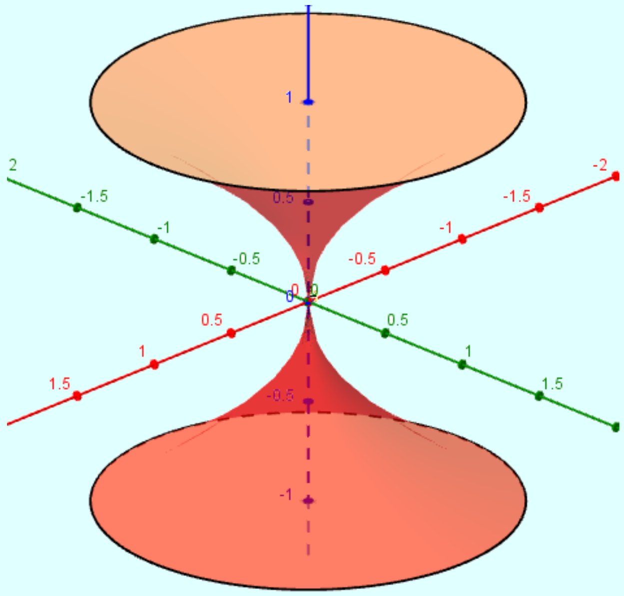
$$B = \{(r, \theta) : \theta \leq r \leq 2\theta \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Sabemos que em coordenadas cartesianas teríamos que a área seria dada pela integral dupla da função $f(x, y) = 1$. Calcularemos em coordenadas polares devido o conjunto B, no plano $r\theta$, descrever um retângulo, que é uma região bem mais simples de trabalhar. Para fazermos essa mudança, devemos considerar o jacobiano da mudança polar que é r. Portanto, ficamos com

$$\begin{aligned} A &= \iint_B r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_\theta^{2\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_\theta^{2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\theta^2 - \theta^2) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi)^3 = 4\pi^3. \end{aligned}$$

5.10 Encontre o volume do sólido definido pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^4$ e $z^2 \leq 1$. Esboce o gráfico deste sólido.

Solução: Veja que



é simétrico com relação a $z = 0$.

Fazendo a mudança cilíndrica, segue que

$$\begin{aligned} z^4 &\geq r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ z^4 &\geq r^2 \\ |z| &\geq \sqrt{r}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z \leq -\sqrt{r} \text{ ou } \sqrt{r} \leq z.$$

E, da condição $z^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq z \leq 1$. Logo, o sólido pode ser descrito em coordenadas cilíndricas como a união de

$$S_1 = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 1,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } \sqrt{r} \leq z \leq 1\}$$

com

$$S_2 = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 1,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq -\sqrt{r}\}.$$

Portanto, da simetria resulta que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{S_1} r\,dr\,d\theta\,dz - \iiint_{S_2} r\,dr\,d\theta\,dz = 2\iiint_{S_1} r\,dr\,d\theta\,dz \\ &= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{r}}^1 r\,dz\,d\theta\,dr = 2\int_0^1\int_0^{2\pi} r(1-\sqrt{r})\,d\theta\,dr \\ &= 2\int_0^1 r(1-\sqrt{r})(2\pi - 0)\,dr = 4\pi\int_0^1 r - r^{\frac{3}{2}}\,dr \\ &= 4\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 4\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right] = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

5.11 Um sólido é descrito em coordenadas esféricas por $r \leq \operatorname{sen} \phi$. Calcule seu volume.

Solução: A mudança esférica é dada por

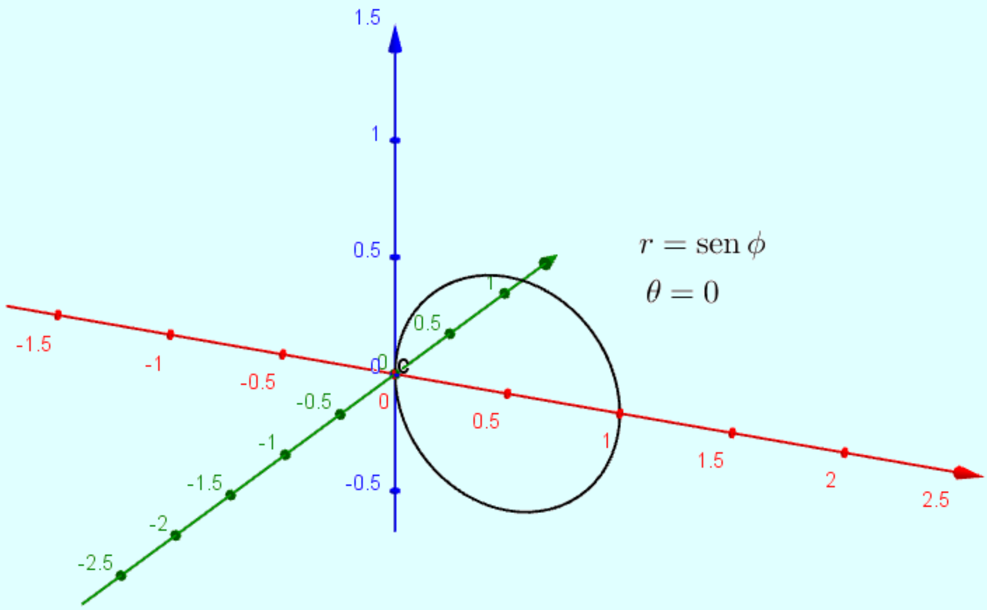
$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

Observe que no plano xz, isto é, quando $\theta = 0$, temos $x = r \operatorname{sen} \phi$, $y = 0$, $z = r \cos \phi$. No plano xz, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ e $\operatorname{sen}\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$. Então a equação $r = \operatorname{sen} \phi$ no plano xz fica

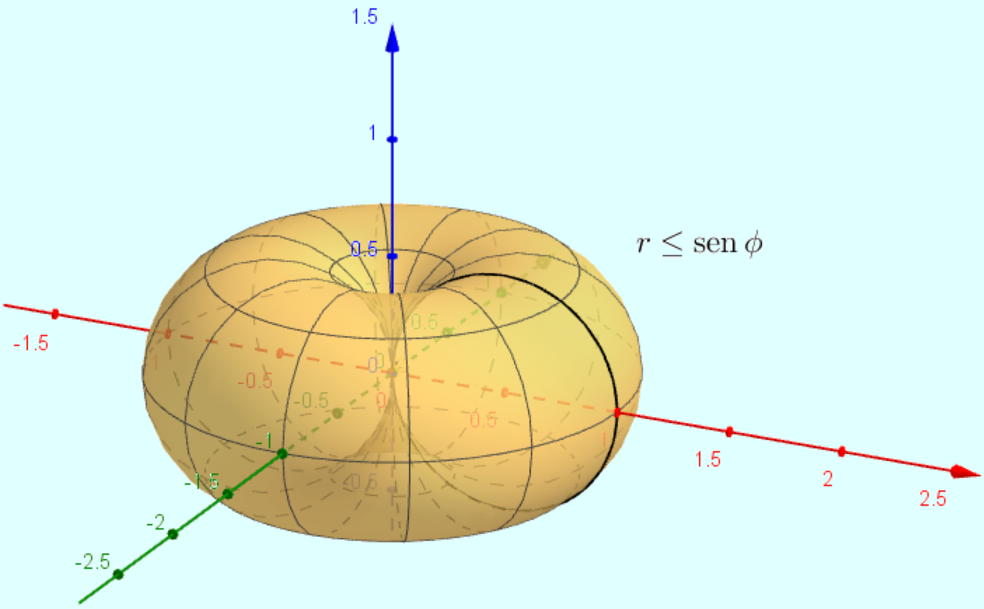
$$\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

ou seja, $x^2 + z^2 - x = 0$. Podemos reescrever isso como $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, isto é, $r \leq \operatorname{sen} \phi$ é um círculo no plano xz de centro $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$. Rotacionando esse círculo obtemos um toro.

Veja ilustração



Variando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq r \leq \operatorname{sen} \phi$, temos o toro

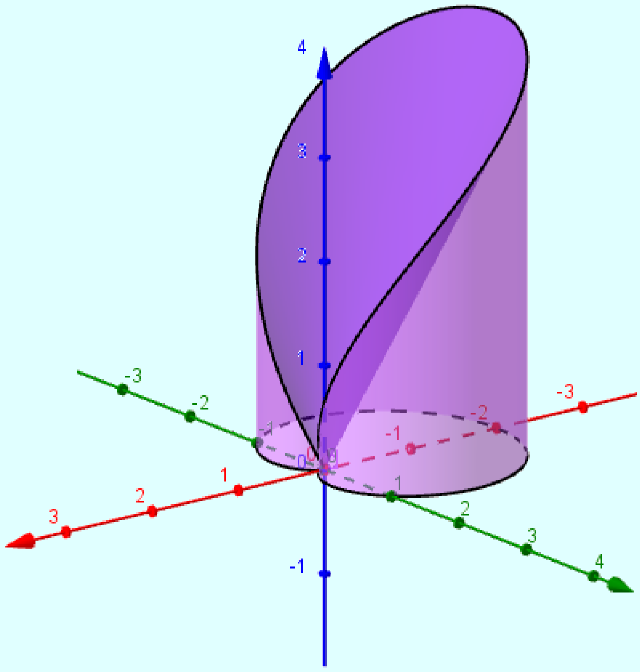


Seu volume é

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\phi} r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr\, d\phi\, d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\operatorname{sen}\phi} d\phi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4\phi \, d\phi d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\phi}{2}\right)^2 d\phi d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\phi}{2}+\frac{\cos^2 2\phi}{4} d\phi d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\phi}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 4\phi}{2}\right) d\phi d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{3\phi}{8}-\frac{\operatorname{sen} 2\phi}{4}+\frac{\operatorname{sen} 4\phi}{32}\right]_0^{\pi} d\theta\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{3\pi}{8} d\theta = \frac{\pi}{8}(2\pi-0) = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

5.12 Calcule o volume do sólido limitado por $z = 2r$, $r = 1 - \cos\theta$ e $z = 0$. Esboce o sólido.

Solução: O sólido fica

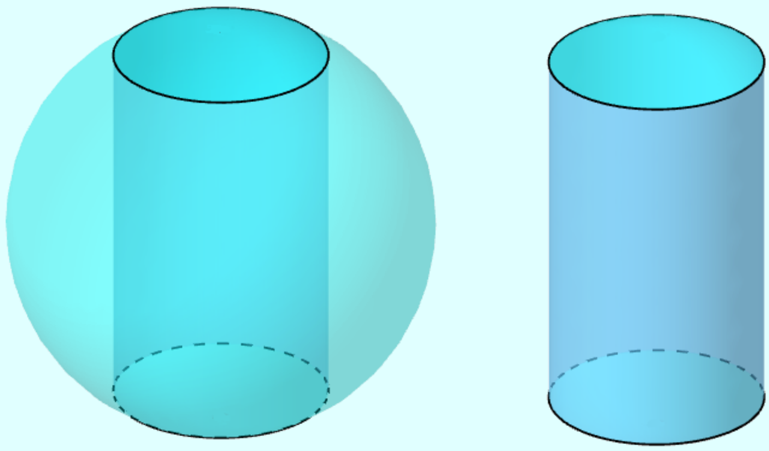


Logo,

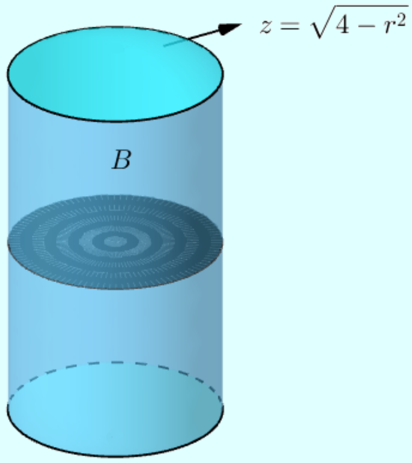
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta}\int_0^{2r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r(2r-0)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^{1-\cos\theta} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3 d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)-(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{2}{3}\left[\theta-3\operatorname{sen}\theta+3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)-\left(\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2}{3}\cdot 5\pi = \frac{10\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

5.13 Um buraco cilíndrico de raio de 1 milímetro é perfurado através do centro de uma bola sólida (o centro sobre o eixo do cilindro) com raio de 2 milímetros. Calcule o volume do sólido que permanece após a retirada.

Solução: Calcularemos o volume V_1 do sólido retirado



Em coordenadas cilíndricas temos que



$$B = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

Então,

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,d\theta\,dr = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r(\sqrt{4 - r^2} - 0)\,d\theta\,dr \\ &= 2\int_0^1 r\sqrt{4 - r^2}(2\pi - 0)\,dr = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi(32 - 12\sqrt{3})}{3}\ \text{mm}^3. \end{aligned}$$

Como o volume V_2 da esfera de raio 2mm é

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}\ \text{mm}^3,$$

então, o volume procurado será

$$V = V_2 - V_1 = \frac{32\pi}{3} - \frac{\pi(32 - 12\sqrt{3})}{3} = 4\sqrt{3}\pi\ \text{mm}^3.$$

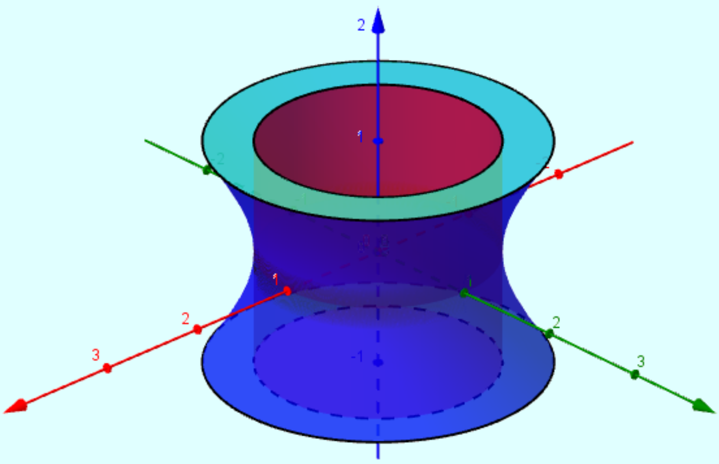
5.14 A densidade ρ do corpo dado por

$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1; -1 \leq z \leq 1\}$$

é dado por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2$. Encontre sua massa

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z)dxdydz$$

Solução: Observe o corpo em duas cores



Note que a mudança cilíndrica é a mais indicada devido a forma da região e a função ρ. Então, fazendo

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r \operatorname{sen}\theta$$

temos que

$$z \geq \sqrt{r^2 - 1} \text{ ou } z \geq -\sqrt{r^2 - 1} \text{ para } 1 \leq r \leq \sqrt{2}$$

porque $r^2 - 1 \geq 0$ e $x^2 + y^2 - 1 = 1$, esse último vem da condição $|z| \leq 1$.

Dividimos o corpo em duas partes dadas em coordenadas cilíndricas: a parte em azul celeste acima e abaixo do plano xy que é a união de

$$R_1 = \{(r, \theta, z) : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } \sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq 1\}$$

com

$$R_2 = \{(r, \theta, z) : 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq -\sqrt{r^2 - 1}\}.$$

E a segunda parte, em vermelho, que é o cilíndro

$$R_3 = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq 1\}.$$

Observe que

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

Podemos calcular M como segue

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_R \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_{R_1} \rho(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r dr d\theta dz \\
&+ \iiint_{R_2} \rho(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r dr d\theta dz + \iiint_{R_3} \rho(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r dr d\theta dz \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{r^2-1}}^{1} r^5 dz d\theta dr + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-\sqrt{r^2-1}} r^5 dz d\theta dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} r^5 dz d\theta dr \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} r^5(1 - \sqrt{r^2-1})(2\pi - 0)dr + \int_1^{\sqrt{2}} r^5(-\sqrt{r^2-1} + 1)(2\pi - 0)dr \\
&+ \int_0^1 r^5(1+1)(2\pi - 0)dr = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^5 - r^5\sqrt{r^2-1}dr + 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^5 - r^5\sqrt{r^2-1}dr \\
&+ 4\pi \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = 4\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^5 - r^5\sqrt{r^2-1}dr + \frac{2\pi}{3} \text{ (fazendo } u = r^2 - 1, \text{ ficamos com)} \\
&= 4\pi \left\{ \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_0^1 (u+1)^2\sqrt{u}\frac{du}{2} \right\} + \frac{2\pi}{3} = \frac{64\pi}{35}.
\end{aligned}$$

Outra solução:

Podemos descrever a superfície como $r^2 \le 1 + z^2$ ou $0 \le r \le \sqrt{1+z^2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-1 \le z \le 1$. Então $\rho(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 = r^4$ e

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_R \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^4.rdr \\
&= [\theta]_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} dz \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{(1+z^2)^3}{6} dz \\
&= \frac{\pi}{3} \int_{-1}^{1} (1 + 3z^2 + 3z^4 + z^6)dz = \frac{\pi}{3}\left[z + z^3 + \frac{3}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2\pi}{3}(1 + 1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{7}) = \frac{64}{35}\pi.
\end{aligned}$$